CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Índice general

Índice de figuras

Prólogo

Este libro está escrito pensando en un estudiante real que también es, en algunos aspectos, un estudiante ideal. Es un estudiante llegado hace poco a la Universidad, quizá recién llegado, que cursa estudios en alguna ingeniería o licenciatura científico – técnica y debe enfrentarse a una difícil asignatura de cálculo diferencial e integral. Debe ser difícil, porque son muy pocos quienes logran aprobarla en un sólo año y es muy alto el porcentaje de abandono. Con este libro quiero ayudarle en sus estudios de Cálculo o Análisis Matemático, no solamente para que logre una buena calificación sino para que saque de ellos el mayor provecho e incluso aprenda a disfrutarlos.

Se trata, digo, de un estudiante real porque llega a la Universidad con importantes carencias de las que él puede no ser consciente y de las que no es del todo responsable. Es muy posible que nunca haya visto una demostración matemática, que no sepa distinguir entre hipótesis y tesis, que no entienda el significado de que las matemáticas son una ciencia deductiva. Tiene poca agilidad en los cálculos con las operaciones básicas y comete frecuentes errores al intentar simplificarlos, puede calcular derivadas pero lo hace con dificultad porque tiene que ir pensando cada paso y no ha automatizado el proceso, por eso solamente sabe calcular algunas primitivas muy sencillas. Está acostumbrado a realizar ejercicios muy elementales en los que se debe aplicar de forma mecánica una regla recién aprendida. No está acostumbrado a relacionar conceptos y clasifica sus conocimientos en áreas disjuntas: cálculo, álgebra, probabilidad. . .

Pero estas carencias, con ser graves, no son las peores porque son específicas de una materia y podrían solucionarse con facilidad si no vinieran acompañadas por otras mucho más perjudiciales porque afectan a todo el proceso de aprendizaje. Me refiero a la falta de hábitos de estudio, a la pobreza y muy deficiente uso del lenguaje hablado y escrito con la consiguiente dificultad para pensar y expresarse correctamente, a la poca práctica de la lectura comprensiva, a la escasa capacidad de concentración, al poco valor que se da a la memorización de lo estudiado.

Si a este cuadro añadimos que vivimos en una sociedad que valora más el éxito, identificado casi exclusivamente con el éxito económico, que el esfuerzo; el apresuramiento compulsivo, hay que ir a toda velocidad aunque so sepamos a dónde, que la constancia y la dedicación; el

gregarismo unánime que el pensamiento crítico e independiente, la autocomplacencia que la exigencia ... La conclusión es que no son buenos tiempos para el estudio. Además, los jóvenes están permanente solicitados por todo tipo de reclamos publicitarios, adulados hasta la desvergüenza por políticos y pedagogos que les venden un mensaje falso que en su esencia viene a decir que no son responsables de sus actos: si suspenden, les dicen que es porque el profesor no ha sabido motivarlos para que estudien; si después de un botellón de fin de semana, o de una fiesta de la primavera o de un día de la cruz, las calles amanecen convertidas en un albañal por la suciedad acumulada durante la noche, el argumente apropiado para disculpar tan incívico comportamiento es el de un supuesto derecho a la diversión. Estos políticos y pedagogos parecen haberse puesto de acuerdo para propiciar que los jóvenes vivan en una permanente niñez, acreedora de todos los derechos pero sin obligaciones ni responsabilidades. Y, para acabar, la bazofia, mezquindad, zafiedad y mal gusto de algunos programas de televisión contribuyen de forma notable a difundir el mensaje de que todo vale: puedes vender tus entrañas en uno de esos programas o demostrar tu absoluta ignorancia sin temor a hacer el ridículo porque así lo hacen la mayoría de quienes participan en ellos. ¡Qué añoranza de aquellos programas en los que el saber ocupaba lugar!

El estudiante al que me dirijo es real porque es víctima de este sistema y también, puede que sin tener clara conciencia de ello, porque contribuye a su mantenimiento. Cada vez es más difícil conjugar juventud y lucidez. Pero también es un estudiante ideal porque valora el estudio, quiere prepararse para ejercer eficazmente una profesión y ser útil a los demás y tiene ganas de aprender. Lector, si este no es tu caso, si lo que quieres es solamente aprobar y no tienes curiosidad ni estás interesado en aprender, mejor que no sigas leyendo, este libro no es lo que buscas. Pero si no es así, confío en que las páginas que siguen sean útiles para que progreses adecuadamente en tus estudios de cálculo, porque lo único que se necesita para ello es, además del interés y las ganas de aprender, una capacidad básica lógico – deductiva que sin duda tienes.

El contenido de este libro no ofrece sorpresa alguna y responde a un acuerdo general tácito de lo que debe constituir un curso básico de Cálculo de funciones de una variable. La novedad, si la hay, habrá que buscarla en el estilo, en la exposición, en la gran cantidad de ejemplos y de ejercicios, en la minuciosa presentación de los conceptos y de sus relaciones. Comentaré seguidamente algunos de estos aspectos.

Este libro está escrito en un estilo deliberadamente sencillo, he querido huir del estilo pedante que se impuso hace algunos años y que todavía perdura en casos aislados. Escribir matemáticas es un arte que se va aprendiendo poco a poco y, aunque no es ajeno a las modas, tiene unas reglas básicas que deben ser respetadas en cualquier circunstancia. Realmente se trata de una sola regla debida a Nicolás Boileau (1636 - 1711) que dice así *"lo que bien se concibe bien se expresa con palabras que acuden con presteza"*. Que las palabras acudan con mayor o menor presteza es algo anecdótico, pero lo que es indudable es que si algo no se concibe bien es imposible expresarlo con claridad. La primera condición necesaria para escribir matemáticas es entender con todo detalle, a ser posible desde varios puntos de vista diferentes y con distinto grado de generalidad, la génesis y evolución de los conceptos que se exponen, las sutilezas y dificultades de comprensión que encierran, los errores más frecuentes en su interpretación. Esa condición necesaria no es suficiente. Hay que exponer esos conceptos con palabras comprensibles para el lector a quien se dirigen, evitando tecnicismos innecesarios, y ello sin dejar de ser claro y preciso.

Este libro está escrito un poco igual que se explica en clase delante de la pizarra, me he puesto en el lugar de un hipotético estudiante medio algo despistado y me hago eco de sus presumibles dudas, preguntas y confusiones, e intento explicar esas dudas, responder a las preguntas y aclarar las confusiones. Confío en que los muchos años que he dedicado a la docencia en el primer curso de distintas licenciaturas e ingenierías me hayan permitido saber ponerme en tu lugar y cumplir este empeño con decoro. Por todo eso creo que este libro te permitirá estudiar por ti mismo y te ayudará a comprender de forma correcta los conceptos principales del Cálculo.

Este libro incluye una colección de ejercicios muchísimo más amplia que lo que suele ser usual en un libro de texto. De hecho este libro es también un libro de problemas de Cálculo y, se me disculpará la inmodestia, creo que hay muy pocos libros de ejercicios de Cálculo que incluyan una colección tan variada de ejercicios y, sobre todo, que propongan tantos ejercicios no triviales y desarrollen las soluciones con detalle. Los libros de ejercicios de Cálculo dan muchas veces la impresión de que la teoría solamente sirve para proporcionar un conjunto de recetas que después hay que aplicar, sin acabar nunca de entender bien por qué se elige una receta y no otra y sin entender el fundamento que hace que la receta funcione.

Mi intención ha sido escribir un libro de Cálculo que sea útil tanto para el futuro matemático como para el futuro ingeniero, pero cada uno debe leer el libro de la forma adecuada a sus intereses y necesidades. Para ambos será de gran utilidad la extensa colección de ejercicios y de ejemplos, pero uno habrá de prestar mayor atención a los fundamentos teóricos y a las demostraciones y otro a las técnicas de cálculo y de resolución de diversos tipos de ejercicios. Al final de este prólogo propongo dos posibles guías de lectura.

Digamos algo sobre las demostraciones. Claro está que razonar y demostrar son aspectos fundamentales de las matemáticas, pero sé que el valor que las demostraciones tienen para los estudiantes es muy relativo. El empeño en demostrarlo todo puede ser contraproducente y constituir un freno en el progreso de muchos estudiantes. Las demostraciones interesantes son las que contienen ideas que se repiten en otras situaciones semejantes, no deben ser extensas, deben ser elegantes y demostrar resultados importantes que se van a usar con frecuencia. Cuando empecé este libro mi intención era incluir muy pocas demostraciones, al final, para lograr la autonomía del texto he incluido muchas más de lo que inicialmente pensaba. Mi deseo era equilibrar un desarrollo intuitivo con uno lógico deductivo, confío en no haberme desviado mucho de este objetivo. Toda ayuda a la intuición me parece loable, en este sentido, siempre que lo he creído conveniente, no he dudado en incluir una figura para facilitar la comprensión de una definición o de una demostración. Pero también quiero decir respecto de algunas demostraciones que pueden parecer muy complicadas (como los teoremas 4.13 y 4.29 de los que también doy versiones más sencillas 7.54 y 7.55), que las cosas complicadas son complicadas, que no se debe renunciar al razonamiento correcto por el hecho de que sea complicado, los detalles son importantes, en matemáticas no todo vale.

He concedido toda la importancia que merece al desarrollo y evolución histórica de los principales conceptos del Cálculo. He incluido apuntes históricos, mucho más amplios de lo usual en textos de estas características, sobre la evolución de los conceptos de número y magnitud, límite y función, derivadas e integrales, así como al concepto de infinito y a la algebraización del Análisis llevada a cabo en el último tercio del siglo XIX. Incluso hay un capítulo, el quinto, cuyo título *‘‘Números y límites. El infinito matemático”* deja bien claro cuál es su contenido. Naturalmente, nada de original hay en dichas notas históricas pues no he consultado fuentes

originales, y su posible valor está en la particular ordenación y exposición que he llevado a cabo. Mi propósito al escribirlas ha sido presentar la génesis de los conceptos matemáticos en su contexto, su titubeante y confusa evolución, las discrepancias sobre el significado de los mismos... En una palabra, proporcionar al estudiante una visión de la matemática viva.

Con frecuencia los estudiantes tienen la idea de que las matemáticas son algo cerrado y acabado, un conjunto de verdades eternas e inmutables de una fría perfección que se transmiten dogmáticamente de generación en generación y donde no hay lugar para la sorpresa ni la pasión. Nada más lejos de la realidad. La historia de las matemáticas demuestra que el quehacer matemático, la creación matemática, está muy lejos de esa fría perfección formal lógico – deductiva, que la intuición, la inducción, los procedimientos heurísticos son quizá más importantes para el avance de las matemáticas que el razonamiento deductivo. La historia de las matemáticas muestra cómo los conceptos nacen para responder a problemas concretos de cada época, cómo esos mismos conceptos llevan a reformular posteriormente los problemas desde perspectivas más generales, en un avance que no siempre es una línea recta, con intentos fallidos, con controversias y desacuerdos.

La historia pone también muy claramente de manifiesto que las matemáticas son un saber acumulativo. Esto tiene una particular importancia para el aprendizaje, quiere decir que para estudiar y avanzar en matemáticas la memoria es mucho más importante de lo que usualmente se cree. La efímera memoria de los estudiantes que llegan a la Universidad, que con frecuencia han olvidado lo que alguna vez aprendieron de matemáticas, es una de las grandes dificultades que debemos afrontar los profesores.

Un aspecto notable del libro es la atención que dedico a los persistentes errores en matemáticas que suelen tener casi todos los estudiantes al llegar a la Universidad. Confío en que mis observaciones al respecto sean útiles no sólo para los estudiantes sino también para los profesores de matemáticas de las Enseñanzas Medias. También expongo algunas opiniones muy críticas con la forma en que tradicionalmente se explican algunos temas en la Universidad, esto afecta muy especialmente al estudio de los números complejos y de las funciones elementales complejas y de las series, para los que hago propuestas que creo que deben ser tenidas muy en cuenta.

Granada, septiembre de 2008

Guías de lectura

El Capítulo 5 y los diversos complementos de contenido histórico solamente debes leerlos si te gustan. La única forma de saber si te gustan es que empieces a leerlos, y si cuando lleves dos páginas sigues interesado en la lectura seguramente llegarás hasta el final.

Los capítulos 1 y 2 deben ser leídos con detenimiento. No hay en ellos demostraciones que merezcan ese nombre. En el Capítulo 1 se dan definiciones básicas cuyo conocimiento es imprescindible para leer todo lo demás. En el Capítulo 2 se define el importantísimo concepto de función y se estudian, desde un punto de vista descriptivo, las funciones elementales. El conocimiento de dichas funciones es absolutamente necesario para leer el resto del libro y realizar ejercicios.

Para estudiantes orientados hacia ingenierías cuyo interés por las matemáticas es de tipo instrumental

El Capítulo 3 está dedicado a los números complejos y a las funciones complejas elementales. Solamente tú puedes saber si necesitas estudiarlo. Si decides omitirlo puedes hacerlo con tranquilidad.

El Capítulo 4 está dedicado a dos importantes conceptos: el de continuidad y el de límite funcional. Son conceptos de importancia teórica y necesarios para hacer ejercicios. Debes estudiar y entender las definiciones y resultados pero no es necesario que leas las demostraciones. El concepto de extremo superior tiene interés desde un punto de vista formativo, para que comprendas que se precisa alguna herramienta que permita probar ciertas afirmaciones de apariencia evidente (o no tan evidente). Muchos libros de Cálculo orientados hacia la ingeniería omiten este concepto. No es un concepto imprescindible para un futuro ingeniero, pero es bueno que sepas de su existencia y tengas una idea de su utilidad y lo que significa.

El Capítulo 6 estudia las derivadas y sus aplicaciones. Creo que debes leerlo todo incluidas las demostraciones de los resultados principales porque son cortas y fáciles de entender, con la excepción, quizás, de las demostraciones de las Reglas de L'Hôpital, no porque sean difíciles sino porque son algo largas. Pero debes leer la explicación de por qué dichas reglas funcionan. Son muy útiles y mi impresión es que se usan como un recurso casi mágico, sin entender bien lo que se está haciendo. La sección en la que se explican técnicas para calcular límites de funciones debes leerla hasta que memorices los límites básicos que allí se indican y entiendas bien los procedimientos que se exponen.

El Capítulo 8 es muy extenso, en él se estudia la integral de Riemann que es la integral usual del Cálculo, las integrales impropias, el cálculo de primitivas y las aplicaciones del cálculo integral. Con la excepción de las demostraciones del Teorema Fundamental del Cálculo y de la Regla de Barrow, no es necesario que leas otras demostraciones. Procura entender bien la definición de integral y sus propiedades así como el significado del Teorema Fundamental del Cálculo. Todo el tiempo que dediques, y tendrás que dedicar muchas horas, a practicar las técnicas de cálculo de primitivas será ampliamente recompensado. Calcular primitivas es algo que hay que hacer con muchísima frecuencia: en todas las aplicaciones de la integral tienes que calcular una primitiva.

El Capítulo 10 estudia la convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de fun-

ciones. El concepto de convergencia puntual es muy sencillo, no lo es tanto el de convergencia uniforme y puede que un ingeniero no necesite estudiarlo con detenimiento. Es bueno que sepas para qué sirve y que muchas operaciones que consisten en permutar el límite funcional con la integración o con la derivación requieren para su plena justificación un tipo de convergencia mejor que la puntual. Las series de potencias debes estudiarlas con detalle, omitiendo quizás algunas demostraciones. Su estudio es importante y muy útil a efectos de cálculo. Los desarrollos en serie de potencias de las funciones elementales, y la definición por series de potencias de las funciones exponencial y trigonométricas debes estudiarlos bien. Lo que dice el teorema de aproximación de Weierstrass es muy fácil de entender, pero puedes omitir su demostración.

La parte más importante para el aprendizaje es el tiempo que dediques a la realización de ejercicios. He incluido una extensa colección de ejercicios resueltos que te servirá de ayuda para aprender a resolver ejercicios tú solo. Siempre debes intentar resolver algunos de los ejercicios propuestos empezando por los que te parezcan más fáciles, antes de consultar las soluciones. Se aprende más de un ejercicio que al principio se resiste hasta que damos con la idea para resolverlo, que del ejercicio que resolvemos al primer golpe de vista. Los ejercicios que propongo tiene un grado medio de dificultad: no son triviales para no ofender a tu inteligencia ni demasiado difíciles para evitar que puedas desalentarte. Con frecuencia los más difíciles están resueltos. En cualquier caso, siempre debes leer la teoría y comprender los conceptos e ideas básicas, así como el significado preciso de los teoremas, antes de hacer los ejercicios.

Para estudiantes de matemáticas y física

Todo lo dicho arriba se mantiene con algunos añadidos:

El Capítulo 3 debes estudiarlo y entenderlo bien. Los conceptos básicos de los números complejos están muy confusamente expuestos en gran número de textos y las funciones complejas elementales son definidas con frecuencia de una forma poco correcta.

En el Capítulo 4 debes estudiar y comprender bien las definiciones de extremo superior e inferior. Debes hacer ejercicios hasta que te convenzas de que sabes usarlas con soltura. La diferencia entre un curso de Cálculo y uno de Análisis Matemático está en los conceptos de supremo e ínfimo. Los libros de Análisis Matemático siempre los incluyen, los de Cálculo casi nunca. No es preciso, al menos en una primera lectura, que estudies la demostración del teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass, en el Capítulo 7 hay otra demostración alternativa de dicho teorema que es mucho más fácil. Debes estudiar y comprender la demostración del teorema de Bolzano y sus consecuencias, así como las relaciones entre monotonía e inyectividad.

Para el Capítulo 6 te doy los mismos consejos que arriba. En una segunda lectura debes estudiar la demostración de las reglas de L'Hôpital.

Para el Capítulo 8 mantengo los mismos consejos de arriba con el añadido de que estudies las demostraciones de integrabilidad de funciones continuas y de funciones monótonas.

En el Capítulo 9 puedes omitir la demostración de la segunda parte del teorema 9.14 pero debes entender lo que se afirma en el mismo. Lo demás debes estudiarlo todo. El tema de las series es muy importante para matemáticos y físicos.

El Capítulo 10 es de estudio obligado para matemáticos y físicos. La convergencia uniforme

es tu primer encuentro con algunos conceptos que serán ampliamente generalizados en otros cursos, el tiempo que dediques a su estudio y a la comprensión de sus sutilezas estará bien empleado. Todos los teoremas de este Capítulo tiene demostraciones sencillas y cortas que debes estudiar. El teorema de aproximación de Weierstrass es también uno de esos resultados cuya generalización se estudia en cursos más avanzados, debes entender bien lo que dice y no está de más que leas la demostración. Por lo demás, mantengo los consejos dados arriba.

La parte más importante para el aprendizaje es el tiempo que dediques a la realización de ejercicios. He incluido una extensa colección de ejercicios resueltos que te servirá de ayuda para aprender a resolver ejercicios tú solo. Siempre debes intentar resolver algunos de los ejercicios propuestos empezando por los que te parezcan más fáciles, antes de consultar las soluciones. Se aprende más de un ejercicio que al principio se resiste hasta que damos con la idea para resolverlo, que del ejercicio que resolvemos al primer golpe de vista. Los ejercicios que propongo tiene un grado medio de dificultad: no son triviales para no ofender a tu inteligencia ni demasiado difíciles para evitar que puedas desalentarte. Con frecuencia los más difíciles están resueltos. En cualquier caso, siempre debes leer la teoría y comprender los conceptos e ideas básicas, así como el significado preciso de los teoremas, antes de hacer los ejercicios.

Capítulo 1

Axiomas de $\mathbb{R}$. Principio de inducción

Dios creó los números naturales, lo demás es obra de los hombres.
L. Kronecker

1.1. Introducción

Los temas tradicionales del Cálculo son el estudio de las funciones continuas, las derivadas e integrales, las sucesiones y las series. Tú ya debes saber algo de todo eso. En principio, parecen cosas bastante diferentes pero todas ellas tienen una base común, que es, precisamente, de lo que nos vamos a ocupar en este Capítulo. Me estoy refiriendo a los números reales que representamos por $\mathbb{R}$. Sin duda, ya conoces muchas propiedades de los números reales. Sabes que se pueden sumar y multiplicar y que hay números reales positivos y negativos. También puedes extraer raíces de números reales positivos y elevar un número real positivo a otro número real. Lo que quizás no sepas es que todo lo que puedes hacer con los números reales es consecuencia de unas pocas propiedades que dichos números tienen que, además, son muy elementales. En este Capítulo estableceremos dichas propiedades. Serán nuestro punto de partida para todo lo que sigue; constituyen los *"axiomas"* del Cálculo. Te advierto que no voy a decírtelo todo, voy a guardarme una carta en la manga que te mostraré más adelante cuando su necesidad sea manifiesta (si echas algo en falta, ve al Capítulo 4).

1.1.1. Axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios.

Al terminar este apartado, entenderás el significado de la frase de Bertrand Russell que fue uno de los más grandes matemáticos y filósofos del siglo XX.

> *La matemática pura es aquella ciencia en la que uno no sabe de qué está hablando ni si lo que está diciendo es verdad.*

Siempre que te enfrentas a un problema es muy importante que lo sitúes en su contexto apropiado. Esto ya lo haces de forma automática en muchas ocasiones. Por ejemplo, sabes que un problema de álgebra y otro de probabilidades requieren distintas herramientas, y al primero lo sitúas en "Álgebra" y al segundo en "Cálculo de Probabilidades". Pero no siempre las cosas son tan claras, no siempre tienes un "marco de referencia" tan explícito. Para que *sientas* lo que quiero decirte, voy a proponerte unos ejercicios muy sencillos. En todo lo que sigue se supone que x, y son números reales.

1. Prueba que $0\,x = 0$.
2. Prueba que $(-x)y = -xy$.
3. Prueba que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$.

Supongo que hace ya tanto tiempo que conoces estas propiedades de los números que has olvidado cuándo las aprendiste. ¡Y ahora te pido que las *demuestres*! Puedo imaginar tu reacción *¿que demuestre que* $0\,x = 0$*?, ¡pero si eso es evidente! ¡siempre me han dicho que es así! ¿cómo se puede demostrar tal cosa?.*

Pienso que muchas veces la dificultad de un ejercicio está en que no sabes qué es exactamente lo que se te pide que hagas; no te dan un marco claro de referencia. En estas situaciones lo más frecuente es *"quedarse colgado"* con la *"mente en blanco"* sin saber qué hacer.

Para evitar ese peligro, en este curso vamos a dar un marco de referencia muy claro que va a consistir en unas propiedades de los números – *axiomas*, si quieres llamarlas así – que vamos a aceptar como punto de partida para nuestro estudio. Esas propiedades, junto con las *reglas de inferencia lógica* usuales y con *definiciones* apropiadas nos permitirán *demostrar* resultados (*teoremas*) que podremos usar para seguir avanzando.

Simplificando un poco, puede decirse que en matemáticas no hay nada más que axiomas y teoremas (bueno, también hay conjeturas, proposiciones indecidibles...). Todo lo que se demuestra es un teorema; por ejemplo $0\,x = 0$ es un teorema. Ocurre que el nombre *teorema* se reserva para resultados que se consideran realmente importantes y que ha costado esfuerzo llegar a probarlos. Se usan también los términos: *corolario*, *lema*, *proposición* y otros. Pero la estructura de una *teoría matemática elaborada* se resume en un conjunto de axiomas y de teoremas que se deducen de ellos mediante reglas de inferencia lógica.

Los axiomas de una teoría matemática proporcionan el marco de referencia más general de dicha teoría. Son, por tanto, muy importantes. Al principio, cuando la teoría empieza a caminar y se demuestran los primeros resultados más básicos, es frecuente recurrir de forma explícita a los axiomas. Más adelante, cuando la teoría va avanzando, los axiomas no suelen citarse con tanta frecuencia porque nos apoyamos en resultados más elaborados previamente demostrados. Pero los axiomas siempre están presentes aunque sea de forma discreta y no ostensible.

Entre las particularidades que distinguen a las Matemáticas de las demás ciencias hay una muy especial: las Matemáticas avanzan dando definiciones. Las definiciones no son nuevos axiomas. Una definición lo que hace es introducir un término nuevo y establece cómo dicho término se expresa en función de los axiomas de la teoría. Por ejemplo, la definición de continuidad se expresa mediante desigualdades y las desigualdades se reducen a los axiomas de orden de $\mathbb{R}$.

Quiero también decirte algo sobre lo que se entiende por *reglas de inferencia lógicas usuales*. Me limitaré a la más importante: la *implicación lógica*. Los teoremas matemáticos tienen casi siempre la siguiente estructura: se parte de una *hipótesis* y de ella *se deduce* una *tesis*. Entremos en detalles. La *hipótesis* es siempre alguna propiedad matemática; por ejemplo, *"f es una función continua en un intervalo"*. La *tesis* también es una propiedad matemática; por ejemplo, *"la imagen de f es un intervalo"*. Representemos por H la hipótesis y por T la tesis. Es importante que te des cuenta de que no tiene sentido preguntarse por la *veracidad* de la hipótesis H. No es ni verdadera ni falsa. Para que H sea verdadera o falsa debemos particularizar la función f.



Un error muy frecuente consiste en pensar que en Matemáticas *las hipótesis son verdaderas*.

Ahora te preguntarás, si H no es verdadera ni falsa, ¿qué quiere decir que H implica T o, equivalentemente, que T se deduce o es consecuencia de H? La respuesta es: "H implica T" quiere decir que *siempre que H sea verdadera también T es verdadera*. Observa que no estamos afirmando (no tiene sentido) que H o T sean verdaderas sino que *cuando* H es verdadera también lo es T. Con más precisión, demostrar que H implica T consiste en probar que la proposición $H \longrightarrow T$ es cierta. Teniendo en cuenta que la proposición $H \longrightarrow T$ es la disyunción lógica (no$H$)$\vee T$, resulta que si H es falsa entonces $H \longrightarrow T$ es verdadera (por eso se dice que de una hipótesis falsa puede deducirse cualquier cosa) y si H es verdadera entonces para que $H \longrightarrow T$ sea verdadera tiene que ocurrir que T sea verdadera. En consecuencia, si sabemos que H es verdadera y que $H \longrightarrow T$ es verdadera, deducimos que T es verdadera.

Ahora puedes entender el significado de la frase de C. P. Steinmetz.

> La matemática es la ciencia más exacta, y sus conclusiones son susceptibles de demostración absoluta. Pero eso se debe exclusivamente a que la matemática no intenta obtener conclusiones absolutas. *Todas las verdades matemáticas son relativas, condicionales.*

También comprendes ya el significado de una parte de la enigmática frase de Bertrand Russell del principio: *en matemáticas no sabemos si lo que decimos es verdad*. Pero una parte de dicha frase queda por aclarar.

¿Recuerdas los axiomas de la geometría elemental? En dichos axiomas se establecen propiedades que se supone satisfacen ciertos objetos llamados "punto","recta" y "plano". Pero no se dice nunca *lo que es* un punto ni una recta ni un plano. De la misma forma, en la sección siguiente estableceremos los axiomas de los números reales, pero no diremos *lo que es* un número real. ¡En matemáticas nunca decimos cuál es la naturaleza concreta de los objetos con los que trabajamos! Sucede que la intuición nos lleva muchas veces a una interpretación *natural* de dichos objetos, pero otras veces dicha interpretación natural no está disponible. Y, lo más interesante, puede haber interpretaciones muy diferentes de una misma teoría matemática. Precisamente, las matemáticas son una *ciencia abstracta* porque trabaja con cosas abstractas cuya naturaleza no se precisa ni es necesario saber, solamente interesan las *relaciones* que hay entre ellas tal y como se establecen en los axiomas. Ahora ya entiendes por qué afirma Bertrand Russell que *"en matemáticas no sabemos de lo que hablamos"*.

1.2. Axiomas de los números reales

1.2.1. Axiomas algebraicos

Como ya sabes, se distinguen distintas clases de números:

Los *números naturales* $1, 2, 3, \dots$. El conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{N}$.

Los *números enteros* $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. cuyo conjunto se representa por $\mathbb{Z}$.

Los *números racionales* que son cocientes de la forma p/q donde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, cuyo conjunto representamos por $\mathbb{Q}$.

También conoces otros números como $\sqrt{2}$, π, o el número e que no son números racionales y que se llaman, con una expresión no demasiado afortunada, "números irracionales". Pues bien, el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se llama *conjunto de los números reales* y se representa por $\mathbb{R}$.

Es claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Aunque los números que no son racionales pueden parecer un poco raros, no merece la pena, al menos por ahora, preocuparse por cómo son estos números; sino que lo realmente interesante es aprender a trabajar con ellos. Lo interesante del número $\sqrt{2}$ es que su cuadrado es igual a 2[1].

Pues bien, una de las cosas más llamativas de los números es que a partir de un pequeño grupo de propiedades pueden deducirse casi todas las demás. Vamos a destacar estas propiedades básicas que, naturalmente, hacen referencia a las dos operaciones fundamentales que se pueden hacer con los números: la suma y el producto. La suma de dos números reales x, y se escribe $x + y$, representándose el producto por xy. Las propiedades básicas a que nos referimos son las siguientes.

P1 Propiedades asociativas. Para todos x, y, z en $\mathbb{R}$:

$$(x + y) + z = x + (y + z)\,; \qquad (xy)z = x(yz)$$

P2 Propiedades conmutativas. Para todos x, y en $\mathbb{R}$:

$$x + y = y + x\,; \qquad x\,y = yx$$

P3 Elementos neutros. Hay dos números reales *distintos* que representamos por 0 y 1 tales que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$0 + x = x \qquad\qquad 1x = x$$

P4 Elementos opuesto e inverso. Para cada número real x hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

Para cada número real x distinto de 0, $x \neq 0$, hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.

[1]La sección Números y medida de magnitudes trata de la aparición de los números irracionales y su relación con la medida de magnitudes

P5 Propiedad distributiva. $(x + y)z = xz + y\,z$ para todos x, y, z en $\mathbb{R}$.

Las propiedades anteriores son de tipo algebraico y, aunque son muy sencillas, a partir de ellas pueden *probarse* cosas tan familiares como que $0x = 0$, o que $(-x)y = -(xy)$. Vamos a hacerlo.

1.1 Proposición. *Se verifican las siguientes igualdades*

$$0x = 0, \qquad (-x)y = -x\,y, \qquad (-x)(-y) = xy\,.$$

Demostración. Probaremos primero que $0x = 0$. Por **P5** $(0 + 0)x = 0\,x + 0\,x$. Como consecuencia de **P3** es $0 + 0 = 0$. Obtenemos así que $0\,x = 0\,x + 0\,x$. Usando **P4**, sumamos el opuesto de $0\,x$ a ambos lados de la igualdad $0\,x = 0\,x + 0\,x$ y, usando también **P1** (la propiedad asociativa), obtenemos que $0\,x = 0$.

Probaremos ahora que $(-x)y = -(xy)$. Tenemos que $xy + (-x)y = (x + (-x))y = 0\,y = 0$. Donde hemos usado **P4**, **P5** y el apartado anterior. La igualdad $xy + (-x)y = 0$ nos dice, por **P4**, que $(-x)y$ es el opuesto de xy. Eso es justamente lo que queríamos probar.

Finalmente, la igualdad $(-x)(-y) = xy$ es consecuencia inmediata de la anterior. □



El símbolo $-x$ debe leerse siempre "el opuesto de x" y no "menos x". La razón es que la palabra "menos" remite a una idea de orden (si hay "menos" es porque hay "más") y el significado de $-x$ es puramente algebraico y nada tiene que ver con la idea de orden de la que ni siquiera hemos hablado aún. ¡No cometas el error de pensar que $-x$ es negativo!

Notación. Suele escribirse $x - y$ en vez de $x + (-y)$. También, supuesto $y \neq 0$, se escribe x/y o $\frac{x}{y}$ en vez de $x\,y^{-1}$.

1.2.2. Axiomas de orden

Los números tienen, además de las propiedades algebraicas, otras propiedades que suelen llamarse *propiedades de orden*. Como sabes, los números suelen representarse como puntos de una recta en la que se fija un origen, el 0, de forma arbitraria. Los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Las propiedades básicas del orden son las siguientes.

P6 Ley de tricotomía. Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$, x es positivo, $-x$ es positivo.

P7 Estabilidad de $\mathbb{R}^+$. La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

1.2.2.1. Relación de orden

Observa que en **P6** se dice, en particular, que el 0 *no* es positivo, ¡el 0 es el 0! Por otra parte, si x es un número positivo, entonces como $x + (-x) = 0$ y el 0 no es positivo, concluimos,

por **P7**, que $-x$ no es positivo. Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x \,:\, x \in \mathbb{R}^+\}$, es decir, los opuestos de los números positivos, se llaman *números negativos*. Observa que si $z \in \mathbb{R}^-$ entonces $-z \in \mathbb{R}^+$.

1.2 Definición. Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}^+_{\text{o}} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^-_{\text{o}} = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.3 Proposición. *Para todo $x \neq 0$ se verifica que $x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.*

Demostración. Probaremos que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$. En efecto, si $x \neq 0$ entonces, por **P6**, o bien x es positivo o bien $-x$ es positivo. Teniendo en cuenta que, como consecuencia de (1.1), es $x^2 = x\,x = (-x)(-x)$, concluimos que x^2 es positivo. En particular, tenemos que $1^2 = 1 > 0$. ¡Acabamos de probar que $1 > 0$!. □

Tenemos ahora dos tipos de propiedades en $\mathbb{R}$, las algebraicas **P1-P5** y las de orden **P6** y **P7**. En la siguiente sección estudiamos cómo se relacionan entre sí.

1.2.3. Desigualdades y valor absoluto

Las propiedades del orden de los números reales son las que nos permiten trabajar con desigualdades. Es muy fácil equivocarse al trabajar con desigualdades. Yo creo que en el bachillerato no se le da a este tema la importancia que merece. Fíjate que algunos de los conceptos más importantes del Cálculo se definen mediante desigualdades (por ejemplo, la definición de sucesión convergente o de límite de una función en un punto). Por ello, tan importante como saber realizar cálculos más o menos complicados, es aprender a manejar correctamente desigualdades, y la única manera de hacerlo es con la práctica mediante numerosos ejemplos concretos. Por supuesto, siempre *deben respetarse cuidadosamente las reglas generales que gobiernan las desigualdades entre números* y asegurarse de que se usan correctamente. Aparte de tales reglas no hay otros métodos generales que nos digan cómo tenemos que proceder en cada caso particular.

En el siguiente resultado ¡el primer teorema de este curso! se enuncian las propiedades principales del orden de $\mathbb{R}$. Son las que deberás usar para trabajar con desigualdades.

1.4 Teorema (Reglas para trabajar con desigualdades). *Sean x, y, z números reales.*

1. $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant z$ *implican que* $x \leqslant z$.
2. $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant x$ *implican que* $x = y$.
3. *Se verifica exactamente una de las tres relaciones:* $x < y$, $x = y$, *o* $y < x$.
4. $x < y$ *implica que* $x + z < y + z$.
5. $x < y$, $z > 0$ *implican que* $xz < y\,z$.

6. $x < y$, $z < 0$ *implican que* $xz > y\,z$.

7. $xy > 0$ *si, y sólo si,* x *e* y *son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si* $x \neq 0$ *es* $x^2 > 0$ *y, en particular,* $1 > 0$.

8. $z > 0$ *implica que* $\dfrac{1}{z} > 0$.

9. *Supuesto que* x *e* y *son los dos positivos o los dos negativos, se verifica que* $x < y$ *implica que* $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

Todas estas propiedades son fáciles de probar. Por ejemplo, para probar el punto *5)*, si $x < y$ se tiene que $y - x > 0$. Si ahora es $z > 0$, también será $z(y - x) > 0$, es decir, $zy - zx > 0$ o, sea, $zx < zy$. Lo único que hemos usado aquí ha sido la definición de los símbolos "$<$" y "$>$" y algunas de las propiedades **P1**-**P8**. Un estupendo ejercicio para que compruebes tus habilidades es que demuestres todas las afirmaciones del teorema anterior.

1.2.3.1. La forma correcta de leer las matemáticas

La forma en que están escritos los apartados del teorema anterior no me gusta mucho. Voy a decirte por qué y para eso voy a tratar aquí un defecto en el que solemos caer al leer o estudiar matemáticas. Se trata de algo que realizamos de una manera mecánica, y por ello no es fácil de evitar, y que limita y condiciona mucho el alcance de lo que entendemos y aprendemos. Para ponerlo de manifiesto vamos a considerar un ejemplo. En uno de los ejercicios al final de esta sección te propongo que pruebes que la igualdad

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y} \tag{1.1}$$

nunca es cierta. Bien, supongamos que ya lo has probado. Seguidamente te pido que me digas cuándo es cierta la igualdad

$$\frac{1}{x+y^2} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y^2+z} \tag{1.2}$$

Tienes 15 segundos para contestar (y sobran 13). ¿Si? ¿No? ¡Son *la misma* igualdad! Y, aquí es a dónde yo quería llegar, si no te parecen la misma igualdad es porque *estás leyendo los símbolos y no los conceptos*, es porque ¡estás leyendo las letras! Claro, me dirás, las letras están para leerse. De acuerdo, pero hay que ir siempre al significado de lo que se lee y no quedarse en la superficie de los símbolos. Los símbolos proporcionan mucha comodidad para expresar las ideas matemáticas, pero con frecuencia, si no sabemos leer bien su significado, *los símbolos pueden ocultar los conceptos*. En el ejemplo anterior, el hecho de que la igualdad (1.1) sea falsa, se expresa de forma correcta diciendo que *"la suma de dos inversos nunca es igual al inverso de la suma"*. Por tanto, la igualdad (1.2) jamás puede darse pues es la misma igualdad (1.1) en la que se ha sustituido x por $x + y^2$ e y por z. Pero tanto x como $x + y^2$ son números reales cualesquiera e igual ocurre con z e y. ¿Te das cuenta del problema? No es igual retener la idea de que "1 dividido por x más 1 dividido por y nunca es igual a 1 dividido por $x + y$" que asimilar que "la suma de dos inversos nunca es igual al inverso de la suma". En el primer caso los símbolos x e y tienen un protagonismo que no les corresponde, ocultan

el concepto: si te fijas demasiado en ellos no sabrás reconocer que (1.2) y (1.1) son la misma cosa.

Esto que acabamos de ver ocurre en muchas situaciones. Por ejemplo, la mayoría de los libros de texto enuncian el teorema de Bolzano como sigue.

> Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y verificando que $f(a)f(b) < 0$. Entonces hay algún $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Demasiadas letras f, a, b, c, demasiadas precisiones que lo que hacen es confundir y ocultar el resultado. La forma correcta de leer el enunciado anterior es: "toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo". Los teoremas deben enunciarse así, a ser posible sin símbolos. Yo procuro hacerlo siempre que el resultado lo permite. No lo he hecho en el teorema (1.4) porque quiero que lo hagas tú. Por ejemplo, la propiedad *5)* de dicho teorema debe leerse (y escribirse) en la forma: "una desigualdad se conserva al multiplicarla por un número positivo".



1.5 Estrategia. *Traduce los símbolos en conceptos. Cuando leas matemáticas presta atención a los conceptos y no retengas símbolos concretos.*

1.6 Definición. Se dice que un conjunto no vacío de números reales, $A \subset \mathbb{R}$, tiene *máximo* si hay un número $M \in A$ que es el mayor de todos los elementos de A, es decir, $x \leqslant M$ para todo $x \in A$. Cuando esto ocurre, escribimos $M = \text{máx}\, A$. Se dice que un conjunto no vacío de números reales, $A \subset \mathbb{R}$, tiene *mínimo* si hay un número $m \in A$ que es el menor de todos los elementos de A, es decir, $m \leqslant x$ para todo $x \in A$. Cuando esto ocurre, escribimos $m = \text{mín}\, A$.

Valor absoluto

El *valor absoluto* de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Para trabajar con valores absolutos es útil recordar la siguiente definición.

1.7 Definición. [2]. Para cada número $z \in \mathbb{R}^+_o$, representamos por $\sqrt{z}$ al único número *mayor o igual que cero* cuyo cuadrado es igual a z.

1.2.3.2. Una función aparentemente caprichosa

Acabamos de definir la función *"raíz cuadrada"*. Ahora te propongo un juego: voy a hacerte una pregunta que tú vas a responder de forma inmediata diciendo lo primero que se te ocurre. La pregunta es la siguiente: dime el valor de $\sqrt{x^2}$. Por experiencia sé que la mayoría de las veces la respuesta es x. Pues si esa ha sido tu respuesta te equivocas. Vuelve a leer la definición anterior y responde ahora de forma meditada. Confío en que ya tengas la respuesta correcta que es $|x|$. En efecto, se tiene que $|x|^2 = x^2$ y, *además*, $|x| \geqslant 0$, por tanto $|x| = \sqrt{x^2}$.

[2] Con las herramientas que ahora tenemos no podemos probar la existencia de raíces cuadradas

Sé por experiencia que muchos estudiantes tienen la idea de que la raíz cuadrada de un número real positivo es unas veces positiva y otras veces negativa y muchos creen que puede tomar los dos valores y, en este caso, deben pensar que $\sqrt{x^2} = \{x, -x\}$. Cosas más raras se han visto. Toda esta "magia" lleva a situaciones bastante extrañas. Por ejemplo, es sabido que la distancia euclídea entre dos puntos (a, b) y (c, d) del plano viene dada por $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. En particular, la distancia entre los puntos $(a, b) = (1, 2)$ y $(c, d) = (1, 3)$ es $\sqrt{(1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(-1)^2} = -1$. ¿Una distancia negativa? No, la raíz cuadrada no es una función caprichosa y su definición no deja lugar a dudas: la raíz cuadrada de un número positivo es también un número positivo.

¿Sabes de dónde procede esta confusión tan extendida? Pues viene de muy atrás, de cuando en la escuela se aprende (*¿realmente se aprende?*) a resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ cuyas soluciones son los números

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.3}$$

Ahí está el problema: en el confuso símbolo $\pm$ delante de la raíz. Es eso lo que lleva a muchos a pensar que las raíces cuadradas pueden tomar dos valores: uno positivo, que corresponde a la elección del sigo $+$, y otro negativo que corresponde a la elección del signo $-$ en la expresión (1.3). Lo más lamentable es que toda esta confusión no es más que producto de la pereza. Verás, cuando se aprende a resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ (*¿realmente se aprende?*) se obtienen las soluciones

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como esto es largo de escribir en la pizarra, los profesores, *por pereza*, resumen las soluciones obtenidas en la expresión única (1.3). Eso explica cosas bastante incomprensibles como, por ejemplo, escribir $+\sqrt{3}$ ¿acaso escribes +7? No, sabes que 7 es un número positivo y parece totalmente improcedente escribir $+7$. Entonces, ¿por qué escribir $+\sqrt{3}$? Respuesta, porque $\sqrt{3}$ es caprichoso: unas veces puede ser positivo y otras negativo. A esta forma de pensar se le llama *magia matemática*, está bastante más extendida de lo que puedes creer y no solamente entre estudiantes. Confío en que te haya quedado claro sin lugar a dudas que $\sqrt{x^2} = |x|$ y que la raíz cuadrada no es una función caprichosa.

La utilidad de la raíz cuadrada para trabajar con valores absolutos procede de la siguiente estrategia de procedimiento.

1.8 Estrategia. a) Para probar que dos números positivos son iguales es suficiente probar que sus cuadrados son iguales.

b) Para probar una desigualdad entre dos número positivos es suficiente probar dicha desigualdad para sus cuadrados.

El enunciado anterior está hecho como a mi me gusta: con palabras y sin símbolos. Poniendo símbolos, lo que se dice en el enunciado es que:



Dados $a, b \in \mathbb{R}_o^+$ *para probar que* $a = b$ *es suficiente probar que* $a^2 = b^2$ *y para probar que* $a < b$ *es suficiente probar que* $a^2 < b^2$.

Todo lo dicho es consecuencia de que $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ y se tiene que $b+a > 0$.

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia de x al origen, 0, en la recta real. De manera más general:

$$|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ e } y$$

representa la longitud del segmento de extremos x e y.

1.9 Teorema (Propiedades del valor absoluto). *Para* $x, y \in \mathbb{R}$ *se verifica que:*

i) $|x| \leqslant y$ *es equivalente a* $-y \leqslant x \leqslant y$.

ii) $|x\,y| = |x||y|$.

iii) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ *y la igualdad se da si, y sólo si,* $xy \geqslant 0$ ***desigualdad triangular***.

iv) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ *y la igualdad se da si, y sólo si,* $xy \geqslant 0$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia inmediata de la definición de valor absoluto. Para probar *ii)*, *iii)* y *iv)* usaremos la estrategia (1.8).

ii) Tenemos que $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2$.

iii) Tenemos que

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = |x|^2+2xy+|y|^2 \leqslant |x|^2+2|xy|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2$$

La igualdad se da si, y sólo si, $xy = |xy|$, es decir, $xy \geqslant 0$.

iv) Tenemos que

$$||x| - |y||^2 = x^2 - 2|xy| + y^2 \leqslant x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = |x-y|^2$$

La igualdad se da si, y sólo si, $xy = |xy|$, es decir, $xy \geqslant 0$. □

Te recuerdo que debes leer de forma correcta las propiedades anteriores: no te fijes en las letras sino en los conceptos. La propiedad *ii)* debes leerla *"el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos"*. Por su parte, la desigualdad triangular dice dos cosas:

i) *El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos.*

ii) *El valor absoluto de una suma es igual a la suma de los valores absolutos si, y sólo si, todos los sumandos son positivos o todos todos los sumandos son negativos.*

1.2.4. Ejercicios propuestos

1. ¿Sabes por qué no se puede dividir por 0?

2. ¿Qué quiere decir que un número no es racional? Demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional.

3. Sabiendo que $a+b>c+d,\ a>b,\ c>d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a>c,\ a>d,\ b>c$ o $b>d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

4. Sea x un número real. Estudia si cada una de las desigualdades

$$x^2<x \quad \text{y} \quad x^3<x^2$$

es consecuencia de la otra.

5. Calcula para qué valores de x se verifican las desigualdades siguientes.

i) $\dfrac{2x-3}{x+2}<\dfrac{1}{3}$ ii) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}>0$

iii) $x^2-5x+9>x$ iv) $x^3(x-2)(x+3)^2<0$

v) $x^2-(a+b)x+ab<0$ vi) $3(x-a)a^2<x^3-a^3<3(x-a)x^2$

6. Prueba las siguientes desigualdades:

a) $0<x+y-xy<1$ siempre que $0<x<1,\ 0<y<1$.

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+b-x}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ siempre que $0<a<x<b$.

7. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a>0$ y $b>0$ se verifica que

$$\frac{a}{2(a+b)\sqrt{b}}<\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

8. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.

i) $|x-5|<|x+1|$ ii) $|x-1||x+2|=3$

iii) $|x^2-x|>1$ iv) $|x-y+z|=|x|-|z-y|$

v) $|x-1|+|x+1|<1$ vi) $|x+y+z|=|x+y|+|z|$

vii) $|x|-|y|=|x-y|$ viii) $|x+1|<|x+3|$

9. Supuesto que $\dfrac{s}{t}<\dfrac{u}{v}<\dfrac{x}{y}$ donde $t,v,y\in\mathbb{R}^+$, prueba que $\dfrac{s}{t}<\dfrac{s+u+x}{t+v+y}<\dfrac{x}{y}$. Generaliza este resultado.

10. Prueba cada una de las siguientes desigualdades y estudia, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

a) $2xy\leqslant x^2+y^2$.

b) $4xy\leqslant (x+y)^2$.

c) $x^2+xy+y^2\geqslant 0$.

d) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\geqslant 27abc$ donde $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Sugerencia. Para probar a) considérese $(x-y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de a).

11. Demuestra todos los apartados del teorema (1.4) y enúncialos con palabras.

12. Sean x e y números distintos de cero. Prueba que las igualdades

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad \sqrt{x^2+y^2} = x+y$$

son falsas.

13. Comprueba que $\left((x+1) - \frac{1}{2}(2x+1)\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}(2x+1)\right)^2$. Por tanto, extrayendo raíces cuadradas, se deduce que $(x+1) - \frac{1}{2}(2x+1) = x - \frac{1}{2}(2x+1)$, esto es $x = x+1$ y, por tanto, $0 = 1$. ¿Dónde está el error?

14. Calcula los números reales x que verifican cada una de las igualdades

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 2, \qquad \frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}$$

Comprueba las soluciones obtenidas.

15. Prueba que $|x| + |y| + |z| \leqslant |x+y-z| + |x-y+z| + |-x+y+z|$.

16. Prueba que si m es un números natural que no es el cuadrado de ningún número natural, es decir, $m \neq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\sqrt{m}$ es un número real no racional.

Sugerencia. Usa la descomposición de m en factores primos.

17. Justifica las siguientes afirmaciones.

a) La suma de un número racional y un número irracional es un número irracional.

b) El producto de un número racional no cero por un número irracional es un número irracional.

c) La suma y el producto de dos números irracionales puede ser racional o irracional.

d) Los números $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ y $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$ son irracionales.

1.2.5. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **1** ¿Sabes por qué no se puede dividir por 0?

Solución. Si se pudiera dividir por 0, es decir, si hubiera un número que fuera el inverso del 0, su producto por 0 habría de ser igual a 1, pero ya sabemos que al multiplicar por 0 el resultado es siempre 0. Conclusión: si se pudiera dividir por cero habría de ser $1 = 0$, lo cual es falso. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{2}$ ¿Qué quiere decir que un número no es racional? Demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional.

Solución. Que un número no es racional quiere decir que no puede escribirse como cociente de números enteros. Para probar que un número es irracional suele razonarse por contradicción: se supone que el número en cuestión es racional y se llega a una situación contradictoria. Una prueba clásica de que $\sqrt{2}$ es irracional es como sigue. Supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Entonces existirán números naturales m y n sin factores comunes, en particular m y n no podrán ser ambos pares, tales que $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$, esto es, $2n^2=m^2$. La igualdad $2n^2=m^2$ nos dice que m^2 es par lo cual implica que también tiene que serlo m. Así podemos escribir $m=2p$. Sustituyendo en la igualdad anterior y simplificando tenemos que $n^2=2p^2$, y de aquí se sigue, al igual que antes, que n tiene que ser par y ésta es la contradicción anunciada. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{3}$ Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2}<\dfrac{1}{3}$.

Solución. Claro está, $x\neq -2$ (recuerda, no se puede dividir por 0). Como al multiplicar una desigualdad por un número positivo la desigualdad se conserva, deducimos que si $x>-2$, la desigualdad dada equivale a $6x-9<x+2$, es decir, $x<11/5$. Luego para $-2<x<11/5$ la desigualdad es cierta. Veamos ahora qué pasa si $x<-2$. En tal caso, al multiplicar por $x+2<0$ la desigualdad equivale a $6x-9>x+2$, es decir, $x>11/5$ condición que no puede darse si $x+2<0$. En resumen, la desigualdad es cierta para $-2<x<11/5$.

Otra forma de proceder consiste en utilizar el hecho de que una desigualdad es equivalente a la obtenida al multiplicarla por una cantidad positiva. Multiplicando la desigualdad dada por $(x+2)^2$ obtenemos que dicha desigualdad equivale a la siguiente

$$(2x-3)(x+2)<\frac{1}{3}(x+2)^2$$

Haciendo las operaciones indicadas obtenemos que esta desigualdad es lo mismo que $5x^2-x-22<0$. Las soluciones de la ecuación $5x^2-x-22=0$ son $a=-2$ y $b=11/5$. Por tanto, $5x^2-x-22=5(x+2)(x-11/5)$. Resulta así que la desigualdad dada equivale a $(x+2)(x-11/5)<0$. Teniendo en cuenta que para que un producto de dos números sea negativo dichos números deben ser uno positivo y otro negativo, concluimos que debe ser $x+2>0$ y $x-11/5<0$, es decir $-2<x<11/5$ (la otra posibilidad $x+2<0$ y $x-11/5>0$ no puede darse). ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{4}$ Calcula para qué valores de x se verifica que

$$3(x-a)a^2<x^3-a^3<3(x-a)x^2$$

Solución. La desigualdad del enunciado equivale a las siguientes dos desigualdades:

$$x^3-a^3-3(x-a)a^2>0; \qquad x^3-a^3-3(x-a)x^2<0$$

Teniendo en cuenta que $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, resulta

$$x^3-a^3-3(x-a)a^2=(x-a)(x^2+ax-2a^2)=(x-a)^2(x+2a)$$

$$x^3 - a^3 - 3(x-a)x^2 = (x-a)(-2x^2 + ax + a^2) = -2(x-a)^2(x + a/2)$$

Deducimos que la desigualdad del enunciado se verifica si, y sólo si, $x \neq a$, $x + 2a > 0$, y $x + a/2 > 0$.

Si $a \geqslant 0$ entonces $x+2a \geqslant x+a/2$ y la desigualdad se cumple si, y sólo si, $x > -a/2$ y $x \neq a$.

Si $a < 0$ entonces $x+a/2 > x+2a$ y la desigualdad se cumple si, y sólo si, $x > -2a$. ☺

Ejercicio resuelto 5 Sabiendo que $a+b > c+d$, $a > b$, $c > d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a > c$, $a > d$, $b > c$ o $b > d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

Solución. Que las letras no te despisten: lo que te están diciendo es que si la suma de dos números distintos entre sí es mayor que la suma de otros dos números distintos entre sí, ¿es cierto, por ejemplo, que el mayor del primer par es más grande que el mayor del segundo par? Está claro que no tiene por qué ser así: los otros sumandos pueden compensar la diferencia. Por ejemplo $252 + 250 > 500 + 1$. Concluimos que no tiene por qué ser cierto que $a > c$ ni tampoco $b > c$. El ejemplo $500 + 2 > 251 + 250$ prueba que tampoco tiene por qué ser $b > d$. Intenta ahora buscar un ejemplo en el que no se cumpla que $a > d$ (pero no le dediques más de cinco minutos). ¿Ya? No lo habrás encontrado porque, si lo piensas un poco, verás que tiene que ser necesariamente $a > d$. Intenta *demostrarlo* (aunque tengas que dedicarle más de cinco minutos).

Lo primero que se le ocurre a uno es escribir $a > (c - b) + d$. Si $c - b$ *fuera siempre positivo* habríamos acabado (*y también habríamos demostrado más de lo que queremos*), pero no tiene por qué ser así, por ejemplo $9 + 8 > 2 + 1$. La *demostración directa* no parece viable. En estos casos tenemos que intentar un *camino indirecto*. Probemos que no puede ocurrir que $a \leqslant d$. Eso es fácil. Fíjate: si fuera $a \leqslant d$, como nos dicen que $b < a$ y $d < c$, también sería $b < d$ y $a < c$; pero entonces $a + b < c + d$ lo que es contrario a la hipótesis hecha. Luego concluimos que $a > d$. ☺

Ejercicio resuelto 6 Supuesto que $0 < a < x < b$, prueba que se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Solución. En este ejercicio no parece, en principio, cosa fácil deducir la desigualdad pedida de las hipótesis que nos dan. En estos casos puede intentarse *trabajar para atrás*, es decir, ir convirtiendo la desigualdad que nos piden probar en otras *equivalentes a ella* y más sencillas, hasta llegar a una que seamos capaces de deducir de la hipótesis que nos dan. Haciendo las operaciones indicadas, podemos escribir la desigualdad en la forma

$$\frac{a+b}{x(a+b-x)} < \frac{a+b}{a\,b}$$

y, como los denominadores son positivos, esto es lo mismo que

$$(a+b)a\,b < (a+b)x(a+b-x)$$

Como $a + b > 0$ esta desigualdad equivale a $ab < x(a + b - x)$, es decir:

$$0 < ax + bx - x^2 - ab = (x-a)(b-x)$$

Pero esta última desigualdad es consecuencia de que la hipótesis hecha, $0 < a < x < b$, la cual implica que $0 < x - a$ y $0 < b - x$. Y por tanto $(x-a)(b-x) > 0$.

Con esto podemos considerar que hemos acabado, pero es una buena costumbre dar ahora la vuelta al razonamiento que hemos seguido, es decir, deshacer el camino recorrido para obtener una prueba directa. ☺

Ejercicio resuelto 7 Discutir la validez de las igualdades:

a) $|x+y+z| = |x+y| + |z|$

b) $|x-5| < |x+1|$

Solución. a) En virtud de la desigualdad triangular, la igualdad del enunciado $|x+y+z| = |(x+y)+z| = |x+y| + |z|$, se da si, y sólo si, $(x+y)z \geqslant 0$.

b) En virtud de la estrategia (1.8), la desigualdad $|x-5| < |x+1|$ equivale a la desigualdad $|x-5|^2 < |x+1|^2$, es decir,

$$x^2 - 10x + 25 < x^2 + 2x + 1$$

o sea, $24 < 12x$, esto es, $x > 2$. Esto también puedes comprobarlo representando los números en una recta en la que fijas un origen y una unidad: se trata de ver cuándo x está más cerca de 5 que de -1. ☺

Ejercicio resuelto 8 Lo que sigue es una generalización del ejercicio propuesto (9).

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reales cualesquiera y $b_1, b_2 \dots, b_n$ números reales positivos. Sean m y M el menor y el mayor respectivamente de los números

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}.$$

Entonces, para $j = 1, 2, \dots, n$, se verifica que:

$$m \leqslant \frac{a_j}{b_j} \leqslant M, \ \text{ es decir, } \ mb_j \leqslant a_j \leqslant Mb_j$$

y sumando estas desigualdades:

$$m\sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant M\sum_{j=1}^{n} b_j,$$

de donde se sigue que:

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant M.$$

☺

Ejercicio resuelto 9 Prueba cada una de las siguientes desigualdades y estudia, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

i) $2xy \leqslant x^2 + y^2$.

ii) $4xy \leqslant (x+y)^2$.

iii) $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$.

iv) $(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 27abc$ donde $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

v) $abc \leqslant 1$ donde $a > 0, b > 0, c > 0$ verifican $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = 8$.

Sugerencia: para probar i) considérese $(x - y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de i).

Solución.

i) y ii) Siguiendo la sugerencia, que para eso nos la dan, tenemos que

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0$$

de donde se deduce que $2x\,y \leqslant x^2 + y^2$, y la igualdad ocurre si, y sólo si, $x = y$. Si sumas $2xy$ a ambos lados de la desigualdad $2x\,y \leqslant x^2 + y^2$, obtienes que $4x\,y \leqslant (x + y)^2$, y la igualdad ocurre si, y sólo si, $x = y$.

iii) Cambiando x por $-x$ en $2x\,y \leqslant x^2 + y^2$ resulta $2x\,y \geqslant -(x^2 + y^2)$. Por tanto

$$x^2 + x\,y + y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

De donde se deduce que $x^2 + x\,y + y^2 \geqslant 0$ y la igualdad se da si, y sólo si, $x = y = 0$.

iv) Probaremos ahora la desigualdad $(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 27abc$ donde se supone que $a > 0, b > 0, c > 0$. Lo primero que se observa es la completa *simetría* de la desigualdad propuesta. Puesto que lo único que sabemos de a, b y c es que son positivos, parece razonable pensar que si la desigualdad que nos dan es cierta es porque $x^2 + x + 1 \geqslant 3x$ cualquiera sea $x > 0$, es decir, $x^2 + 1 \geqslant 2x$, o lo que es igual $(x - 1)^2 \geqslant 0$; lo que es cierto (para *todo*número x) y la igualdad se da si, y solo si $x = 1$. Sustituyendo ahora en $x^2 + x + 1 \geqslant 3x$, $x = a$, $x = b$, $x = c$ y *multiplicando* miembro a miembro las tres desigualdades resultantes, obtenemos que

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 27abc$$

y la igualdad se da si, y sólo si, $a = b = c = 1$. ¿Dónde hemos usado que los números a, b y c son positivos?

v) La última desigualdad propuesta también llama la atención por su *simetría*. Usando otra vez que $0 \leqslant (x - 1)^2$, se sigue que $2x \leqslant 1 + x^2$. Ahora sustituyes x por a, b y c, multiplicas miembro a miembro las desigualdades obtenidas y has acabado. ☺

Fíjate cuánto partido hemos sacado de la desigualdad elemental $(x - y)^2 \geqslant 0$.

Ejercicio resuelto **10** Prueba que el número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Solución. Para hacer el ejercicio propuesto (17) hay que tener en cuenta que cuando se efectúan *operaciones racionales* (suma, producto y cociente) sobre uno o varios números racionales volvemos a obtener un número racional. En consecuencia, si realizando con un número real α y con otros números *racionales* operaciones racionales obtenemos un número irracional, podemos afirmar que el número α es irracional.

Por ejemplo, $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional pues $\dfrac{\alpha^2 - 5}{2} = \sqrt{6}$. ☺

1.3. Principio de inducción matemática

El *Principio de inducción matemática* es un método que se usa para probar que ciertas propiedades matemáticas se verifican para todo número natural. Considera, por ejemplo, la siguiente igualdad en la que $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{1.4}$$

Si le damos a n un valor, por ejemplo $n = 8$, podemos comprobar fácilmente que la igualdad correspondiente es cierta. Si le damos a n el valor 1000 ya no es tan fácil comprobar esa igualdad y se le damos a n el valor 10^{1000} la cosa ya se pone realmente difícil. Pero nosotros queremos aún más, no nos conformamos con probar que esa igualdad es cierta para unos cuantos miles o millones de valores de n; no, queremos probar que es válida para *todo número natural* n. En estos casos es el *Principio de inducción matemática* el que viene en nuestra ayuda para salvarnos del apuro. Para nosotros el principio de inducción matemática es algo que aceptamos, es decir, puedes considerarlo como un axioma de la teoría que estamos desarrollando (aunque su formulación lo hace "casi evidente").

Principio de inducción matemática. Sea A un conjunto de números naturales, $A \subset \mathbb{N}$, y supongamos que:

i) $1 \in A$

ii) Siempre que un número n está en A se verifica que $n+1$ también está en A.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

El Principio de Inducción Matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

B) Comprobamos que *si* un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que *si* $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

Si ahora definimos el conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es cierta}\}$, entonces el punto A) nos dice que $1 \in M$, y el punto B) nos dice que siempre que n está en M se verifica que $n+1$ también está en M. Concluimos, por el principio de inducción, que $M = \mathbb{N}$, o sea, que $P(n)$ es cierta para todo número natural n.

Observa que en B) no se dice que se tenga que probar que $P(n)$ es cierta, sino que hay que *demostrar la implicación lógica* $P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Para demostrar dicha implicación lo que hacemos es *suponer* que $P(n)$ es cierta. Es por eso que suele llamarse a $P(n)$ la *hipótesis de inducción*.

Puedes imaginar el principio de inducción de la siguiente forma. Considera que cada número natural lo representamos por una ficha de dominó y las colocamos en una fila recta interminable. Seguidamente empujamos a la primera ficha sobre la siguiente (esto es el punto A)

anterior: cae la primera ficha). ¿Caerán todas? Para eso debemos de estar seguros de que siempre que cae una ficha tira a la que le sigue, es decir que la distancia entre dos fichas cualesquiera es menor que la longitud de una ficha (esto es el punto B) anterior: si cae la ficha n también cae la $n+1$). Cuando esto es así podemos asegurar que caerán todas las fichas. Probemos, como ejemplo, la igualdad (1.4).

1.10 Ejemplo. Para todo número natural $n\in\mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Demostración. Para $n=1$ la igualdad se reduce a $1=1$ que, evidentemente, es cierta. Acaba de caer la primera ficha del dominó. Supongamos que dicha igualdad se verifica para un número $n\in\mathbb{N}$ (acaba de caer la ficha n del dominó) y probemos que en tal caso también se verifica para $n+1$ (hay que probar que al caer la ficha n tira a la ficha $n+1$). Que la ficha n cae quiere decir que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{1.5}$$

Para que al caer la ficha n también caiga la ficha $n+1$, deberemos probar que de la igualdad anterior se deduce la siguiente igualdad.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) \tag{1.6}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \text{por (1.5)} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 = \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big) = \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) = \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

Que es justamente la igualdad (1.6). Concluimos, en virtud del principio de inducción, que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n\in\mathbb{N}$. ♦

La demostración del siguiente lema es otro ejemplo del principio de inducción.

1.11 Lema. *Si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n. Y la suma es igual a n si, y sólo si, todos ellos son iguales a 1.*

Demostración. Para cada número natural n, sea $P(n)$ la proposición *"si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n"*. Demostraremos por inducción que $P(n)$ es verdadera para todo $n\in\mathbb{N}$. Trivialmente $P(1)$ es verdadera. Supongamos que $P(n)$ es verdadera. Consideremos $n+1$ números positivos no todos iguales a 1 cuyo producto sea igual a 1. En tal caso alguno de dichos números, llamémosle x_1, tiene que ser menor que 1 y otro, al que llamaremos x_2, tiene que ser mayor que 1. Notando $x_3,\cdots,x_{n+1}$ los restantes números se tiene que:

$$(x_1x_2)x_3\cdots x_{n+1}=1$$

Por tanto $x_1x_2,\, x_3, \cdots, x_{n+1}$ son n números positivos con producto igual a 1 por lo que:

$$x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geqslant n \tag{1.7}$$

Como $0 < (1 - x_1)(x_2 - 1)$, tenemos que:

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2 \tag{1.8}$$

De (1.71) y (1.8) se sigue que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} > n + 1$$

Observa que la desigualdad obtenida es estricta. Hemos probado así que $P(n+1)$ es verdadera. Concluimos, por el principio de inducción, que la afirmación del enunciado es verdadera para todo número natural n. $\square$

Notación. Dados n números $a_1, a_2, \cdots, a_n$ representamos la suma de todos ellos por $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$ y el producto de todos ellos por $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} a_j$.

En el siguiente teorema se establece una de las desigualdades más útiles del Cálculo.

1.12 Teorema (Desigualdad de las medias). *Cualesquiera sean los números positivos* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *se verifica que:*

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{1.9}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demostración. Basta poner $G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ y $x_i = \dfrac{a_i}{G}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, Claramente se verifica que $x_1x_2\cdots x_n = 1$ por lo que, en virtud del lema anterior, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n$ es decir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant nG$ que es la desigualdad que queremos probar. Se da la igualdad solamente cuando $x_i = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, es decir, cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. $\square$

Los números $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ y $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ se llaman, respectivamente, *medias geométrica y aritmética* de $a_1, a_2, \cdots, a_n$. La desigualdad de las medias tiene interesantes aplicaciones a problemas de extremos. Una útil consecuencia de ella se expone a continuación.

1.13 Corolario. *Sean* f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *funciones positivas definidas en un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y supongamos que en un punto* $a \in A$ *se verifica que* $f_1(a) = f_2(a) = \cdots = f_n(a)$.

i) Si el producto de las funciones es constante, se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \qquad \textit{para todo } x \in A.$$

ii) Si la suma de las funciones es constante, se verifica que:

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(x) \leqslant \prod_{i=1}^{n} f_i(a) \qquad \textit{para todo } x \in A.$$

Demostración. Lo afirmado en i) y ii) es consecuencia directa de que, para todo $x \in A$ se verifica

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f_i(x)} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)}{n}$$

y se da la igualdad si, y sólo si, los números $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ son todos iguales. □

¿Has leído correctamente el corolario anterior? Te voy a ayudar. Lo que dice es lo siguiente.

i) La suma de funciones positivas cuyo producto es constante alcanza su valor mínimo en cualquier punto en el que dichas funciones sean todas iguales.

ii) El producto de funciones positivas cuya suma es constante alcanza su valor máximo en cualquier punto en el que dichas funciones sean todas iguales.

El principio de inducción matemática puede aplicarse en muchas situaciones en las que, a primera vista, no aparecen para nada los números naturales. Por ejemplo, una proposición referente a todos los polinomios podría probarse por inducción sobre el grado del polinomio. Un teorema sobre matrices cuadradas podría probarse por inducción sobre el orden de la matriz.

Probaremos a continuación una útil igualdad algebraica conocida como *fórmula del binomio de Newton*. Para establecer esta igualdad necesitamos definir los llamados *coeficientes binómicos*. Dados dos números enteros $n \geqslant k \geqslant 0$ se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{donde} \quad n! = \prod_{p=1}^{n} p$$

Es decir, $n!$ es el producto de todos los números naturales menores o iguales que n. Se define también $0! = 1$. La igualdad

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{1.10}$$

es de comprobación inmediata. A partir de ella se prueba fácilmente, por inducción sobre n, que $\binom{n}{k}$ es un número entero positivo.

1.14 Teorema (Fórmula del binomio de Newton). *Cualesquiera sean los números reales a, b y el número natural n se verifica que:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Demostración. Para $n = 1$ la igualdad del enunciado es trivialmente verdadera. Supongamos que dicha igualdad se verifica para $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}$$

Lo que prueba la validez de la igualdad para $n + 1$. En virtud del principio de inducción, concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. □

La inducción matemática es un proceso demostrativo

Considera la expresión $991n^2 + 1$. Con un ordenador puedes comprobar que si evalúas esta expresión para $n = 1, 2, 3, \dots, 1000, \dots, 100000$ los valores obtenidos no son cuadrados perfectos. ¿Debemos concluir que *para todo número natural* n se verifica que $991n^2 + 1$ no es un cuadrado perfecto? Pues no. Entre los números de la forma $991n^2 + 1$ hay cuadrados perfectos... ¡el valor mínimo de n para el cual $991n^2 + 1$ es un cuadrado es el número $n = 12055735790331359447442538767$!

Con eso te indico que hay que ser precavido: no basta comprobar la veracidad de una expresión para unos cuantos valores de n para concluir que dicha expresión es cierta para todo n. La historia de las matemáticas está llena de este tipo de errores.

1.3.1. Ejercicios propuestos

18. Prueba, usando el principio de inducción, que las siguientes afirmaciones son ciertas para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) $3^n - 1$ es divisible por 2.

b) $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6.

c) $3^{2n} - 1$ es múltiplo de 8.

d) $n^5 - n$ es divisible por 5.

e) $n^3 - n + 1$ no es divisible por 3.

19. Dado un número $x \neq 1$, prueba por inducción la fórmula para la suma de una progresión geométrica:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Deduce directamente este mismo resultado poniendo $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, multiplicando S por x y despejando S entre las dos igualdades obtenidas.

20. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

21. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifican las desigualdades siguientes.

a) $\sqrt{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$

b) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$

c) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+3n}}$

22. Demuestra que cualquier conjunto de número reales, con un número finito de elementos, tiene máximo y mínimo.

23. Demuestra que si la igualdad

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 2$$

es verdadera para un número natural $n \geqslant 2$ también lo es para $n - 1$. Sin embargo, esta igualdad no es válida para $n = 1$. ¿Qué deduces de esto?

24. Prueba que, usando solamente dos colores, es posible colorear todas las regiones que se forman al trazar n circunferencias en el plano de forma que regiones adyacentes tengan distinto color. Se entiende que dos regiones son adyacentes cuando tienen un arco de circunferencia como frontera común.

Sugerencia. Puede hacerse razonando por inducción sobre n. También hay otra forma de hacerlo directamente muy sencilla e ingeniosa.

25. Vamos a probar que todas las niñas tienen los ojos del mismo color. Para ello vamos a usar el principio de inducción para probar que la afirmación siguiente:

> $P(n)$ = *En todo grupo de n niñas todas las niñas del grupo tienen igual color de ojos*

es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

A) En un conjunto formado por *una única* niña, es evidente que todas las niñas de dicho conjunto tienen el mismo color de ojos. Por tanto $P(n)$ es cierta para $n = 1$

B) Supongamos que $P(n)$ es cierta, es decir que para todo conjunto formado por n niñas se verifica que todas las niñas del conjunto tienen el mismo color de ojos.

Consideremos ahora un conjunto formado por $n+1$ niñas. Quitamos una niña del conjunto y nos queda un conjunto formado por n niñas, las cuales, por la hipótesis de inducción, tienen el mismo color de ojos. Ahora devolvemos al conjunto la niña que habíamos sacado y sacamos otra. Volvemos a razonar como antes y deducimos que la niña que habíamos sacado también tiene el mismo color de ojos que las demás n niñas del conjunto. Por tanto las $n+1$ niñas tienen todas ellas igual color de ojos. Como hay una niña con ojos azules, deducimos que todas las niñas tienen ojos azules.

¿Dónde está el error en este razonamiento?

26. En un circuito circular hay n coches iguales. Entre todos ellos tienen justamente la gasolina que necesita un coche para recorrer una vez el circuito completo. Prueba que alguno de los n coches puede recorrer el circuito completo.

Sugerencia. Razona por inducción. Observa que no sabemos en qué lugar del circuito están situados los coches.

27. Prueba que para todo número natural $n>1$ se verifican las desigualdades siguientes.

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)<n^n; \qquad n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Sugerencia: Usa la desigualdad de las medias.

28. Dados n números positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ prueba las siguientes desigualdades.

i) $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1}\geqslant n$;

ii) $\dfrac{n}{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$;

iii) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$.

¿Cuándo las desigualdades anteriores son igualdades?

Sugerencia: Usa la desigualdad de las medias.

29. Sean a, b números positivos distintos y $n\in\mathbb{N}$. Utiliza la desigualdad de las medias para probar que:

$$ab^n<\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Deduce que para todo número natural n se verifica que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ y } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Los siguientes ejercicios pueden hacerse usando la desigualdad de las medias o bien el corolario (1.13).

30. Prueba que el cuadrado es el rectángulo de máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

31. Prueba que el cubo es el ortoedro de máximo volumen para una superficie lateral dada y de mínima superficie lateral para un volumen dado.

32. Prueba que el triángulo equilátero es el triángulo que tiene máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

Sugerencia. Si a, b, c son las longitudes de los lados y $p = (a + b + c)/2$ es el semiperímetro, entonces, según la fórmula de Heron de Alejandría, el área, A, viene dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

33. Calcula el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > 0$, $b > 0$.

34. Calcula el ortoedro de mayor volumen inscrito en el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

35. Calcula la distancia mínima del origen a la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $xyz = 27$. En otras palabras, si $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 27\}$, lo que se pide es calcular el mínimo del conjunto de números reales $C = \{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : (x, y, z) \in E\}$.

1.3.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **11** Sean a, b números positivos distintos y $n \in \mathbb{N}$. Utiliza la desigualdad de las medias para probar que:

$$ab^n < \left(\frac{a + nb}{n + 1}\right)^{n+1} \tag{1.11}$$

Deduce que para todo número natural n se verifica que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ y } \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{1.12}$$

Solución. La desigualdad (1.11) se deduce de la desigualdad de las medias

$$\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n + 1}$$

haciendo $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b$, $a_{n+1} = a$ y elevando a la potencia $n + 1$.

Haciendo ahora $a = 1$ y $b = 1 + \dfrac{1}{n}$ en (1.11) se obtiene la primera desigualdad de (1.12). Finalmente, sustituyendo en (1.11) n por $n+1$ $a = 1$ y $b = 1 - \dfrac{1}{n}$, se obtiene la segunda desigualdad de (1.12). ☺

Ejercicio resuelto 12 Prueba que el cubo es el ortoedro de máximo volumen para una superficie lateral dada y de mínima superficie lateral para un volumen dado.

Solución. El volumen de un ortoedro cuyas aristas tienen longitudes a, b, c viene dado por $V = abc$ y su superficie lateral por $S = 2(ab + bc + ca)$. Puesto que

$$\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} \leqslant \frac{ab + bc + ca}{3} \qquad (1)$$

o, lo que es igual, $\sqrt[3]{V^2} \leqslant S/6$, deducimos que para un volumen dado, V, la superficie lateral S es mínima cuando tengamos que $S/6 = \sqrt[3]{V^2}$, es decir que en (1) se de la igualdad lo que ocurre si, y sólo si, $a = b = c$ (el ortoedro es un cubo).

Análogamente, para un valor dado de la superficie lateral, S, tendremos que V es máximo cuando $\sqrt[3]{V^2} = S/6$, lo que, según acabamos de ver, sólo ocurre cuando el ortoedro es un cubo. ☺

Ejercicio resuelto 13 Calcula el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > 0$, $b > 0$.

Solución. Sean (α, β) las coordenadas del vértice del rectángulo situado en el cuadrante positivo del plano ($\alpha > 0$, $\beta > 0$). El área del rectángulo es igual a $4\alpha\beta$. El problema, pues, consiste en hallar el máximo del producto $\alpha\beta$ cuando α y β verifican que

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Supuesto que α y β satisfacen (1), en virtud de la desigualdad de las medias, tenemos que

$$\alpha\,\beta = \sqrt{\alpha^2\beta^2} = ab\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}\frac{\beta^2}{b^2}} \leqslant \frac{ab}{2} \qquad (2)$$

La igualdad en (2) se da si, y sólo si, $\dfrac{\alpha^2}{a^2} = \dfrac{\beta^2}{b^2}$, lo que junto con (1) equivale a que $\dfrac{\alpha^2}{a^2} = \dfrac{\beta^2}{b^2} = \dfrac{1}{2}$, es decir, $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. Por tanto el máximo valor del área de un rectángulo inscrito en la elipse es $2ab$. ☺

Ejercicio resuelto 14 Calcula la distancia mínima del origen a la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $xyz = 27$. En otras palabras, si $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 27\}$, lo que se pide es calcular el mínimo del conjunto de números reales $C = \left\{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : (x, y, z) \in E\right\}$.

Solución. Para todo $(x, y, z) \in E$ se verifica que

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3\sqrt[3]{(27)^2} = 27$$

Puesto que $(3, 3, 3) \in E$ y $\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27}$, deducimos que $\min(C) = \sqrt{27}$. ☺

1.4. Complementos

1.4.1. Números y medida de magnitudes. Segmentos inconmensurables.

Estamos tan acostumbrados a *contar* que cuesta trabajo imaginar un mundo sin números. Pero así fue, no creo que nadie lo dude, durante muchísimo tiempo. Incluso en nuestros días se tienen noticias de tribus aisladas que no saben contar más allá de cuatro o cinco objetos; cuando tienen que referirse a una cantidad mayor emplean una expresión que quiere decir "muchos". Es frecuente también que en los lenguajes primitivos se utilicen palabras distintas para designar números iguales cuando éstos se refieren a diferentes clases de objetos. Poco a poco, conforme los primitivos grupos tribales fueron organizándose en sociedades cada vez más complejas, los hombres fueron capaces de abstraer el proceso de contar colecciones concretas de objetos elaborando así el concepto de "número abstracto"... !Que a nosotros nos parece tan *natural*!

Una vez que los hombres aprendieron a contar objetos, el paso siguiente fue usar los números para *medir magnitudes* tales como longitudes, superficies, volúmenes o tiempos. Este proceso requiere bastante ingenio. Consideremos, para fijar ideas, que queremos *expresar numéricamente* la longitud de un segmento de recta $\overline{AB}$. Lo primero que hay que hacer es elegir una *unidad de medida* que será otro segmento $\overline{OU}$ y comparar ambos. Puede ocurrir que $\overline{AB}$ contenga un número exacto, m, de veces a $\overline{OU}$. En tal caso podemos escribir simbólicamente $\overline{AB}=m\,\overline{OU}$. El número m representa entonces la *medida* de $\overline{AB}$ respecto de $\overline{OU}$. Lo más frecuente, no obstante, es que $\overline{OU}$ no esté contenido un número exacto de veces en $\overline{AB}$. En tal caso podemos dividir $\overline{OU}$ en un cierto número, n, de partes iguales con la esperanza de que, al tomar como nueva unidad de medida una de estas partes, $\overline{OU'}$, resulte que $\overline{AB}$ contenga un número exacto, m, de veces a $\overline{OU'}$. Cuando esto es así se dice que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{OU}$ son *conmensurables*. Esto quiere decir que admiten una unidad de medida común: el segmento $\overline{OU'}$. Podemos escribir $\overline{AB} = m\,\overline{OU'}$. Por otra parte $\overline{OU} = n\,\overline{OU'}$. Podemos ahora usar los números m, n para hacernos una idea de cómo es $\overline{AB}$ comparado con $\overline{OU}$; esto es lo que se expresa diciendo que *la razón de* $\overline{AB}$ *respecto de* $\overline{OU}$ *es* $m : n$ (léase m sobre n). Con el paso del tiempo el símbolo $m : n$ que, en sus orígenes, como acabamos de explicar, representaba la razón de (las longitudes) de dos segmentos quedó desprovisto de su significado original y pasó a ser considerado simplemente como un *número* naciendo de esta forma los números *racionales* (cuyo nombre alude, precisamente, a que tales números representan *razones* de segmentos conmensurables).

Volviendo a la situación antes descrita, parece intuitivo que, cualquiera sea el segmento $\overline{AB}$, dividiendo $\overline{OU}$ en un número, n, *suficientemente grande* de partes iguales, podemos conseguir que la nueva unidad de medida, $\overline{OU'}$, esté efectivamente contenida un número exacto de veces en $\overline{AB}$. En otras palabras, parece que dos segmentos cualesquiera deben ser conmensurables. Pues bien, la intuición aquí nos engaña, y ese fue el extraordinario descubrimiento que realizaron los pitagóricos, probando que la diagonal de un cuadrado no es conmensurable con el lado. En efecto, si $\overline{OU}$ es el lado y $\overline{AB}$ la diagonal, y suponemos que ambos admiten una unidad de medida común $\overline{OU'}$, tendremos que $\overline{OU} = n\,\overline{OU'}$, y $\overline{AB} = m\,\overline{OU'}$ para convenientes números naturales m, n. Pero, en virtud del teorema de Pitágoras, $2(\overline{OU})^2 = (\overline{AB})^2$, y deducimos que $2n^2(\overline{OU'})^2 = m^2(\overline{OU'})^2$, por lo que debe ser $2n^2 = m^2$. Veamos que esto lleva a una contradicción. Podemos suponer que m y n no tienen factores comunes (si los tuvieran se los quitamos) y, en particular, m y n *no son ambos pares*. La igualdad $2n^2 = m^2$

nos dice que m^2 es par lo cual implica que también tiene que serlo m. Así podemos escribir $m = 2p$. Sustituyendo en la igualdad anterior y simplificando tenemos que $n^2 = 2p^2$, y de aquí se sigue, al igual que antes, que n tiene que ser par y ésta es la contradicción anunciada.

Podemos dar la siguiente interpretación a lo antes visto. Si consideramos los números racionales puestos sobre una recta, en la cual se han fijado el 0 y el 1, y con un compás centrado en el origen trazamos un círculo de radio igual a la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado unidad, dicho círculo corta a la recta en un punto de la misma que no es racional. En otras palabras "en la recta racional hay huecos".

A la vista de este sorprendente resultado y puesto que, *claramente debe haber algún número* que represente la medida de la diagonal con respecto al lado de un cuadrado, podemos decir que dicho "número" no puede ser racional y, en consecuencia, *los números racionales no son suficientes para medir magnitudes*. Aparece así la necesidad de ampliar el concepto de número. Pues bien, ¡se necesitaron casi 2.500 años para llevar a cabo esa tarea de forma satisfactoria! Los nuevos números se llamaron *irracionales* porque no representan *razones* de segmentos conmensurables, y una teoría satisfactoria de ellos fue desarrollada por los matemáticos Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916). Los números racionales junto con los irracionales se llaman, indistintamente, *números reales*.

1.4.1.1. La razón áurea y el pentagrama

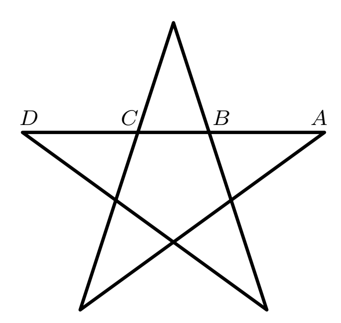


Figura 1.1. El pentagrama pitagórico

Aunque suele usarse el teorema de Pitágoras para probar la existencia de magnitudes inconmensurables, parece ser que fue un pitagórico, Hipaso de Metaponto, quien en el siglo V a.C., al estudiar las propiedades geométricas del pentagrama (ver fig.1.1), descubrió la existencia de los números irracionales. Para los pitagóricos el pentagrama era un símbolo de la "perfección matemática" del Universo y, paradójicamente, en el pentagrama se escondía la prueba de que los números racionales no eran suficientes, como los pitagóricos creían, para describirlo. Las razones de los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ son todas ellas iguales a la *razón áurea*.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Como dicho número es irracional, los segmentos considerados son inconmensurables. El número $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es uno de los más famosos de las Matemáticas. Si en *Google* buscas "razón áurea" te saldrán más de cien mil páginas. Eso en español, porque si buscas en inglés "golden section" obtendrás casi cuatro millones de páginas. El poeta Rafael Alberti dedicó un hermoso soneto a la "razón áurea".

A la divina proporción

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera trasparente.
A ti, divina proporción de oro.
R. Alberti

Volviendo a los pitagóricos, ellos pensaban que el número era el fundamento último de toda realidad. Hoy vivimos en un mundo digitalizado: la música que escuchas, las películas que ves, la televisión digital y tantas más cosas de uso cotidiano son, en su esencia, números. Parece que los pitagóricos no estaban del todo equivocados.

Pitágoras, junto con su maestro Tales de Mileto, y también Anaximandro y Anáximenes, sin olvidar a Demócrito y algunos más de los que queda memoria y que tú mismo puedes consultar en *Wikipedia*, todos ellos eran matemáticos y filósofos. ¿Casualidad? Ni mucho menos. Lo que hoy llamamos *Cultura Occidental* nace de una gran blasfemia, a saber, la afirmación de que la realidad puede ser comprendida y explicada racionalmente. Frente a los relatos mitológicos y a los caprichosos dioses imprevisibles, la afirmación insolente de que la inteligencia humana puede desentrañar por sus propios medios el funcionamiento del Universo. Y ¿qué produce la inteligencia humana cuando empieza a indagar sobre la Naturaleza? Matemáticas y Filosofía. Las Matemáticas, por su propia naturaleza, tienen un campo mucho más restringido que el de la Filosofía pero, en cambio, son extraordinariamente eficaces. La palabra griega $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$, que se lee *mathema*, significa *conocimiento*.

> *El Libro del Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.* Galileo Galilei

1.4.1.2. Medimos con números racionales

Acabamos de ver que hay segmentos inconmensurables; es decir, elegida una unidad para medir, hay medidas que no pueden expresarse con números racionales. Pero la intuición nos dice que a cada medida debe corresponder un único número. En consecuencia, tenemos que admitir la necesidad de otros números, además de los racionales, para lograr que a cada medida le corresponda un número. Estos son los números irracionales (sobre los que falta por decir

algo importante como veremos más adelante). Debes darte cuenta de que se trata de una necesidad teórica: en el mundo real de cada día solamente hay números racionales. Los ordenadores trabajan con números racionales (otra cosa diferente es que puedan representar simbólicamente números irracionales). ¿Quiere esto decir que podríamos prescindir de los números irracionales? En absoluto. Por muchas razones. En primer lugar, los números racionales e irracionales juntos proporcionan la estructura básica del Análisis Matemático: el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Dicha estructura es el soporte de las herramientas del cálculo diferencial e integral y de la teoría de Ecuaciones Diferenciales. La demostración de la existencia de soluciones de muchos problemas y la construcción de técnicas eficaces para obtener dichas soluciones, ya sea de forma exacta o con aproximación tan buena como se desee, se fundamenta en las propiedades matemáticas de $\mathbb{R}$. Aunque un ingeniero exprese los resultados de sus cálculos mediante números racionales, escritos usualmente en forma decimal, para realizar los cálculos habrá tenido que usar herramientas (derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales,...) que no tendrían sentido sin los números reales. En fin, sin $\mathbb{R}$ ni siquiera podríamos demostrar que hay un número cuyo cuadrado es igual a 2.

Lo anterior tiene una enseñanza: las Matemáticas elaboran, a partir de la observación de la realidad, estructuras ideales que pueden parecer muy lejanas de la realidad que las motivó inicialmente, pero que son herramientas muy útiles para obtener información y resultados sobre ésa realidad que de otra forma no podrían obtenerse ni siquiera plantearse.

1.4.2. Hacer matemáticas

En este Capítulo hemos hablado de axiomas, deducción lógica, demostraciones, teoremas,... . Espero que ya tengas una idea de lo que significa la afirmación "las Matemáticas son una ciencia deductiva", porque ese es uno de los objetivos que me propuse al escribir este Capítulo. Pero no quiero que pienses que las Matemáticas se reducen a un formalismo axiomático lógico – deductivo. Esa es solamente una parte, y quizás no la más atractiva, de las Matemáticas. Las teorías matemáticas antes de llegar a esa "helada perfección axiomática" se desarrollan de una forma no muy diferente a las demás ciencias: por aproximaciones sucesivas, experimentación, intuiciones, analogías,... . Por eso hay que distinguir entre la "Matemática hecha" y la "Matemática que se está haciendo". La primera quizás puede vivir en el universo platónico de las ideas puras, pero la segunda "está contaminada de realidad" y constituye una actividad profundamente humana en la que se avanza tanteando, cometiendo errores,... como en las demás ciencias. He tomado prestada una frase del historiador de las Matemáticas W. S. Anglin porque expresa muy bien lo que quiero decirte. Dice así:

> *Las matemáticas no son un prudente recorrido por una autopista despejada, sino un viaje a lo salvaje y a lo desconocido, en el cual los exploradores se pierden a menudo. El rigor, la perfección lógico-deductiva, es una señal de que los mapas ya han sido trazados, y de que los auténticos exploradores se han ido a alguna otra parte.*

El reconocido matemático Paul R Halmos, expresa la misma idea como sigue.

> *Las matemáticas no son una ciencia deductiva: eso es un tópico. Cuando se trata de probar un teorema, no se hace una lista con las hipótesis y luego se empieza a razonar. No, uno prueba, se equivoca, experimenta, conjetura ...*

Y también dice:

> *La razón de ser de un matemático no es otra que la de resolver y proponer problemas pues dicha actividad constituye el corazón de las matemáticas.*

La parte más atractiva de las Matemáticas es justamente el desafío intelectual que constituyen los problemas. Algunos problemas famosos tienen un enunciado muy sencillo. Por ejemplo, la conjetura de Collatz propone el siguiente juego. Elige a tu gusto un número $n \in \mathbb{N}$:

- Si el número n es par, se divide por 2 para obtener el número $m = n/2$.
- Si el número n es impar, se multiplica por 3 y se suma 1 para obtener el número $m = 3n + 1$.

Este proceso se repite seguidamente partiendo del número m obtenido y así sucesivamente. Por ejemplo, partiendo de $n = 61$ se obtienen los siguientes resultados:

$$\{61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$$

Una vez obtenido 1 como resultado se repite indefinidamente el grupo $\{4, 2, 1\}$. La conjetura es que siempre se acaba obteniendo 1. Con ayuda de ordenadores se ha comprobado que la conjetura es cierta para números más pequeños que $2^{58} = 288\,230\,376\,151\,711\,744$ ¡Pero eso no es una demostración matemática!

Otro problema del que no se sabe la respuesta es si hay infinitas parejas de primos gemelos. Se llaman primos gemelos a las parejas de números primos que se diferencian en dos unidades. Por ejemplo $(17, 19), (29, 31), (1000000000061, 1000000000063)$.

Resolver problemas es una actividad intelectual que puede tener mucho de juego. Quizás estés pensando “bueno, todo eso está muy bien, pero ¿cómo puedo participar yo en ese juego?” Bueno, se requiere alguna preparación y tiempo y seguramente tú ahora estás empezando, pero tienes una forma de participar en el juego que es hacer ejercicios. Es verdad que un ejercicio no es lo mismo que un problema. Los ejercicios son más mecánicos, con ellos se trata de que compruebes si has entendido correctamente los conceptos y los resultados teóricos y si eres capaz de usarlos en situaciones sencillas. Pero no dejan de ser un pequeño desafío. Si el ejercicio está ahí es porque tienes las herramientas para resolverlo. El tiempo que dediques a resolver ejercicios nunca será tiempo perdido. Incluso si no te salen, porque se puede aprender más de un ejercicio que no se logra resolver pero que se trabaja con interés, que de uno que se resuelve a primera vista. Resolver ejercicios junto con tus compañeros o consultarlos con tus profesores es una forma estupenda de estudiar. En mi página Web puedes leer algunas sugerencias respecto a la actitud apropiada y estrategias útiles para resolver ejercicios.

1.4.3. Algunas razones para estudiar matemáticas

Vivimos rodeados de matemáticas. Suelen pasar desapercibidas pero están ahí haciendo su trabajo. Tarjetas de crédito, códigos de barras, teléfonos móviles, animación gráfica, las modernas técnicas de radiodiagnóstico..., detrás de todo eso hay herramientas matemáticas que hacen posible su funcionamiento. No hay duda de que las Matemáticas son extraordinariamente eficaces. Ese llamativo acuerdo de las Matemáticas con el mundo real no deja de resultar bastante sorprendente.

> *El milagro de la adecuación del lenguaje de la Matemática para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos.*
> E.P. Wigner, Premio Nobel de Física 1972

Dos matemáticos John Von Neumann y Alan Mathison Turing fueron los creadores de los modernos computadores y los fundadores de la Ciencia de la Computación. Algunas de las teorías matemáticas más abstractas, como la Teoría de Números o la de Categorías han encontrado aplicaciones para el desarrollo de software. Las Matemáticas son el lenguaje de las Ciencias Físicas (Física, Astronomía, Química,...) pero también, cada vez más, de las Ciencias Biológicas y Médicas y de las Ciencias Sociales (Economía, Geografía, Psicología,...). Las Matemáticas aportan a todas estas Ciencias sus propios métodos, a saber:

- Definiciones precisas.
- Razonamientos rigurosos.
- Métodos de representación simbólica.
- Formulación correcta de problemas.
- Modelos matemáticos para manejar situaciones muy complejas.
- Una gran variedad de técnicas (estadísticas, de cálculo, algebraicas, simbólicas,...) para la resolución de problemas y toma de decisiones.

Por todo ello, no es exagerado afirmar que un científico debe estar familiarizado con la forma de pensar matemática. Pero incluso para quienes no se sienten especialmente atraídos por la actividad científica, el estudio de las Matemáticas está especialmente indicado para desarrollar determinadas facultades entre las que cabe destacar:

- Capacidad de razonamiento lógico-deductivo.
- Capacidad de resolución de problemas.
- Reconocer razonamientos incorrectos.
- Capacidad de abstracción para manejar situaciones complejas.
- Capacidad para reconocer modelos similares en estructuras diversas.
- Seleccionar, ordenar la información y elegir la herramienta adecuada en cada caso.

Hoy día, casi tan preciso como saber leer, es tener una formación matemática suficientemente amplia para no sentirse extraño en un mundo al que las innovaciones tecnológicas y el desarrollo científico están cambiando rápidamente.

El estudio de las Matemáticas también puede respaldarse por razones de tipo cultural y estético. Las Matemáticas son, junto con la música sinfónica y la novela, una de las señas de identidad de la Cultura Occidental. Pero hay una última razón: las sociedades democráticas necesitan ciudadanos capaces de pensar con libertad y las Matemáticas, una de las creaciones más libres del espíritu humano, son una herramienta indicada para ello.

> *No hay modo de entender bien al hombre si no se repara en que la Matemática brota de la misma raíz que la poesía, del don imaginativo.* José Ortega y Gasset

1.4.4. Lo que debes haber aprendido en este Capítulo. Lecturas adicionales

En este Capítulo debes haber aprendido algunas cosas que resumo en la siguiente lista cuya lectura puede servirte de repaso para comprobar lo que sabes.

- Debes saber lo que significa demostrar $H \longrightarrow T$.
- Debes saber lo que significa decir que las Matemáticas son una ciencia deductiva.
- Debes saber que en Matemáticas las cosas no son verdad porque lo diga tu profesor.
- Debes tener una idea de lo que es una teoría axiomática y la forma en que se desarrolla.
- Debes saber lo que son magnitudes inconmensurables y cómo aparecen los números irracionales.
- Debes saber cómo se deben leer las Matemáticas.
- Debes haber aprendido y recordar de memoria los axiomas algebraicos y de orden de $\mathbb{R}$.
- Debes ser capaz de usar dichos axiomas para probar propiedades algebraicas y de orden de $\mathbb{R}$.
- Debes haber aprendido y recordar de memoria las reglas para trabajar con desigualdades.
- Debes saber usar en casos prácticos las reglas para trabajar con desigualdades.
- Debes entender la definición de la función raíz cuadrada.
- Debes entender la definición y recordar las propiedades del valor absoluto.
- Debes recordar la estrategia (1.8) para trabajar con desigualdades entre números positivos.
- Debes entender y saber aplicar el Principio de Inducción Matemática.
- Debes recordar la desigualdad de las medias y saber usarla para resolver problemas de extremos.

Como lectura adicional te recomiendo los dos primeros capítulos del libro de Michael Spivak [16], el cual, a pesar del tiempo transcurrido desde su primera edición, sigue siendo, en mi opinión, el mejor libro de introducción al Análisis Matemático. Su colección de ejercicios es excelente y algunos de ellos están resueltos al final del libro; además, se ha editado un libro, [15], con las soluciones de todos. Los textos de Larson [11] y de Engel [5] son de lo mejor que hay para aprender estrategias de resolución de ejercicios. Los ejercicios que traen tienen cierto grado de dificultad, con frecuencia están tomados de competiciones matemáticas, pero las soluciones están claramente expuestas. Algunos de los ejercicios propuestos los he tomado de esos libros.

Capítulo 2

Funciones elementales

Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo
a unos pocos días, el invento de los logaritmos
parece haber duplicado la vida de los astrónomos.
Pierre Simon Laplace

2.1. Funciones reales

Las funciones son las herramientas principales para la descripción matemática de una situación real. Todas las *fórmulas* de la Física no son más que funciones: expresan cómo ciertas magnitudes (por ejemplo el volumen de un gas) dependen de otras (la temperatura y la presión). El concepto de función es tan importante que muchas ramas de la matemática moderna se caracterizan por el tipo de funciones que estudian. No es de extrañar, por ello, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Además, se trata de uno de esos conceptos cuyo contenido esencial es fácil de comprender pero difícil de formalizar.

2.1 Definición. Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un único elemento de B*.

En esta definición la dificultad radica en precisar matemáticamente lo que se entiende por *regla*. Como solamente vamos a trabajar con funciones elementales considero que no es necesario dar más precisiones.

Observa que una función son *tres* cosas: el conjunto A donde está definida, el conjunto B donde toma valores y la regla que la define. En este curso estamos interesados principalmente en funciones entre conjuntos de números reales, es decir, A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$; con frecuencia $B = \mathbb{R}$. Estas funciones se llaman *funciones reales de una variable real*.

Convenio. En lo que sigue solamente consideraremos funciones reales y, si no se especifica otra cosa, se entiende que $B = \mathbb{R}$.

Por tanto, para darnos una función nos deben decir, en principio, el subconjunto A de $\mathbb{R}$ donde suponemos que la función está definida y la regla que asigna a cada número de A un único número real. El conjunto A recibe el nombre de *dominio* de la función.

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena. Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase "f de x" o, mucho mejor, "f evaluada en x" o "el valor de f en x") el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f* .

Es muy importante distinguir entre f (una función) y $f(x)$ (un número real).

El símbolo $f\colon A \to \mathbb{R}$ se utiliza para indicar que f es una función *cuyo dominio es A* (se supone, como hemos dicho antes, que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$). También es frecuente usar el simbolismo $x \mapsto f(x)$, $(x \in A)$.



Es importante advertir que las propiedades de una función dependen de la regla que la define *y también de su dominio*, por ello *dos funciones que tienen distintos dominios se consideran distintas funciones aunque la regla que las defina sea la misma.*

2.2 Definición (Igualdad de funciones). Dos funciones f y g son iguales cuando tienen igual dominio y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Notemos también que aunque estamos acostumbrados a representar a las funciones mediante *fórmulas*, no siempre es posible hacerlo.

2.3 Ejemplo. Consideremos las funciones siguientes.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

d) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 6}{x^2 - 1}$

Según lo antes dicho, las funciones en a) y b) son distintas. De hecho tienen propiedades distintas. Observa que la función definida en b) es creciente y la definida en a) no lo es.

La función definida en c) es llamada *función de Dirichlet*. Nótese que no es fácil calcular los valores de dicha función porque no siempre se sabe si un número real dado es racional o irracional. ¿Es $\mathrm{e} + \pi$ racional? Pese a ello la función está correctamente definida.

En d) no nos dan explícitamente el dominio de f por lo que se entiende que f está definida siempre que $f(x)$ tenga sentido, es decir, siempre que, $x^2 - 1 \neq 0$, esto es, para $x \neq \pm 1$. ♦

El convenio del dominio. Cuando una función se define por una fórmula "$f(x) =$ fórmula" y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x

para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado *dominio natural* de la función.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, y un conjunto no vacía $C \subset A$, el conjunto de las imágenes por f de todos los elementos de C:

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

se llama *imagen de C por f*. Cuando $C = A$, el conjunto $f(A)$ se llama *conjunto imagen* de f y también *rango* o *recorrido* de f.

2.1.1. Operaciones con funciones

La mayoría de las funciones que vamos a usar en este curso pertenecen a la clase de las *funciones elementales*. Se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones bien conocidas realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Suma, producto y cociente de funciones. Dadas dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, se define su *función suma* (resp. *producto*) como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x) + g(x)$ (resp. $f(x)g(x)$). Dicha función se representa con el símbolo $f + g$ (resp. fg). Se define la función cociente de f por g como la función que a cada número $x \in A$ con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función se representa por $\dfrac{f}{g}$. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x \in A$ el número $\alpha f(x)$. De todas formas, el producto de un número por una función puede considerarse como un caso particular del producto de funciones, pues se identifica el número α con la *función constante* que toma como único valor α.

Las propiedades de la suma y el producto de funciones son las que cabe esperar y su demostración es inmediata pues se reducen a las correspondientes propiedades de los números.

2.4 Proposición. *Cualesquiera sean las funciones $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades:*

Asociativas. $(f + g) + h = f + (g + h); \quad (fg)h = f(gh)$

Conmutativas. $f + g = g + f; \quad fg = gf$

Distributiva. $(f + g)h = fh + gh$

2.5 Definición (Composición de funciones). Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones con $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h : A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición de g con f* y se representa por $h = g \circ f$. Observa que la función $g \circ f$, solamente está definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g. La composición de funciones es asociativa.

2.6 Definición (Funciones inyectivas). Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.

2.7 Definición (La función inversa de una función inyectiva). Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, puede definirse una nueva función en el conjunto $B = f(A)$, $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$, que

llamaremos *función inversa de* f, que a cada número $y \in B$ asigna el único número $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Equivalentemente $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, y también $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in B$.

2.8 Definición (Funciones monótonas). Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es creciente (resp. decreciente) en un conjunto $C \subseteq A$, si f conserva (resp. invierte) el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Se dice que f es creciente (resp. decreciente) cuando lo es en todo su dominio de definición. Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente. Una función monótona e inyectiva se dice que es *estrictamente monótona*, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

2.9 Definición (Gráfica de una función). La gráfica de una función $f : A \to \mathbb{R}$ es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) : x \in A\}$.

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones se precisan herramientas de cálculo que estudiaremos más adelante.



Un error frecuente, que debes evitar, consiste en confundir una función con su gráfica. Este error procede de una manera inapropiada de representar las funciones que consiste en escribir $y = f(x)$. De esta forma se introduce una nueva letra "y" para representar el valor que la función f toma en x. Ahora la cosa empieza a estar confusa ¿la función es y?, ¿la función es f?, ¿la función es $f(x)$? Esto procede de la Física en donde se interpreta que x es la magnitud o variable "independiente" e y es la magnitud o variable "dependiente". Peor todavía, ¿es y una variable o una función? Si has usado con frecuencia esta forma de representar las funciones no me extraña que puedas tener dudas sobre su significado. Aclaremos esto. La única forma razonable de interpretar una igualdad como $y = f(x)$, es entender que dicha igualdad representa al conjunto de puntos del plano que la satisfacen, es decir, representa a la gráfica de f. Pero todavía hay otra posible confusión inducida por la notación $y = f(x)$. Consiste en que podemos considerar la función $G(x, y) = y - f(x)$. Se trata de una función de dos variables x e y que tiene muy poco que ver con la igualdad $y = f(x)$. Pues bien, hay quien confunde la función G con la gráfica de f.

2.1.2. Intervalos

Ocurre que el dominio natural de muchas funciones es un *intervalo* o la unión de varios intervalos. Recordemos el concepto de intervalo y cuántos tipos diferentes hay.

2.10 Definición. Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y del Ø, hay los siguientes tipos de intervalos[1].

[1]Este resultado, en apariencia *evidente*, no podríamos *demostrarlo* con las herramientas de que disponemos hasta ahora.

Intervalos que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)}\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)}\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} && \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}
$$

Intervalos que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$
\begin{aligned}
]-\infty,c[&= \{x \in \mathbb{R} : x < c\} && \text{(semirrecta abierta a la izquierda)}\\
]-\infty,c] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)}\\
]c,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > c\} && \text{(semirrecta abierta a la derecha)}\\
[c,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la derecha)}
\end{aligned}
$$

Como es la primera vez que aparecen, hay que decir que los símbolos $+\infty$ (léase: "más infinito") y $-\infty$ (léase: "menos infinito"); son eso: símbolos. No son números. Cada vez que aparece uno de ellos en una situación determinada hay que recordar cómo se ha definido su significado para dicha situación. A veces, se escribe $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.

Observación sobre la notación empleada. Lo he pensado un rato antes de decirme a usar la notación anterior para las semirrectas. Otra posible notación es la siguiente.

$$
\begin{aligned}
]\leftarrow,c[&= \{x \in \mathbb{R} : x < c\} && \text{(semirrecta abierta a la izquierda)}\\
]\leftarrow,c] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)}\\
]c,\rightarrow[&= \{x \in \mathbb{R} : x > c\} && \text{(semirrecta abierta a la derecha)}\\
[c,\rightarrow[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la derecha)}
\end{aligned}
$$

Esta notación me parece más clara porque no usa el símbolo ∞. Si lees correctamente, es decir, no lees los símbolos sino las ideas que representan (¿te he dicho esto antes?) entonces no hay lugar a interpretaciones extrañas. El símbolo $[c,+\infty[$ se lee "todos los números reales mayores o iguales que c". Si tú lees el intervalo de c a $+\infty$ no estás leyendo bien.

Observaciones sobre el concepto general de función y el formalismo que usamos para definir funciones

Hemos definido una función como tres cosas: un conjunto A, un conjunto B y una regla que a cada elemento x de A hace corresponder un elemento de B. Lo único que interesa de esa regla es que esté correctamente definida. Por ejemplo, la regla que a cada número $x \in [0,1]$ hace corresponder el dígito de su desarrollo decimal que ocupa el lugar cien mil millones, está correctamente definida aunque no sea muy útil, pues no es posible calcular el dígito que le corresponde a ningún número irracional. Te pongo este ejemplo para que aprecies lo general que es el concepto de función que hemos definido. En particular, debes notar que una función no tiene por qué estar dada por una "fórmula". Pero, seguidamente, te digo que no debes preocuparte por esta generalidad porque en este curso solamente vamos a trabajar con funciones definidas mediante "fórmulas"; además, "fórmulas" que, salvo excepciones, definirán "funciones elementales", esto es, funciones obtenidas al realizar sumas, productos, cocientes y composiciones de logaritmos, exponenciales, potencias y funciones trigonométrica.

Ya hemos usado antes el formalismo que se emplea en matemáticas para definir una función, pero quiero detenerme en él porque debes entenderlo perfectamente. Para definir una

función solemos empezar diciendo “sea $f : A \to \mathbb{R}$ la función dada por…”. Con esto estamos diciendo tres cosas: que la función está definida en A, que toma valores en $\mathbb{R}$, y que representamos con la letra f la regla. El error más frecuente que se produce aquí se debe al hecho de que, con frecuencia, el conjunto A no es el dominio natural de definición de la función sino un subconjunto del mismo, y esto puede tener muy importantes consecuencias que hay que tener muy presentes en todo momento. Seguidamente, para acabar de definir la función, se especifica la regla que a cada elemento de A asocia un número real, lo que suele expresarse por “la función dada por “$f(x)$ =fórmula o función elemental” para todo $x \in A$”. Se suele volver a insistir en que la variable x toma solamente valores en A para indicar que no nos interesa lo que pueda pasar fuera de A.

Ten en cuenta que la letra con la que representamos una función, suele usarse f, podemos elegirla a gusto y no tiene mayor importancia siempre que no se preste a confusiones. Lo importante son los datos que definen la función: los conjuntos A, B (nosotros suponemos que $B = \mathbb{R}$) y la regla. Veamos un ejemplo más de esta forma de proceder para que no te queden dudas.

a) Sea

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ la función dada por } f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

En la siguiente figura se representa parte de la gráfica de esta función.

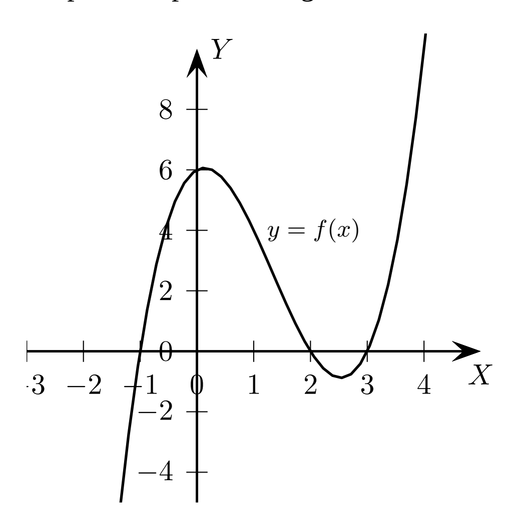


Figura 2.1. La función $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

La imagen de esta función es $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Esta función no tiene máximo ni mínimo, no es creciente y tampoco es decreciente. No es inyectiva y su función inversa no está definida.

b) Sea

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R} \text{ la función dada por } f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \text{ para todo } x \in [0, 2] \tag{2.2}$$

Observa que, aunque de forma deliberada uso la misma letra, f, para representar la regla, la función definida en (2.2) es muy diferente que la definida en (2.1). Aunque la regla es la misma, en (2.2) solamente nos interesa lo que pasa en el intervalo $[0, 2]$. La imagen de

esta función es $f([0,2]) = [0,6]$. Claramente, la función (2.2) es estrictamente decreciente, tiene máximo y mínimo y es inyectiva. Su función inversa está definida (aunque no sea fácil de calcular).

2.2. Estudio descriptivo de las funciones elementales[2]

En este curso se supone que ya tienes un conocimiento intuitivo de las funciones elementales básicas (exponencial, logaritmo natural, trigonométricas). En esta lección vamos a hacer un estudio descriptivo de dichas funciones, es decir, no vamos a dar definiciones rigurosas de las mismas y nos limitaremos a recordar sus propiedades más importantes.

2.2.1. Funciones polinómicas y funciones racionales

Las *funciones polinómicas o polinomios* son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$ aunque con frecuencia nos interesará estudiar una función polinómica en un intervalo.

Mientras que la suma, el producto y la composición de funciones polinómicas es también una función polinómica, el cociente de funciones polinómica da lugar a las llamadas *funciones racionales*. Una función racional es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Observa que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante 1).

Es inmediato que sumas, productos y cocientes de funciones racionales son también funciones racionales; y la composición de dos funciones racionales es también una función racional.

2.2.2. Raíces de un número real

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real *mayor o igual que cero*, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

2.11 Proposición. *Sean $x, y \in \mathbb{R}_o^+$, $k \in \mathbb{N}$. Se verifica que:*

a) $\sqrt[k]{x\,y} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

[2] El estudio de las funciones elementales que haremos aquí se complementa con el cuaderno de *Mathematica* que está en mi página Web.

b) La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ *es estrictamente creciente en* $\mathbb{R}^+_o$. *Es decir, se verifica que* $x < y$ *si, y sólo si,* $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

Si $x < 0$ y k es *impar* se define[3] $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$.

2.2.3. Potencias racionales

Dados $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$. Notemos que $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$ pues

$$\left((\sqrt[q]{x})^p\right)^q = (\sqrt[q]{x})^{p\,q} = \left((\sqrt[q]{x})^q\right)^p = x^p$$

Naturalmente, si $p/q = m/n$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces se comprueba fácilmente que $x^{p/q} = x^{m/n}$. En consecuencia, si r es un número racional podemos definir, sin ambigüedad alguna, la potencia x^r por $x^r = x^{p/q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ son tales que $r = p/q$.

2.2.4. Logaritmos

Dados un número $a > 0$, $a \neq 1$, y un número $x > 0$, se define el *logaritmo en base* a *de* x como el único número $y \in \mathbb{R}$ que verifica la igualdad $a^y = x$. El logaritmo en base a de x se representa por el símbolo $\log_a x$. Observa que, por definición, para todo $x > 0$ es $a^{\log_a x} = x$.

El dominio de la función $\log_a$ es $\mathbb{R}^+$, y su imagen es $\mathbb{R}$. La función es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$. La propiedad básica de los logaritmos es que convierten productos en sumas:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x > 0, y > 0)$$

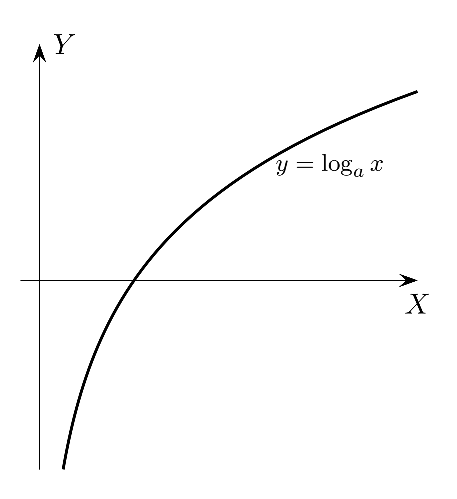


Figura 2.2. Función logaritmo de base $a > 1$

Los *logaritmos decimales* corresponden a tomar $a = 10$ y los *logaritmos naturales*, también llamados *neperianos* (en honor de John Napier 1550-1617), corresponden a tomar como base el número e. El número e es un número irracional que puede aproximarse arbitrariamente por números de la forma $(1 + 1/n)^n$ para valores grandes de n. Un valor aproximado de e es 2.7182818284.**En este libro trabajaremos siempre**, salvo que explícitamente se indique lo contrario, **con la función logaritmo natural**, **que notaremos** $\log$ (la notación, cada día más en desuso, "ln", para dicha función no será usada en este libro).

Teniendo en cuenta que

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \qquad (x > 0)$$

[3]Ver (3.3.3.1) para el caso de raíces complejas.

podemos deducir muy fácilmente las propiedades de la función logaritmo en base a a partir de las propiedades de la función logaritmo natural.

2.2.5. Exponenciales

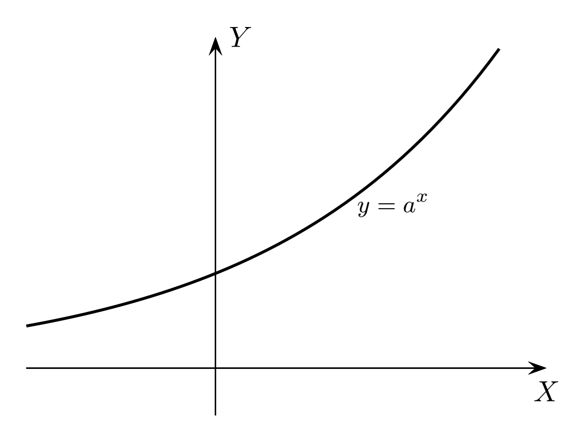


Figura 2.3. Función exponencial de base $a > 1$

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, que se representa por $\exp_a$. Por tanto, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exp_a(x)$ es, por definición, el único número positivo cuyo logaritmo en base a es igual a x: $\log_a(\exp_a(x)) = x$. Es fácil comprobar que si $r \in \mathbb{Q}$ entonces $\exp_a(r) = a^r$, por lo que se usa la notación $\exp_a(x) = a^x$.
El dominio de la función $\exp_a$ es $\mathbb{R}$, y su imagen es $\mathbb{R}^+$. La función es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$. La propiedad básica de $\exp_a$ es que convierten sumas en productos:

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

Dos funciones exponenciales cualesquiera, $\exp_a$ y $\exp_b$, están relacionadas por la igualdad:

$$\exp_b(x) = \exp_a(x \log_a b) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

La función exponencial de base e, inversa de la función logaritmo natural, se notará simplemente por $\exp$. Por tanto $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Con ello tenemos que:

$$\boxed{x^y = \mathrm{e}^{y \log x} \qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})} \tag{2.3}$$

La letra e se eligió en honor del gran matemático Leonhard Euler (1707-1783). A primera vista puede parecer que no hay razones particulares para llamar *natural* al número e. Las razones matemáticas de esta elección se verán al estudiar la derivación. Sin embargo, hay muchos procesos de crecimiento que hacen del número e una base exponencial extremadamente útil e interesante. Veamos unos ejemplos.

2.2.5.1. Interés compuesto

Supongamos que invertimos un capital inicial, P, a una tasa de interés anual r (expresado en tanto por uno), ¿cuánto dinero tendremos cuando hayan pasado k años? Respuesta: depende de cómo se paguen los intereses. En el *interés simple* se paga el total de los intereses al terminar la inversión, por lo que el interés total producido es igual a Prk, y el capital final será igual a $P(1 + rk)$.

Sin embargo, lo usual es que se paguen intereses en períodos más cortos de tiempo. Estos intereses se acumulan al capital inicial y producen, a su vez, nuevos intereses. Esto se conoce

como *interés compuesto*. Por ejemplo, si el interés se paga n veces al año (trimestralmente ($n = 4$), mensualmente ($n = 12$), etcétera) al final del primer período tendremos $P(1 + r/n)$, al final del segundo $P(1+r/n)^2$; al final del primer año $P(1+r/n)^n$, al final del k-ésimo año tendremos $P(1 + r/n)^{nk}$.

Cuando n es muy grande, el número $(1 + r/n)^n$ es aproximadamente igual a e^r. Precisamente, si los interese se acumulan instantáneamente al capital, lo que se conoce como *interés compuesto continuo*, entonces el capital al final del k-ésimo año viene dado por $P\,\mathrm{e}^{rk}$.

2.2.5.2. Crecimiento demográfico

Llamemos P_0 a la población mundial actual, y sea λ la tasa anual de crecimiento expresada en tanto por uno, la cual suponemos que se mantiene constante. Notemos por $P(t)$ la población mundial pasados t años.

Pasado un año, la población será $P(1) \approxeq P_0 + \lambda P_0 = (1 + \lambda)P_0$. Utilizamos el signo de aproximación $\approxeq$ y no el $=$ porque hemos calculado el crecimiento de la población λP_0 como si esta fuese constantemente igual a P_0 en todo el año, lo que no es correcto.

Obtendríamos un resultado más exacto si consideramos el crecimiento de la población mensualmente. Como la tasa de crecimiento mensual es $\lambda/12$, pasado un mes la población será $(1 + \frac{\lambda}{12})P_0$, y pasados doce meses $P(1) \approxeq \left(1 + \dfrac{\lambda}{12}\right)^{12} P_0$. El cálculo sigue siendo aproximado, pues la población crece *continuamente*. Para obtener una mejor aproximación podríamos considerar días en vez de meses. En general, si dividimos el año en n períodos, obtendríamos como aproximación:

$$P(1) \approxeq \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n P_0$$

Cuanto mayor sea n menor será el error que cometemos. *Si hacemos que n crezca indefinidamente*, entonces el número $\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$ se convierte en e^λ, por lo que $P(1) = \mathrm{e}^\lambda P_0$. Si el período de tiempo es de t años, entonces $P(t) = P_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Observa que tanto el interés compuesto continuo como el crecimiento demográfico son, matemáticamente, lo mismo. En ambos casos lo que tenemos es una magnitud que se incrementa de forma proporcional a su cantidad en cada momento. Otro proceso que entra en esta descripción es el decaimiento radiactivo, la única diferencia es que la masa de materia radiactiva va disminuyendo, o sea, que la constante de proporcionalidad es negativa.

2.2.6. Función potencia de exponente real a

Se llama así la función cuyo dominio es $\mathbb{R}^+$ que a cada $x > 0$ asigna el número x^a. Puesto que $x^a = \exp(a \log x)$, las propiedades de esta función se deducen con facilidad de las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo natural.

2.2.7. Funciones trigonométricas

El concepto más específico de la trigonometría es el de *medida de un ángulo*. Para medir un ángulo llevamos su vértice al origen y medimos la longitud del arco de la circunferencia unidad que dicho ángulo intercepta, obtenemos así un número que llamamos la medida (absoluta, es decir no orientada) del ángulo en cuestión. Naturalmente, lo primero que hay que hacer para medir cualquier cosa es elegir una unidad de medida. Pues bien, para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Hay una expresión que estamos acostumbrados a usar y cuyo significado conviene precisar. Me refiero a la expresión: “una circunferencia de radio r”. Cuando empleamos dicha expresión se sobreentiende que el radio r de la circunferencia es un número expresado en alguna unidad de medida de longitudes. *Es decir, la expresión “una circunferencia de radio r” presupone que hemos fijado una unidad de medida con la cual hemos medido r.*

2.2.7.1. Medida de ángulos

Medida de ángulos en grados. Supongamos que tenemos una circunferencia de radio r. Para medir ángulos en grados sobre dicha circunferencia lo que hacemos es tomar como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la longitud total de esa circunferencia ($2\pi r$) dividida por 360. Un ángulo de un grado es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a $\dfrac{2\pi r}{360}$.

Medida de ángulos en radianes. Supongamos que tenemos una circunferencia de radio r. Para medir ángulos en radianes sobre dicha circunferencia lo que hacemos es tomar como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la del radio. Un ángulo de un radián es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a r.

Las palabras “grado” y “radián” se usan tanto para referirse a los respectivos ángulos como a las medidas de sus arcos. Es así como debes interpretar la expresión “la longitud total de la circunferencia es 360 grados y también es igual a 2π radianes”. Sería más exacto decir: “la longitud total de la circunferencia es 360 veces *la longitud de un arco de un grado* y también es igual a 2π veces *la longitud de un arco de un radián*”. Evidentemente, la longitud de un arco de un radián es igual al radio de la circunferencia.

La relación entre grados y radianes viene dada por:

$$360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes}$$

No hay que olvidar que *grados* y *radianes* no son otra cosa que *unidades de medida* de longitudes, al igual que lo son el metro y el centímetro. En la navegación y en la astronomía los ángulos se miden en grados, pero en Cálculo es preferible medirlos en radianes porque se simplifican las cuentas. Por ejemplo, la longitud de un arco de circunferencia se obtiene multiplicando la longitud del radio de dicha circunferencia por la medida *en radianes* del ángulo que corresponde a dicho arco.

Observa que la ventaja de medir arcos en radianes es que, en tal caso, la misma unidad con la que medimos el radio nos sirve para medir arcos. Por ejemplo, si el radio es 1 centímetro el radián también mide 1 centímetro; mientras que la medida de un grado en centímetros sería $2\pi/360 \simeq 0,0174533$.

Convenio de los ángulos: usar radianes De ahora en adelante, a menos que se establezca explícitamente otra unidad, supondremos que todos los ángulos están medidos en radianes.

2.2.7.2. Funciones seno y coseno

Hay dos funciones que suelen confundirse: el seno de un ángulo y el seno de un número. En geometría se habla del *seno de un ángulo* y en Cálculo usamos la expresión $\operatorname{sen}(\sqrt{2})$ para referirnos al *seno del número* $\sqrt{2}$. ¿Qué relación hay entre uno y otro?

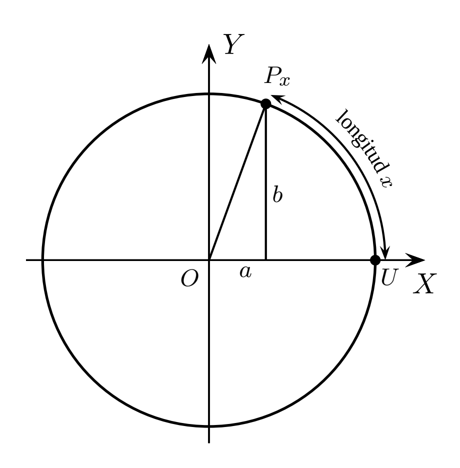


Figura 2.4. La circunferencia unidad

Antes que nada hay que decir que tanto el seno de un ángulo como el seno de un número *son números*, pero mientras que el seno de un ángulo tiene una sencilla definición geométrica, no es evidente, a priori, cómo se puede definir el seno de un número. La idea consiste en asociar a cada número un (único) ángulo y definir el seno del número como el seno del ángulo que le corresponde. Es evidente que a cada número $x \geqslant 0$ le podemos asignar de manera única un ángulo "enrollando" el segmento $[0, x]$ sobre la circunferencia unidad, *en sentido contrario a las agujas del reloj*, de forma que el origen de dicho segmento coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto P_x de la circunferencia unidad.

Pues bien, si las coordenadas de P_x son (a, b), se define:

$$\operatorname{sen} x = \text{seno del ángulo}(\widehat{P_xOU}) = b$$
$$\cos x = \text{coseno del ángulo}(\widehat{P_xOU}) = a$$

Al ser igual a 2π la longitud de la circunferencia unidad, es claro que $P_{x+2\pi} = P_x$, por lo que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x+2\pi)$ y $\cos(x) = \cos(x+2\pi)$. Observa también que si $0 \leqslant x < 2\pi$, entonces la *medida en radianes* del ángulo $\widehat{P_xOU}$ es igual a x, es decir:

$$\operatorname{sen}(x) = \text{ seno del ángulo de } x \text{ radianes } (0 \leqslant x < 2\pi)$$

Si $x < 0$ podemos proceder con el segmento $[x, 0]$ de forma análoga a la anterior, con la diferencia de que ahora enrollamos dicho segmento sobre la circunferencia unidad *en el sentido de las agujas del reloj*, de forma que su extremo 0 coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto $P_x = (c, d)$ de la circunferencia unidad y se define, igual que antes $\operatorname{sen}(x) = d$, $\cos(x) = c$. Es fácil ver que si $P_x = (c, d)$, entonces $P_{-x} = (c, -d)$. Resulta así que $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$ y $\cos(x) = \cos(-x)$.

2.12 Observaciones. Podemos definir la función *seno en grados* sin más que interpretar que x es la medida en grados del ángulo que le corresponde. El hecho de que se use la misma notación para ambas funciones es la causa de muchos errores. Si notamos $\operatorname{sen}^{o}(x)$ el valor del seno del ángulo cuya media es x grados, y notamos $\operatorname{sen}^{r}(x)$ el valor del seno del ángulo cuya media es

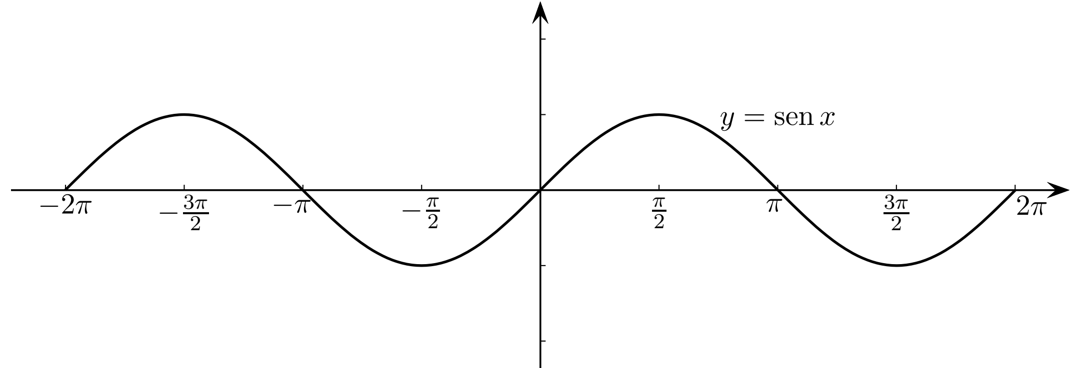


Figura 2.5. La función seno

x radianes (es decir, la función que hemos definido antes); la relación entre ambas funciones viene dada por:

$$\operatorname{sen}^{o}(x) = \operatorname{sen}^{r} \frac{2\pi x}{360} = \operatorname{sen}^{r} \frac{\pi x}{180}$$

Es frecuente que $\operatorname{sen}^{o}(x)$ se escriba como $\operatorname{sen} x^{o}$. Por ejemplo $\operatorname{sen}(45^{o})$. A esta mala notación se deben las dudas que a veces surgen sobre el significado de $\operatorname{sen} x$ y que llevan a preguntar: “¿está x en grados o en radianes?”, cuando lo que realmente debería preguntarse es “¿se trata de $\operatorname{sen}^{o}(x)$ o de $\operatorname{sen}^{r}(x)$?”; porque, en ambos casos, x es tan sólo un número al que no hay por qué ponerle ninguna etiqueta.



Insistimos, una última vez: en este curso de Cálculo el número $\operatorname{sen} x$ significará siempre $\operatorname{sen}^{r} x$. Por tanto $\operatorname{sen}(\pi/4) \neq \operatorname{sen}(45)$ (pero $\operatorname{sen}(\pi/4) = \operatorname{sen}^{o}(45)$).

2.2.7.3. Propiedades de las funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. Las identidades básicas que dichas funciones verifican son:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Como se ha dicho antes, las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x\,, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno es impar y la función coseno es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x\,, \quad \cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Todas las propiedades anteriores se deducen fácilmente de las definiciones dadas. Las siguientes igualdades, conocidas como *fórmulas de adición*, se probarán más adelante:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \tag{2.4}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{2.5}$$

La función seno se anula en los múltiplos enteros de π, es decir, en los puntos de la forma $k\pi$ donde k es un entero cualquiera. La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi + \pi/2$ donde k es un entero cualquiera.

2.2.7.4. Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Las funciones **tangente** y **secante**, que se representan por tg y $\sec$ son las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$, por:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Las funciones **cotangente** y **cosecante**, que se representan por cotg y $\csc$ son las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\}$, por:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Las propiedades de estas funciones se deducen fácilmente de las propiedades del seno y del coseno. Por ejemplo, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; esto es, la función tangente es periódica de período π.

2.2.7.5. Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente

Lo primero que hay que decir es que ninguna de las funciones "seno", "coseno", "tangente", es inyectiva pues todas ellas son periódicas y, por tanto, toman cada uno de sus valores en infinitos puntos; en consecuencia, ninguna de ellas tiene inversa en el sentido de la definición (2.7). Por tanto, no debe decirse que las funciones *arcoseno*, *arcocoseno*, *arcotangente* sean las funciones inversas del seno, del coseno o de la tangente: eso no es cierto. Hecha esta observación imprescindible, pasemos a definir dichas funciones.

La función seno es estrictamente creciente en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$. En consecuencia, dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un único número $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\operatorname{sen} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,sen} x$ y se llama el *arcoseno de* x. Es decir, el arcoseno es la función $\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$ y $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Observa que la igualdad $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$, es cierta si, y sólo si, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

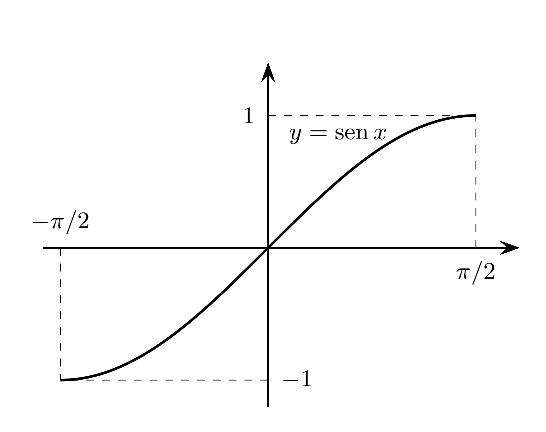


Figura 2.6. La función seno en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

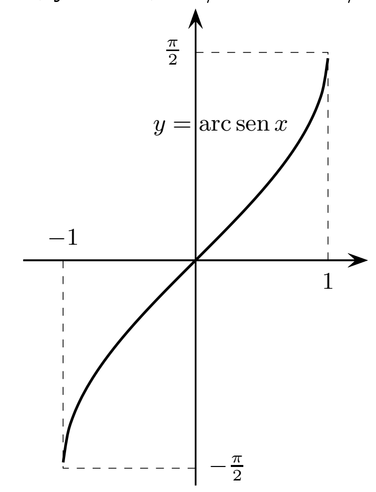


Figura 2.7. La función arcoseno

Es decir, *la función arcoseno es la inversa de la función seno restringida al intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$, esto es, cuando consideramos que la función seno está solamente definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen} : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad -\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \pi/2, \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x} \tag{2.6}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2} \tag{2.7}$$

La función coseno es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1. Por tanto, dado un número $x \in [-1, 1]$, hay un único número $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,cos} x$ y se llama *arcocoseno de* x. Es decir, arcocoseno es la función $\operatorname{arc\,cos} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$ y $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$. Observa que la igualdad $\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x$, es cierta si, y sólo si, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Es decir, *la función arcocoseno es la inversa de la función coseno restringida al intervalo* $[0, \pi]$, esto es, cuando consideramos que la función coseno está solamente definida en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,cos} : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi, \quad \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x} \tag{2.8}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi} \tag{2.9}$$

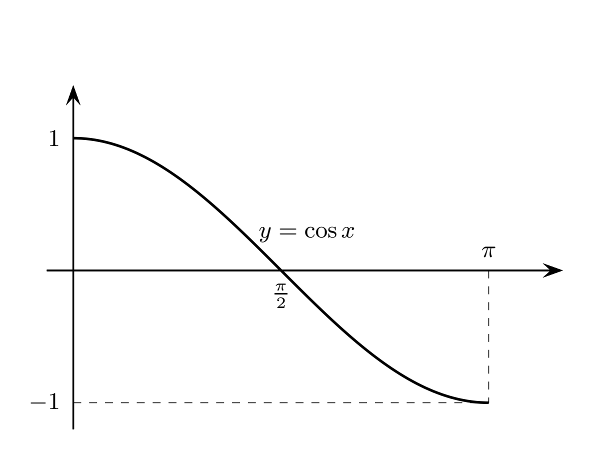


Figura 2.8. La función coseno en $[0, \pi]$

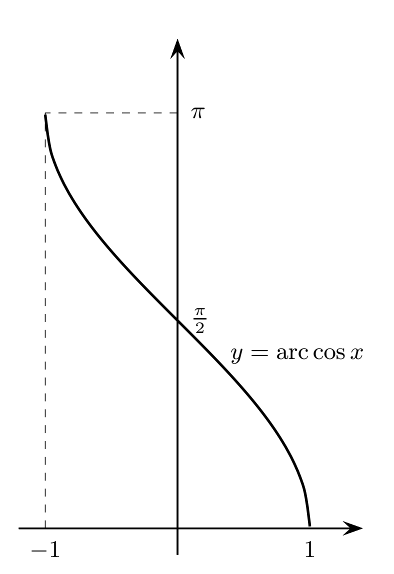


Figura 2.9. La función arcocoseno

La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y en dicho intervalo toma todos los valores reales, $\operatorname{tg}(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$. En consecuencia, dado un número $x \in \mathbb{R}$, hay un único número $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $\operatorname{tg} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,tg} x$ y se llama el *arcotangente de* x. Es decir, *la función arcotangente*

es la inversa de la función tangente restringida al intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$, esto es, cuando consideramos que la función tangente está solamente definida en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad -\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} x < \pi/2, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x} \tag{2.10}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi/2 < x < \pi/2} \tag{2.11}$$

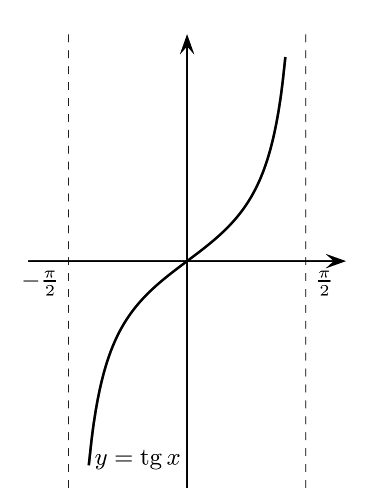


Figura 2.10. La función tangente en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

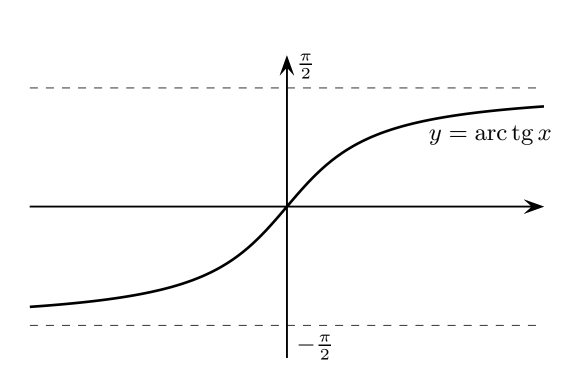


Figura 2.11. La función arcotangente

2.2.8. Las funciones hiperbólicas

Hay algunas combinaciones de las funciones $\exp(x)$ y $\exp(-x)$ que aparecen con tanta frecuencia que se les da nombre propio. Ellas son las funciones *seno hiperbólico*, representada por senh, y *coseno hiperbólico*, representada por $\cosh$, y están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. La identidad básica que dichas funciones verifican es:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno hiperbólico es impar y la función coseno hiperbólico es par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x\,, \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. La función coseno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$.

Todas las propiedades anteriores se deducen fácilmente de las definiciones dadas.

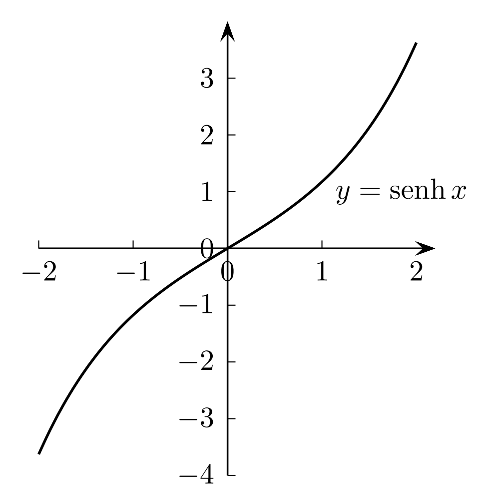


Figura 2.12. La función seno hiperbólico

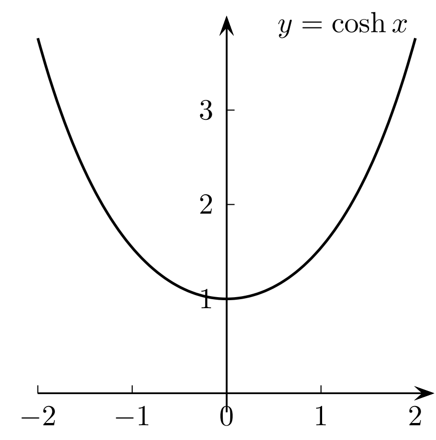


Figura 2.13. La función coseno hiperbólico

La función **tangente hiperbólica** que se representa por tgh es la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

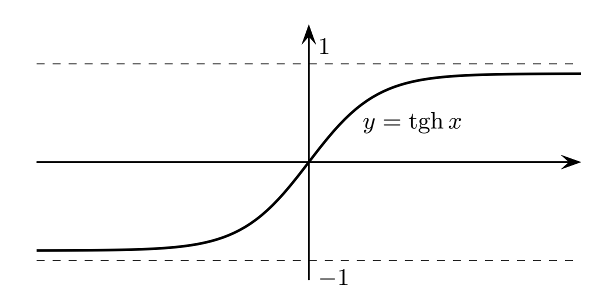


Figura 2.14. La función tangente hiperbólica

De forma análoga se definen las funciones cotangente, secante y cosecante hiperbólicas.

2.2.8.1. Las funciones hiperbólicas inversas

La función seno hiperbólico es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa, representada por, $\operatorname{argsenh}$, (léase **argumento seno hiperbólico**) viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R})} \tag{2.12}$$

La función coseno hiperbólico es inyectiva en $\mathbb{R}_o^+$ y su imagen es la semirrecta $[1, +\infty[$. La función, definida en $[1, +\infty[$, que a cada número $x \geqslant 1$ asigna el único número $y > 0$ tal que $\cosh y = x$, se llama **argumento coseno hiperbólico**, se representa por, $\operatorname{argcosh}$, y viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geqslant 1)} \tag{2.13}$$

La función tangente hiperbólica es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $]-1,1[$ cuya inversa, representada por, argtgh, (léase **argumento tangente hiperbólica**) es la función definida en el intervalo $]-1,1[$ por:

$$\boxed{\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1<x<1)} \tag{2.14}$$

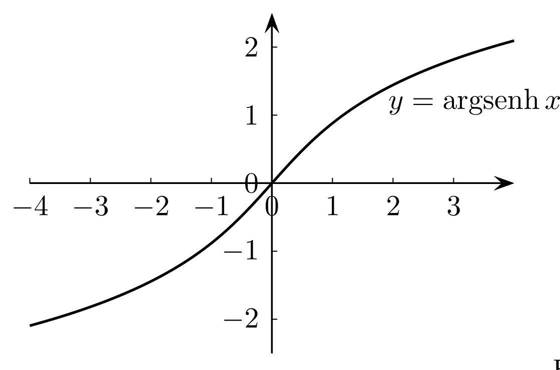


Figura 2.15. La función argumento seno hiperbólico

Figura 2.16. La función argumento coseno hiperbólico

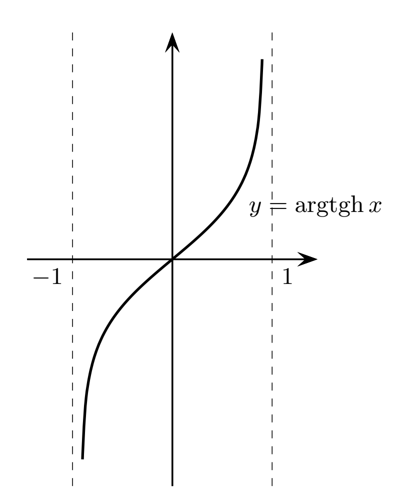


Figura 2.17. La función argumento tangente hiperbólica

La razón de por qué estas funciones se llaman hiperbólicas es que, al igual que los puntos de la circunferencia unidad pueden representarse en la forma $(\cos t, \operatorname{sen} t)$, los puntos en la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ pueden representarse como $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$.

Naturalmente, la importancia de las funciones trigonométricas procede de que multitud de fenómenos naturales son de naturaleza ondulatoria o periódica. Por ejemplo, la gráfica de un electrocardiograma no es más que superposiciones de gráficas de senos y cosenos.

Las funciones hiperbólicas, por su parte, también sirven para describir el movimiento de ondas en sólidos elásticos, o la forma que adoptan los cables eléctricos colgantes. Hay una

hermosa curva llamada *catenaria* cuya ecuación es de la forma $y = a\cosh(x/a)$ (donde se entiende que a es una constante). La catenaria es la forma que adopta una cadena perfectamente flexible suspendida de sus extremos y bajo la acción de la gravedad.

2.2.9. Ejercicios propuestos

36. Estudia cuales de las siguientes igualdades son ciertas y, cuando no lo sean, proporciona un contraejemplo. Se supone que f, g, h son funciones definidas en $\mathbb{R}$.

a) $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$.

b) $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$.

c) $\dfrac{1}{f\circ g} = \dfrac{1}{f}\circ g$.

d) $\dfrac{1}{f\circ g} = f\circ \dfrac{1}{g}$.

37. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Indica el dominio natural de definición de la función h dada por la regla que en cada caso se indica.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\qquad h(x) = \operatorname{arc\,sen}(f(x)),\quad h(x) = \log(f(x)),\qquad h(x) = \sqrt{f(x)}$$
$$h(x) = \operatorname{argcosh}(f(x)),\quad h(x) = \arccos(f(x)),\quad h(x) = \operatorname{arc\,tg}(f(x)),\quad h(x) = g(x)^{f(x)}$$

38. Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$ e *impar* si $f(-x) = -f(x)$.

a) Estudia si la suma, el producto y la composición de funciones pares o impares es una función par o impar. Considera todos los casos posibles.

b) Prueba que toda función puede escribirse de forma única como suma de una función par y una función impar.

39. Prueba que la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Deduce que

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

40. Indica, justificando tu respuesta, los intervalos que:

- No tienen máximo ni mínimo.
- Tienen máximo pero no tienen mínimo.
- Tienen mínimo pero no tienen máximo.
- Tienen máximo y mínimo.

41. Se quiere amortizar una deuda de 60000 € el día 31 de diciembre de 2013. Esta deuda ha sido contraída el día 1 de enero de 2008, y se incrementa cada trimestre al 6 por 100 anual. Para amortizarla se quiere pagar una cantidad fija el último día de cada mes,

empezando el 31 de enero de 2008 y terminando el 31 de diciembre de 20013. Estas cantidades producen un interés anual del 3 por 100, que se acumula mensualmente. ¿Qué cantidad hay que abonar cada mes?

Sugerencia. Usa una calculadora o un programa de cálculo que tengas en tu ordenador para obtener la solución "exacta" (redondeas por exceso). Haciendo uso de la aproximación (para n "grande"): $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \approxeq \mathrm{e}^r$, puedes obtener también una solución aproximada.

42. ¿A qué interés simple anual corresponde un interés compuesto continuo del $10\,\%$ anual?

43. Se invierten 10000 euros en una cuenta que produce un $4\,\%$ fijo de interés anual.

1. ¿Cuántos años se necesitan para doblar el capital inicial?
2. ¿Cuántos años son necesarios para que el capital final sea de de un millón de euros?

44. Una persona coloca cada día la misma cantidad P de euros a un interés compuesto continuo del $r\,\%$ anual. Hallar el capital final al cabo de n días.

Si $P=10$€y $r=5$, ¿al cabo de cuanto tiempo el capital final será de 6000 €?

45. Se sabe que la población de un cultivo de bacterias se duplica cada 3 horas. Si a las $12h$ del mediodía hay 10000 bacterias, ¿cuántas habrá a las 7 de la tarde del mismo día?.

46. Compara $a^{\log b}$ con $b^{\log a}$.

47. Calcula x sabiendo que $\dfrac{1}{\log_x(a)}=\dfrac{1}{\log_b(a)}+\dfrac{1}{\log_c(a)}+\dfrac{1}{\log_d(a)}$

48. ¿Es correcto escribir $\log(x-1)(x-2)=\log(x-1)+\log(x-2)$?

49. Prueba que $\log(x+\sqrt{1+x^2})+\log(\sqrt{1+x^2}-x)=0$.

50. Resuelve $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$.

51. Simplifica las expresiones $a^{\log(\log a)/\log a}$, $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$.

52. Resuelve el sistema: $7(\log_y x+\log_x y)=50$, $x\,y=256$. Se supondrá que $x>y>1$.

53. Indica cuál de los dos números $1234567^{1234568}$ y $1234568^{1234567}$ es el mayor.

54. Calcula los valores de x para los que se verifica la igualdad:

$$\log_x(10)+2\log_{10x}(10)+\log_{100x}(10)=0.$$

55. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que verifica las propiedades:

a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$.
b) $f(xy)=f(x)f(y)$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$.

Demuestra que o bien f es $f(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ o bien es $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Sugerencias. a) Supuesto que f no es idénticamente nula, prueba primero que f es estrictamente creciente y que $f(r)=r$ para todo $r\in\mathbb{Q}$.

b) Supón que hay algún número a tal que $f(a)\neq a$ y deduce una contradicción (utiliza que entre dos números reales cualesquiera siempre hay algún número racional).

56. Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ una función que verifica las propiedades:

a) $f(xy)=f(x)+f(y)$ para todos x,y en $\mathbb{R}^+$.

b) $f(x)>0$ para todo $x>1$;

c) $f(\mathrm{e})=1$.

Demuestra que $f(x)=\log(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$.

Sugerencias. a) Prueba primero que f es creciente y que $f(\mathrm{e}^r)=r$ para todo $r\in\mathbb{Q}$.

b) Sea $\varphi(x)=f(\exp(x))$. Justifica que φ es estrictamente creciente. Supón que hay algún número a tal que $\varphi(a)\neq a$ y deduce una contradicción (utiliza que entre dos números reales cualesquiera siempre hay algún número racional).

57. Prueba las igualdades siguientes.

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\operatorname{arc\,sen} x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \ \forall x\in]-1,1[, \qquad \operatorname{arc\,cos} x+\operatorname{arc\,sen} x=\frac{\pi}{2}\ \ \forall x\in[-1,1]$$

58. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $a^2+b^2=1$, $a\neq -1$. Definamos $\vartheta=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a+1}$. Prueba que $\cos\vartheta=a$, $\operatorname{sen}\vartheta=b$.

59. Prueba por inducción la siguiente igualdad.

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx)=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$$

60. Prueba que para todos $x,y\in\mathbb{R}$ se verifica que

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\quad \cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Deduce que para $k\in\mathbb{N}$:

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(kx)=\operatorname{sen}(2k+1)\frac{x}{2}-\operatorname{sen}(2k-1)\frac{x}{4}$$

Utiliza esta igualdad para probar que:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\big(\cos x+\cos(2x)+\cdots+\cos(nx)\big)=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x$$

Prueba análogamente que:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\big(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(2x)+\cdots+\operatorname{sen}(nx)\big)=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$$

61. Prueba que $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$. ¿Qué excepciones hay que hacer?.

62. Indica para qué valores de x e y se verifica la igualdad $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

63. Calcula x por la condición $\operatorname{arc\,tg}(2x)+\operatorname{arc\,tg} x=\dfrac{\pi}{4}$.

64. Deduce las expresiones de las funciones hiperbólicas inversas dadas por las igualdades (2.12), (2.13) y (2.14).

65. Prueba que $\operatorname{arc\,tg}(\mathrm{e}^x) - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tgh}(x/2)) = \dfrac{\pi}{4}$.

66. Simplifica las expresiones

a) $\operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \operatorname{sen}^2 y$.

b) $\dfrac{\cosh(\log x) + \operatorname{senh}(\log x)}{x}$.

67. Prueba que $2 \operatorname{argtgh}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{argtgh}(\operatorname{sen} 2x)$.

68. Define las funciones secante y cotangente hiperbólicas y estudia sus inversas.

69. Obtener fórmulas de adición para el seno, coseno y tangente hiperbólicos.

70. Dibuja la gráfica de la función $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$.

71. Prueba las igualdades:

$$\cos a = 4\cos^3(a/3) - 3\cos(a/3) = 2\cos^2(a/2) - 1$$

y, usando que $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, deduce el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/8)$.

2.2.10. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 15 Calcula x sabiendo que $\dfrac{1}{\log_x(a)} = \dfrac{1}{\log_b(a)} + \dfrac{1}{\log_c(a)} + \dfrac{1}{\log_d(a)}$

Solución. Pongamos $y = \log_x(a)$. Por definición, tenemos que $x^y = a$, de donde se sigue que $y \log x = \log a$. Hemos obtenido así que $\log_x(a) = \dfrac{\log a}{\log x}$. Con ello, la igualdad del enunciado puede escribirse como

$$\frac{\log x}{\log a} = \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log c}{\log a} + \frac{\log d}{\log a}$$

esto es $\log x = \log b + \log c + \log d$, o lo que es igual, $\log x = \log(b\,c\,d)$. Como la función logaritmo es inyectiva, deducimos que $x = b\,c\,d$. ☺

Ejercicio resuelto 16 Prueba la igualdad $\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x = \dfrac{\pi}{2}$ $\forall x \in [-1, 1]$

Solución. Se trata de probar que $\operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x$ para todo $x \in [-1, 1]$. Para ello, dado $x \in [-1, 1]$, pongamos $z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x$. Como, por definición, $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$, deducimos que $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$. Además

$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x) = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(-\operatorname{arc\,cos} x) + \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(-\operatorname{arc\,cos} x) =$

$= \cos(-\operatorname{arc}\cos x) = \cos(\operatorname{arc}\cos x) = x$

Hemos probado así que $\operatorname{sen} z = x$, y $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$ lo que, por definición, quiere decir que $z = \operatorname{arc}\operatorname{sen} x$.

Ejercicio resuelto **17** Prueba que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para todo $x \in]-1,1[$.

Solución. Como $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, deducimos que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) = \dfrac{x}{\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x)}$, $\forall\, x \in]-1,1[$ (hay que excluir los puntos ± 1 porque $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(\pm 1) = \pm\pi/2$) . Bastará probar, por tanto, que $\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) = \sqrt{1-x^2}$.

Como $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$, deducimos que, $\cos^2(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) = 1 - x^2$, esto es,

$$|\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x)| = \sqrt{1-x^2}$$

Ahora, como $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc}\operatorname{sen} x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, se sigue que $\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) \geqslant 0$, por lo que

$$\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) = |\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x)|$$

y, por tanto, $\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) = \sqrt{1-x^2}$. ☺

Ejercicio resuelto **18** Dado un número $x \neq 0$, calcula un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$.

Solución. Aquí el dato es el número $x \neq 0$. Puesto que $\operatorname{senh} t = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$, tenemos que calcular un número t que verifique la igualdad $2 = x(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$, esto es, $x\,\mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^t - x = 0$. Haciendo $y = \mathrm{e}^t$, tenemos que $x\,y^2 - 2y - x = 0$, por lo que los dos posibles valores para y son

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{o} \quad \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Como debe ser $y > 0$ (porque el valor de una exponencial siempre es positivo), deducimos que

$$t = \log y = \begin{cases} \log\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & \text{si } x > 0 \\[2ex] \log\left(\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

☺

Ejercicio resuelto **19** Se quiere amortizar una deuda de 60000 € el día 31 de diciembre de 20013. Esta deuda ha sido contraída el día 1 de enero de 2000, y se incrementa cada trimestre al 6 por 100 anual. Para amortizarla se quiere pagar una cantidad fija el último día de cada mes, empezando el 31 de enero de 2008 y terminando el 31 de diciembre de 20013. Estas cantidades producen un interés anual del 3 por 100, que se acumula mensualmente. ¿Qué cantidad hay que abonar cada mes?

Solución. Como la deuda se incrementa a un interés compuesto (expresado en tanto por uno) del $0{\cdot}06/4$ cada trimestre, el 31 de diciembre de 2013 la deuda más los intereses será igual a:

$$60000\left(1+\frac{0{\cdot}06}{4}\right)^{24}$$

Llamemos P a la mensualidad que tendremos que pagar al final de cada mes. Dichas mensualidades se capitalizan a interés compuesto del $0\cdot 03/12$ cada mes. La primera mensualidad permanece un total de 71 meses y la última, al pagarse el último día del mes no genera ningún interés. La cantidad total que tendremos el 31 de diciembre de 2013 será igual a:

$$P\left[\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{71}+\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{70}+\cdots+\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)+1\right]=$$
$$=P\left[\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{72}-1\right]\frac{12}{0{\cdot}03}=400P\left[\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{72}-1\right]$$

Donde hemos usado la expresión que da la suma de una progresión geométrica. En consecuencia, deberá ser:

$$P\left[\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{72}-1\right]400=60000\left(1+\frac{0{\cdot}06}{4}\right)^{24}$$

Usando una calculadora se obtiene: $P=1088{\cdot}74$ donde hemos redondeado por exceso.

Podemos también hacer el cálculo anterior teniendo en cuenta la aproximación para n grande $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{n}\approxeq \mathrm{e}^{r}$ de la siguiente forma:

$$\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{72}=\left(1+\frac{1}{400}\right)^{72}=\left[\left(1+\frac{1}{400}\right)^{400}\right]^{72/400}\approxeq \mathrm{e}^{72/400}$$

$$\left(1+\frac{0{\cdot}06}{4}\right)^{24}=\left(1+\frac{3}{200}\right)^{24}=\left[\left(1+\frac{3}{200}\right)^{200}\right]^{24/200}\approxeq \mathrm{e}^{72/200}$$

En consecuencia:

$$P\approxeq 150\frac{\mathrm{e}^{72/200}}{\mathrm{e}^{72/400}-1}=1090{\cdot}2$$

donde hemos redondeado por exceso. ☺

Ejercicio resuelto **20** Prueba las igualdades

(a) $\arccos x+\operatorname{arc\,sen} x=\dfrac{\pi}{2}\quad \forall x\in[-1,1]$

(b) $\tan(\operatorname{arc\,sen} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};\quad \sec(\operatorname{arc\,sen} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad \forall x\in]-1,1[$

Solución. (a) Puede comprobarse esta igualdad de muchas formas. Por ejemplo, si despejamos, podemos escribir la igualdad de la forma:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \pi/2 - \arccos x.$$

Puesto que $-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \arccos x \leqslant \pi/2$ *y en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *la función seno es inyectiva*, la igualdad anterior es equivalente a la siguiente: $x = \operatorname{sen}(\pi/2 - \arccos x)$ la cual es efectivamente cierta porque, para todo $x \in [-1, 1]$ es:

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \arccos x) = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(\arccos x) - \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(\arccos x) = x$$

(b) Para todo $x \in]-1, 1[$ es:

$$\tan(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{x}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}.$$

Ahora como:

$$\cos^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - x^2,$$

y además $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) > 0$, se sigue que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ lo que prueba la igualdad pedida.

Análogamente, se tiene que:

$$\sec(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \text{por lo antes visto} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

☺

Ejercicio resuelto **21** Prueba por inducción la igualdad:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx\right) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$$

Solución. La igualdad es evidentemente cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para un número natural n y probemos que entonces lo es también para $n + 1$. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen} x + \cdots + \operatorname{sen} nx + \operatorname{sen}(n+1)x\right) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x$$

En consecuencia, todo se reduce a probar que:

$$\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x = \operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$$

Usando que $\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a\cos a$ y que $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x = \\
&\qquad = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(2\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\,\cos\frac{n+1}{2}x\right) = \\
&\qquad = \operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left(\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right) = \\
&= \operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left(\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + \operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x + \operatorname{sen}\frac{-nx}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x
\end{aligned}$$

como queríamos probar. ☺

Ejercicio resuelto 22 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$ y $a \neq -1$. Definamos

$$\vartheta = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a+1}$$

Prueba que $\cos\vartheta = a$, $\operatorname{sen}\vartheta = b$.

Solución. Puesto que lo que conocemos es $\operatorname{tg}(\vartheta/2)$, la idea es relacionarla con $\operatorname{sen}\vartheta$ y con $\cos\vartheta$. Teniendo en cuenta que $\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2)$, que $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)$ y que $1 = \operatorname{sen}^2(x/2) + \cos^2(x/2)$, obtenemos:

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2)}{\operatorname{sen}^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}{\operatorname{sen}^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

Teniendo en cuenta ahora que $a^2 + b^2 = 1$ y que $\operatorname{tg}(\vartheta/2) = \dfrac{b}{1+a}$, se comprueba fácilmente que:

$$\cos(\vartheta) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\vartheta/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\vartheta/2)} = a, \qquad \operatorname{sen}(\vartheta) = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\vartheta/2)} = b$$

☺

Ejercicio resuelto 23 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica las propiedades:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demuestra que o bien f es $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o bien es $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Si una tal función f se anula en algún $a \neq 0$, resulta que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f(x) = f\left(a\frac{x}{a}\right) = f(a)f\left(\frac{x}{a}\right) = 0$$

y f es la función idénticamente nula. Excluido este caso, deberá ser $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado $x > 0$, tenemos que

$$f(x) = f\big(\sqrt{x}\sqrt{x}\big) = f\big(\sqrt{x}\big)f\big(\sqrt{x}\big) = \big(f\big(\sqrt{x}\big)\big)^2 > 0$$

Si ahora es $x < y$ se tendrá que

$$f(y) = f(x + (y - x)) = f(x) + f(y - x) > f(x)$$

Hemos probado así que f es estrictamente creciente. Sean ahora m y $n \neq 0$ números enteros y $x \in \mathbb{R}$. Por ser f aditiva se tiene que:

$$nf\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(n\frac{m}{n}x\right) = f(mx) = mf(x) \longrightarrow f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

Deducimos que $f(rx) = rf(x)$ para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ y todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, haciendo $x = 1$ y teniendo en cuenta que $f(1) = 1$ (consecuencia inmediata

de b)), resulta que $f(r) = rf(1) = r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Si para algún $x \in \mathbb{R}$ se tuviera que $x < f(x)$, entonces tomamos algún racional r tal que $x < r < f(x)$ para obtener la contradicción

$$0 < f(r - x) = r - f(x) < 0.$$

Análogamente, so puede ser $x > f(x)$. Concluimos que ha de ser $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ☺

2.3. Sobre el concepto de función

Estamos acostumbrados a usar la idea de "función" para expresar una relación de dependencia entre varias magnitudes; por ejemplo, decimos que "los precios están en función de los costes de producción". Toda persona con conocimientos básicos sabe que las derivadas y las integrales son herramientas que se usan para estudiar funciones. Las funciones no solamente se estudian en Cálculo; en todas las ramas de las Matemáticas se estudian funciones de distintos tipos, y puede afirmarse que el concepto de función constituye un vínculo unificador entre todas ellas.



Figura 2.18. Dirichlet

Se trata de un concepto muy básico y general que comprende las distintas interpretaciones tradicionales de una función como una tabla de valores, como una curva o como una fórmula. Por todo ello, puede parecer sorprendente que dicho concepto, con su significado actual, sea muy reciente. Suele atribuirse al matemático alemán Dirichlet la definición, en 1837, del concepto moderno de función. Antes de llegar aquí hubo de recorrerse un largo camino que empieza con la publicación en 1748 del libro de Leonhard Euler *Introductio in analysin infinitorum* en cuyo primer capítulo, titulado significativamente "De Functionibus in genere", esto es, "Sobre las funciones en general", Euler da la siguiente definición:

> *Una función de una cantidad variable es cualquier expresión analítica formada a partir de dicha cantidad variable y números o cantidades constantes.*

También fue Euler quien usó por primera vez la notación $f(x)$ para indicar el valor de una función f en un valor x de la variable. Euler no precisaba lo que entendía por "cualquier expresión analítica" pero, sin duda, incluía las series, fracciones y productos infinitos y primitivas. Después de dar esta definición, Euler distingue entre varios tipos de funciones según que puedan o no representarse por medio de una sola expresión analítica.

En el primer libro de Cálculo *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (L'Hôpital, 1696), como ya se indica en su propio título, lo que se estudia son curvas, no funciones. Esto no tiene nada de extraño. Los métodos del Cálculo Infinitesimal eran todavía muy recientes y sus razonamientos con frecuencia oscuros y confusos, por eso los matemáticos de la época preferían fundamentar sus resultados geométricamente porque, desde Euclides,



Figura 2.19. Euler

El libro de Euler *Introductio in analysin infinitorum*, del que hay traducción al español, es considerado como el tercero más influyente en toda la historia de las matemáticas (el primero serían los *Elementos* de Euclides (300 adC) y el segundo los *Principia* (1687) de Newton) y tuvo una amplia difusión. En el prefacio de dicho libro, Euler, afirmaba que el Análisis Matemático es la ciencia general de las variables y sus funciones. Esto, que hoy día nos parece una evidencia, estaba muy lejos de serlo en el siglo XVIII. De hecho, matemáticos como Newton, Leibniz, los hermanos Bernouilli y otros muchos en los siglos XVII y XVIII, se expresaban en términos de curvas, superficies, áreas, líneas tangentes.

se había considerado la geometría como el paradigma de la claridad y la perfección lógico – deductiva.

La necesidad de precisar el concepto de función surgió poco después, de forma muy natural, en el estudio de las vibraciones planas de una cuerda elástica tensa, sujeta por sus extremos, cuya posición inicial en el plano viene dada por una función conocida $\psi(x)$. D'Alembert (1749) y Euler (1750) obtuvieron esencialmente la misma solución, pero discreparon sobre el tipo de función inicial $\psi(x)$ permitida. Mientras que, según D'Alembert, la posición inicial debía venir dada por una función suave (derivable dos veces), Euler insistía en que la evidencia física imponía la consideración de funciones más generales (no derivables, con picos). Él mismo propuso como posición inicial de la cuerda una línea poligonal. Otro matemático, Daniel Bernouilli, propuso en 1753 una solución del problema que tenía como consecuencia que la función $\psi(x)$ podía representarse como suma de una serie trigonométrica infinita. Una situación muy similar a ésta se produjo unos años después, en 1822, como consecuencia de los trabajos de Jean B. Joseph Fourier sobre la propagación del calor.

Los detalles de toda esta historia son muy interesantes pero imposibles de resumir en unas pocas líneas y, además, para poderlos entender hay que tener algunos conocimientos de Análisis Matemático. En esencia, se trata de lo siguiente. En la segunda mitad del siglo XVIII y primera del XIX, al mismo tiempo que los matemáticos seguían considerando que las funciones debían ser continuas y derivables, salvo a lo sumo en una cantidad finita de "puntos especiales" (el mismo Euler tenía esta idea), se estaban desarrollando métodos para resolver problemas cada vez más complejos que permitían representar "funciones cualesquiera" por medio de expresiones analíticas, principalmente, series de Fourier. Se suponía que una representación de este tipo debía "transmitir su regularidad" a la función representada pero, por otra parte, ésta podía ser muy general. El corazón del problema estaba en la confusión de dos conceptos, aparentemente iguales pero muy distintos de hecho, el de función y el de su representación analítica. La separación de estos conceptos llevó a considerar una función con independencia de su representación analítica. De esta forma una función quedaba reducida a un conjunto de valores numéricos completamente independientes asociados a una o varias variables, que es la idea subyacente a la definición moderna debida a Dirichlet (1837):

> "y es una función de una variable x, definida en un intervalo $a < x < b$, si para cada valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor concreto de la variable y. Además, es irrelevante la forma en la que esta correspondencia se establezca."

Esta nueva idea de función llevó a investigar nuevos tipos de funciones que, con frecuencia, tenían un comportamiento inusual. En 1854 Riemann dio un ejemplo de función integrable con infinitas discontinuidades en todo intervalo de longitud positiva. En 1872 Weierstrass sorprende a la comunidad matemática con una función continua que no es derivable en ningún punto. A estos ejemplos de funciones "patológicas" pronto les siguen otros. En el siglo XIX la necesidad de una fundamentación rigurosa del Análisis Matemático se hace evidente. El concepto de función sigue en el centro de atención y, aunque dicho concepto siguió discutiéndose casi hasta el final del siglo, hoy se reconoce a Dirichlet haber sido el primero en considerar seriamente la idea de función como una "correspondencia arbitraria".

Para ampliar la información pueden visitarse los siguientes sitios en Internet.

Sobre la evolución del concepto de función en
http://www.maa.org/pubs/Calc_articles/ma001.pdf.

Las series de Fourier y el desarrollo del Análisis en el siglo XIX por Fernando Bombal en http://www.ma2.us.es/seminarios/four.pdf.

2.3.1. El desarrollo del Álgebra y la invención de los logaritmos

Con una calculadora de bolsillo, puedes hacer en una hora cálculos que a un astrónomo de los siglos XV o XVI le hubiesen llevado semanas o meses realizar. En aquella época hacer multiplicaciones, divisiones, calcular raíces cuadradas o potencias eran operaciones que requerían mucho tiempo y esfuerzo. La explicación de esto es que el desarrollo del Álgebra fue relativamente tardío. El descubrimiento de las cantidades inconmensurables, y la carencia de una teoría aritmética de las mismas, tuvo como consecuencia el abandono del Álgebra en favor de la Geometría. Se desarrollo así una especie de "álgebra geométrica" en la que los números se representaban por segmentos de línea y las operaciones aritméticas fueron sustituidas por construcciones geométricas. Las ecuaciones lineales y cuadráticas fueron resueltas con técnicas geométricas, evitándose así el problema de las magnitudes inconmensurables. De esta forma en las matemáticas griegas el razonamiento geométrico llegó a considerarse como el modelo de razonamiento matemático riguroso. Y así siguió siendo durante más de 2000 años.

Esta "álgebra geométrica" fue la causa del retraso en el desarrollo del Álgebra como disciplina independiente. Otra dificultad adicional estaba en el sistema de numeración romano, un sistema de numeración no posicional, que fue el utilizado en Occidente hasta el siglo XI. El sistema de numeración decimal que actualmente usamos, el cero incluido, tuvo su origen en la India y llegó a Occidente a través de los árabes, por eso los nuevos números se llamaron "números arábigos". La misma palabra "Álgebra" nace en el siglo IX y hace referencia al título del libro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah* del nombre de cuyo autor, el matemático Persa, Muhammad ibn-Musa al-Jwarizmi (c.780-850), deriva la palabra "algoritmo".

La paulatina adopción en toda Europa a lo largo de los siglos XI, XII y XIII de los "números arábigos" supuso un extraordinario avance que propició la expresión simbólica de las operaciones aritméticas, iniciándose así el desarrollo del Álgebra como disciplina independiente de la Geometría[4]. En el siglo XV ya se usan en los cálculos los números negativos y las fracciones,

[4]Nos referimos, claro está, al Álgebra clásica, esto es, el estudio de las ecuaciones polinómicas y de la naturaleza y propiedades de sus raíces. El Álgebra moderna es el estudio de las estructuras axiomáticas.

pero los primeros progresos realmente notables no llegaron hasta el siglo XVI, gracias a los trabajos de matemáticos como Gerolamo Cardano (1501-1576) que publicó las soluciones de algunas ecuaciones de tercer y cuarto grado en su libro *Ars magna* (1545), y François Viète (1540-1603) que, entre otras cosas, propuso un sistema simbólico que le permitió representar de forma general distintos tipos de ecuaciones.

Hoy nos parece inconcebible una Matemática sin un lenguaje simbólico apropiado, pero éste se desarrolló lentamente a lo largo de los siglos XVI-XVII. Algunos de los siguientes datos están sacados del sitio Web The History of Mathematical Symbols.

> La primera aparición impresa de los símbolos $+$ y $-$ fue en la aritmética de John Widmann, publicada in 1489 in Leipzig. El autor del primer libro de texto sobre álgebra en lengua alemana impreso en 1525, Christoff Rudolff, usa estos símbolos con su significado actual. Durante mucho tiempo se usaron solamente en Álgebra antes de que se generalizara su uso en aritmética.
>
> Había una gran variedad de símbolos para la multiplicación. Fue el matemático inglés William Oughtred quien en su obra *Clavis Mathematicae*, publicada en 1631, dio al símbolo $\times$ el significado que tiene hoy día.
>
> El signo para la igualdad que usamos actualmente fue introducido por el matemático y médico inglés Robert Recorde en su libro *The Whetstone of Witte* (1557). No fue inmediatamente aceptado pues, como ocurría con gran parte de la notación matemática de este período, cada uno tenía su propio sistema, pero hacia 1700 el signo $=$ era ya de uso general.
>
> Aunque las fracciones decimales eran conocidas desde antiguo, no eran usadas con frecuencia debido a la confusa notación empleada para representarlas. Fue Neper quien introdujo en 1616 el separador decimal (coma o punto), lo que facilitó mucho el uso de las fracciones decimales.
>
> Los símbolos para las desigualdades, $<$ y $>$, con su significado actual fueron introducidos por el matemático inglés Thomas Harriot (1560-1621) en su obra *Artis Analyticae Praxis* publicada en Londres en 1631.

En el siglo XV la trigonometría esférica fue adquiriendo cada vez mayor importancia por sus aplicaciones para la navegación astronómica, en la cual debe resolverse un triángulo esférico para trazar la ruta del navío. Para facilitar los cálculos, se elaboraron numerosas tablas trigonométricas en las que trabajaron matemáticos como Copérnico (1473-1543), Tycho Brahe (1546-1601), Kepler (1571-1630) y otros. Los cálculos para la realización de estas tablas eran largos y penosos. En este contexto tuvo lugar la invención de los logaritmos por John Neper.

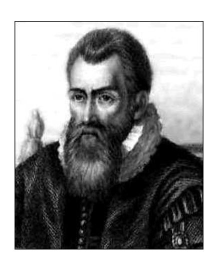


Figura 2.20. John Napier

John Napier o Neper introdujo los logaritmos en su libro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614). Este trabajo tenía treinta y siete páginas explicando la naturaleza de los logaritmos y noventa páginas de tablas de logaritmos de funciones trigonométricas en las que Neper trabajó durante 20 años antes de publicar sus resultados.

Al principio, Neper llamó a los exponentes de las potencias “numeros artificiales”, pero más tarde se decidió por la palabra logaritmo, compuesta por los términos griegos *logos* (razón) y *aritmos* (número). En el año 1615 el matemático inglés Henry Briggs (1561-1630) visitó a Neper en Edimburgo, y le convenció para modificar la escala inicial usada por éste. Nacieron así los logaritmos de base 10 que fueron divulgados por el físico alemán Kepler, extendiéndose su uso en relativamente poco tiempo por toda Europa.

> *Los logaritmos son números, que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, a través de esto se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones transformándolo a algo completamente simple a través de la substitución de la multiplicación por la adición y la división por la substracción. Además el cálculo de las raíces se realiza también con gran facilidad.*
>
> Henry Briggs

Los logaritmos pasaron a ser una herramienta muy valorada, en especial entre los astrónomos. Laplace se refiere a esto en la siguiente frase.

> *Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días, el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos.*
>
> Pierre Simon Laplace

2.4. Lo que debes haber aprendido en este capítulo

- El concepto de función y el formalismo que usamos para definir una función.
- Las operaciones con funciones. La composición de funciones.
- Los conceptos de función monótona y de inversa de una función inyectiva.
- Las definiciones y propiedades principales de las funciones logarítmicas y exponenciales.
- Las definiciones y propiedades principales de las funciones trigonométricas.
- Las definiciones y propiedades principales de las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente.
- Las definiciones y propiedades principales de las funciones hiperbólicas y sus inversas.

Como lectura adicional te recomiendo los capítulos 3 y 4 del libro de Michael Spivak [16].

Capítulo 3

Números complejos. Exponencial compleja

El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa con frecuencia por el análisis complejo.
Jaques Hadamard

3.1. Un poco de historia

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que *"ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación"* y acuñó el calificativo *"imaginarias"* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibniz *"el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser."*

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se

preocuparon de la *"naturaleza"* de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron *"a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos"*. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el resultado conocido como *Teorema Fundamental del álgebra* que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. Merece la pena que entiendas bien lo que afirma este resultado. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x+3=0, \quad 2x+3=0, \quad x^2-2=0, \quad x^2+2x+2=0$$

Cuyas soluciones

$$x=-3, \quad x=-3/2, \quad x=\pm\sqrt{2}, \quad x=-1\pm i$$

tienen sentido cuando x es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(1/5-i\sqrt{2})x^2-8x+3-i/\sqrt{3}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de *"números complejos"* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Los números complejos son una herramienta básica de cálculo. Son especialmente útiles para trabajar con funciones sinusoidales, y por eso se hace uso constante de ellos siempre que representamos una señal por medio de dichas funciones, y no hay que olvidar que ése es el propósito básico de los *"métodos de Fourier"*. La *Transformada de Fourier Discreta*, una herramienta fundamental en el tratamiento digital de señales, toma valores complejos. Las *transformadas de Fourier y de Laplace* son funciones complejas. La *transformada* z, al igual que otras transformadas de uso frecuente, se define como una serie de números complejos. La función exponencial compleja desempeña un papel fundamental en el estudio de los sistemas LTI (sistemas lineales invariantes en el tiempo) y también en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales.

3.2. Operaciones básicas con números complejos

3.1 Definición. Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por

$$(x,y)+(u,v) = (x+u,y+v) \tag{3.1}$$
$$(x,y)(u,v) = (xu-yv,xv+yu) \tag{3.2}$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-x,-y)$ es el opuesto de (x,y), y todo $(x,y)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y producto") es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman *números complejos*.

3.2.1. Comentarios a la definición de número complejo

No debes olvidar que cada concepto matemático tiene sentido dentro de una determinada estructura. Con frecuencia, cuando sobre un mismo conjunto hay definidas varias estructuras, la terminología que se usa indica la estructura a la que nos referimos. Eso pasa en $\mathbb{R}^2$ donde conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Usualmente en $\mathbb{R}^2$ se consideran las siguientes estructuras.

- Ninguna. Es decir, solamente consideramos que $\mathbb{R}^2$ es un conjunto. En tal caso llamamos a sus elementos *pares ordenados de números reales*.
- La estructura de espacio vectorial. Esto es, vemos $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial real. En tal caso a sus elementos los llamamos *vectores*.
- La estructura de espacio euclídeo que se obtiene añadiendo a la estructura de espacio vectorial la distancia euclídea definida por el producto escalar usual. Esto es, vemos $\mathbb{R}^2$ como el plano euclídeo de la geometría elemental. En este caso a sus elementos los llamamos *puntos*. La misma terminología se emplea cuando se considera en $\mathbb{R}^2$ la estructura de espacio afín o de espacio topológico.
- La estructura de cuerpo definida por las operaciones (3.1) y (3.2). En tal caso, a los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama *números complejos*.

Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo concepto matemático tiene sentido propio dentro de una determinada estructura matemática. Por ello, a un elemento de $\mathbb{R}^2$ se le llama número complejo cuando se va a usar el producto definido en (3.2) que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de $\mathbb{R}^2$.

3.2.2. Forma cartesiana de un número complejo

El símbolo usual (x,y) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (x,y). Para convencerte calcula, usando la definición (3.2), $(1,-1)^4$. Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$$
$$(x,0)(y,0)=(xy,0)$$

Esto indica que los números complejos de la forma $(x, 0)$ se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos más precisos, $\mathbb{R} \times \{0\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(x, 0)$ por el número real x. Es decir, hacemos la identificación $(x, 0) = x$.

Fíjate que con dicha identificación el producto $x(u, v)$ tiene dos posibles interpretaciones: producto del escalar real x por el vector (u, v) (estructura vectorial de $\mathbb{R}^2$) y producto del complejo $(x, 0)$ por el complejo (u, v). Pero ambos coinciden y son iguales a (xu, xv).

El número complejo $(0, 1)$ lo representaremos por i y lo llamaremos *unidad imaginaria*. Con ello tenemos que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Ahora podemos escribir

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

Se dice que $x + iy$ es la *expresión cartesiana* (también se le llama *expresión binómica*) del número complejo (x, y). El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(x + iy)(u + iv) = xu + i^2 yv + i(xv + yu) = xu - yv + i(xv + yu)$$

3.2 Definición. Se dice que x es la *parte real* e y es la *parte imaginaria* del número complejo $x + iy$.

Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

Notación. Es costumbre representar los números complejos con las letras z y w y reservar las letras x, y, u, v para representar números reales. Una expresión de la forma $z = x + iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y. Se escribe $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para representar las partes real e imaginaria de z.

3.2.3. Comentarios a la definición usual $i = \sqrt{-1}$

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

Naturalmente, el error procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión $\sqrt{-1}$ *no puedes interpretar que* -1 *es el número real* -1 (porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), *sino que tienes que interpretar* -1 *como el número complejo* -1 (espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos *sin haberlas definido y dando por supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos*.

Antes de escribir $\sqrt{-1}$ hay que definir qué significa $\sqrt{z}$ para $z \in \mathbb{C}$. Cuando lo hagamos veremos ¡sorpresa! que *la igualdad* $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$, válida cuando $z, w \in \mathbb{R}^+$, *no es cierta en general cuando* $z, w \in \mathbb{C}$.

Todavía más disparatado es *definir* $i = \sqrt{-1}$ sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones) $i = \sqrt{-1}$ y a continuación se dice que los números de la forma $a + ib$ son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que $1 = -1$. Todavía pueden hacerse peor las cosas. Recientemente he encontrado en un texto de una institución de educación a distancia escrito por varios profesores la siguiente asombrosa definición: $i = +\sqrt{-1}$.

3.2.4. No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero también perdemos algo. Te recuerdo que $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. Es decir, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: ¡nunca escribas desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

3.3. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo

Es usual representar el número complejo $z = x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

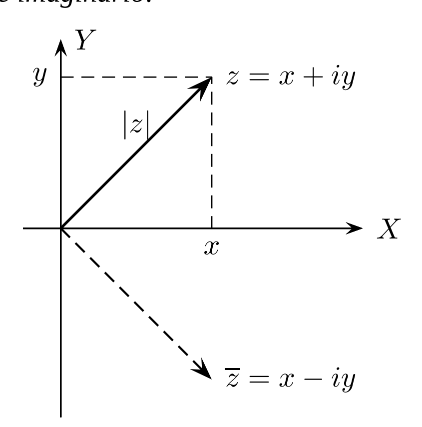


Figura 3.1. Representación de un número complejo

Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

$$\overline{z} = x - iy$$

y el **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observa que $\sqrt{x^2 + y^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $x^2 + y^2$.

Geométricamente, $\overline{z}$ es la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o **norma euclídea** del vector (x, y) (ver figura 3.1). La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$ y es la distancia euclídea entre los respectivos puntos del plano.

La representación gráfica de la suma es la usual para la suma de vectores. Dos números complejos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 3.2) es $z + w$ (la otra diagonal es $z - w$).

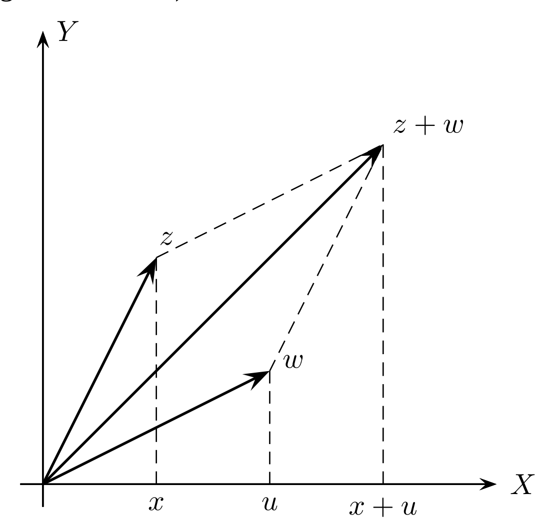


Figura 3.2. Suma de números complejos

Las siguientes propiedades de la conjugación compleja son de comprobación muy sencilla.

3.3 Proposición. *Cualesquiera sean los números complejos z y w se verifica que:*

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}. \tag{3.3}$$

El siguiente resultado establece las principales propiedades del módulo de un número complejo. Como verás son muy parecidas a las propiedades del valor absoluto y su demostración es prácticamente la misma.

3.4 Teorema. *Cualesquiera sean los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que:*

a)

$$\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \tag{3.4}$$

En particular, $\operatorname{Re} z = |z|$ *si, y sólo si,* $z \in \mathbb{R}^+_o$.

b) El módulo de un producto es igual al producto de los módulos.

$$|zw| = |z||w| \tag{3.5}$$

c) El módulo de una suma es menor o igual que la suma de los módulos.

$$|z+w| \leqslant |z|+|w| \qquad \textit{(desigualdad triangular)} \tag{3.6}$$

La desigualdad triangular es una igualdad si, y solamente si, alguno de los números es cero o uno de ellos es un múltiplo positivo del otro; equivalentemente, están en una misma semirrecta a partir del origen.

Demostración. La demostración de a) es inmediata. Para demostrar b) y c) usaremos la igualdad $|z|^2 = z\overline{z}$ que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, y la estrategia (1.8) que ya usamos para probar las propiedades análogas del valor absoluto.

b) Basta observar que $|zw|$ y $|z||w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$$

c) Es suficiente probar que $|z+w|^2 \leqslant (|z|+|w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w = \\ &= |z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leqslant |z|^2+|w|^2+2|\mathrm{Re}\,(z\overline{w})| \leqslant \\ &\leqslant |z|^2+|w|^2+2|z\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||w| = \\ &= (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

Evidentemente, si $z=0$ o si $w=0$, se verifica la igualdad. Supongamos que $z\neq 0$ y $w\neq 0$. De lo anterior deducimos que se verifica la igualdad $|z+w|=|z|+|w|$ si, y sólo si, $\mathrm{Re}\,z\overline{w} = |z\overline{w}|$, esto es, si $z\overline{w}\in\mathbb{R}^+$, o lo que es lo mismo $z\overline{w}=\rho$ donde $\rho\in\mathbb{R}^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente, multiplicando por w, como $z|w|^2=\rho w$; y dividiendo ahora por $|w|^2$, obtenemos $z=\lambda w$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}^+$, lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen. □

Observación. Para expresar un cociente de complejos en forma cartesiana se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{u+iv}{x+iy} = \frac{(u+iv)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{ux+vy}{x^2+y^2} + i\frac{vx-uy}{x^2+y^2}.$$

3.3.1. Forma polar y argumentos de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z=x+iy\neq 0$ podemos escribir

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right)$$

Como $\left(\dfrac{x}{|z|},\dfrac{y}{|z|}\right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|},\frac{y}{|z|}\right) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta\in\mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura (3.3).

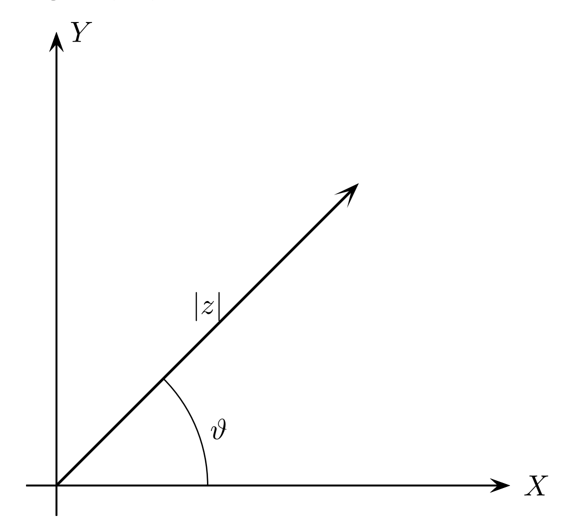


Figura 3.3. Forma polar de un número complejo

Dado $z\in\mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t\in\mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos t, \mathrm{sen}\, t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\mathrm{Arg}(z)$.

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z) = \{t\in\mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i\,\mathrm{sen}\, t)\}}$$

Observa que

$$s,\, t\in\mathrm{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(t) = \cos(s)\\ \sin(t) = \sin(s)\end{array}\right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \ \text{ para algún } \ k\in\mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_0 \in \mathrm{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$, es decir, $\mathrm{Arg}(z) = t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y se le llama **argumento principal** de z. No es difícil comprobar (véase el ejercicio resuelto (28)) que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por:

$$\boxed{\arg(z) = \begin{cases}\mathrm{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } y < 0,\, x < 0\\ -\pi/2 & \text{si } y < 0,\, x = 0\\ \mathrm{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0\\ \pi/2 & \text{si } y > 0,\, x = 0\\ \mathrm{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0,\, x < 0\end{cases}}$$

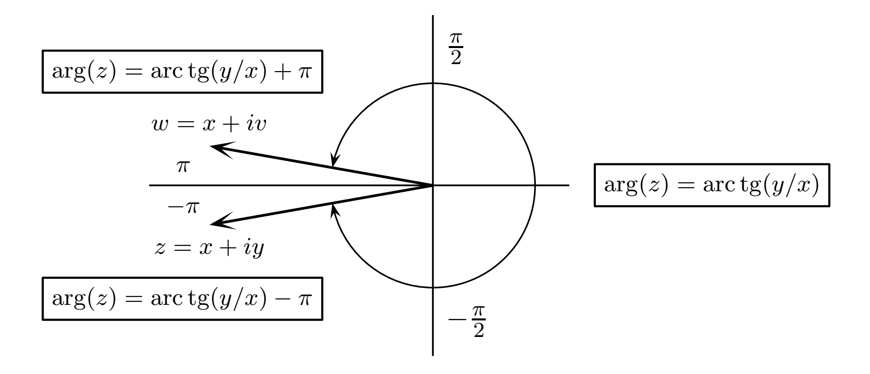


Figura 3.4. Argumento principal

Igualdad de dos números complejos en forma polar

Para que dos números complejos escritos en forma polar $z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ y $w = |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, sean iguales es condición necesaria y suficiente que los módulos sean iguales $|z| = |w|$, y los argumentos sean iguales, $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w)$, y ésta condición equivale a que $\vartheta - \varphi$ sea un múltiplo entero de 2π.

$$|z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) = |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = |w| \\ \vartheta - \varphi = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

3.3.2. Observaciones a la definición de argumento principal

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos en el semiplano superior de 0 a π y en el semiplano inferior de 0 a $-\pi$.

Fíjate que si tomas un número complejo que esté situado en el tercer cuadrante $z = x + iy$ con $x < 0, y < 0$ y supones que y es próximo a 0, su argumento principal está próximo a $-\pi$, y si tomas un número complejo que esté situado en el segundo cuadrante, $w = x + iv$ con $x < 0, v > 0$, y supones que v es próximo a 0, su argumento principal está próximo a π. Además, la distancia $|w - z| = |v - y| = v - y$ es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de $-\pi$ a π cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.

Peor todavía dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud 2π, digamos $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, entonces dichos argumentos saltan de α a $\alpha + 2\pi$ cuando atravesamos la semirrecta $(x, y) = \rho(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $(\rho > 0)$. En particular, si tomamos argumentos en el intervalo $[0, 2\pi[$ (cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en *el eje real positivo*. Bien, sucede que *la extensión a* $\mathbb{C}$ de algunas funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ (el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en $\mathbb{R}^+$ y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque

preferimos introducir una discontinuidad en $\mathbb{R}^-$ a perder la continuidad en $\mathbb{R}^+$.

3.3.2.1. Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos.

3.5 Proposición. *Sean z, w conplejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces se verifica que $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta) \\ w &= |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \end{aligned}$$

Usando ahora las igualdades (2.4) y (2.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|(cos(\vartheta + \varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta + \varphi)) \end{aligned}$$

Lo que nos dice que $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$. □

Hemos probado que *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.*

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Observa que, como consecuencia de la proposición (3.5), tenemos que $\arg z + \arg w \in \operatorname{Arg}(zw)$; es decir, $\arg z + \arg w$ es *un* argumento de zw, pero lo que no podemos afirmar es que $\arg z + \arg w$ sea igual al argumento principal de zw. Naturalmente, esto ocurrirá cuando $-\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi$.

$$\boxed{\arg z + \arg w = \arg(zw) \Longleftrightarrow -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi} \tag{3.7}$$

La siguiente igualdad, muy útil, conocida como *fórmula de De Moivre*, se demuestra fácilmente por inducción a partir de la proposición (3.5).

3.6 Proposición (Fórmula de De Moivre). *Si z es un complejo no nulo, ϑ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$, es decir:*

$$\boxed{z^n = \big(|z|(\cos\vartheta + i\ \operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta), \qquad \vartheta \in \operatorname{Arg}(z),\ n \in \mathbb{Z}} \tag{3.8}$$

3.3.3. Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

Donde $\vartheta = \arg z$. Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n–ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k de la forma $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\varphi_k + i \operatorname{sen}\varphi_k)$$

tal que $(w_k)^n = z$. Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k. Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm$$

Es decir, si k y q dan el mismo resto al dividirlos por n entonces $w_k = w_q$. Deducimos que para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n–ésimas distintas de z.

Hemos obtenido que las n raíces n–ésimas de z vienen dadas por

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1} \tag{3.9}$$

Observa que definiendo $u = \cos(2\pi/n) + i \operatorname{sen}(2\pi/n)$, los números $u_0 = 1,\ u,\ u^2, \dots, u^{n-1}$ son las raíces n–ésimas de la unidad. Podemos escribir las raíces n–ésimas de z en la forma $z_k = z_0\, u^k$. Como multiplicar por u es un giro de amplitud $2\pi/n$, deducimos que las n raíces de z se obtienen girando la raíz n–ésima principal, z_0, con giros sucesivos de amplitud $2\pi/n$. Es decir, si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

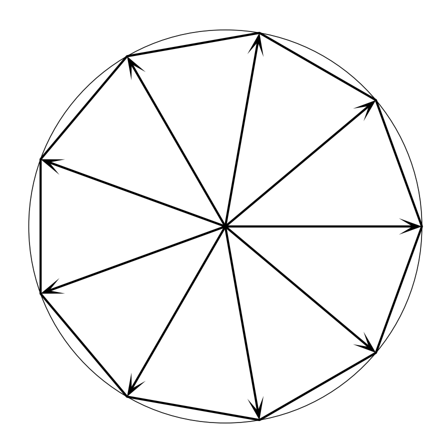


Figura 3.5. Raíces novenas de la unidad

De entre todas las raíces n–ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la **raíz n-ésima principal**, que está definida por

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right)} \tag{3.10}$$

Observa que $\arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \dfrac{\arg z}{n}$ y, en consecuencia:

$$-\frac{\pi}{n} < \arg\left(\sqrt[n]{z}\right) \leqslant \frac{\pi}{n} \tag{3.11}$$

Además, la raíz n-ésima principal de z es la única de las raíces n-ésimas de z cuyo argumento principal está en el intervalo $]-\pi/n, \pi/n]$. Dicho de otra forma, la raíz n-ésima principal de un número complejo está situada en una región angular, simétrica con respecto al eje real y de amplitud $2\pi/n$, que incluye a su borde superior pero no incluye a su borde inferior.

3.3.3.1. Notación de las raíces complejas

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo). Es decir, acabamos de *extender* la función raíz n-ésima de $\mathbb{R}^+$ a todo $\mathbb{C}$ conservando el significado que esa función tenía en $\mathbb{R}^+$. Observa, sin embargo, que si $x \in \mathbb{R}^-$ y n es impar, la raíz real de orden n de x no coincide con el valor principal de la raíz de orden n de x considerado como número complejo. Este pequeño inconveniente no es tal si tenemos claro dónde estamos trabajando si en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$; esto es, si cuando n es impar estamos considerando funciones raíces n-ésimas definidas en $\mathbb{R}$, o si estamos considerando dichas funciones definidas en $\mathbb{C}$. Observa que para n par no hay confusión alguna, solamente cuando n es impar y x es un número real negativo hay que tener cuidado. Por ejemplo, $\sqrt[3]{-1} = -1$ cuando consideramos a la raíz cúbica como una función real, y $\sqrt[3]{-1} = \cos(\pi/3) + i\operatorname{sen}(\pi/3)$ cuando consideramos a la raíz cúbica como función compleja. Programas de cálculo simbólico, como *Mathematica*, siguen precisamente este convenio y usan la notación $\sqrt[n]{z}$ para el valor principal de la raíz n-ésima del número complejo z.

Mucho peor es lo que ocurre cuando se usan notaciones disparatadas como suele hacerse en muchos libros de texto. Como es posible que te las encuentres, conviene que sepas a qué atenerte. El hecho es que en muchos textos se representa con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ *el conjunto formado por todas las raíces n-ésimas del número complejo z*. Pues bueno… *¡acabamos de perder la función raíz n-ésima real y compleja!* Porque, digo yo, si hemos de ser coherentes, habrá que entender que $\sqrt[27]{1}$ ya no vale 1 sino que es un conjunto formado por 27 números complejos. Y las reglas que conocemos para las raíces reales ya ni siquiera pueden formularse. ¿Qué sentido tiene ahora escribir que $\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{2}$? ¿Es una igualdad entre conjuntos? ¿Debemos multiplicar cada elemento del conjunto $\sqrt[5]{2}$ por cada elemento del conjunto $\sqrt[5]{1}$ y comprobar que de esa forma obtenemos todos los elementos de $\sqrt[5]{2}$? ¿Cómo hay que sumar ahora $\sqrt[3]{2} + \sqrt[7]{3}$? Porque $\sqrt[3]{2}$ debe entenderse como un conjunto de 3 elementos y $\sqrt[7]{3}$ como un conjunto de 7 elementos.

Estos ejemplos te habrán convencido de lo disparatado de esta forma de proceder. Pero hay más disparates. Alguien puede argumentar que todo esto se arregla interpretando que cuando z es real, $\sqrt[n]{z}$, representa siempre la raíz n-ésima real del número z. Bueno, pero esto no arregla el disparate de que $\sqrt[n]{z}$ no es una función, porque todavía persiste el hecho de que para z complejo no real, $\sqrt[n]{z}$ no es un número sino un conjunto de n números complejos. Lo peor de todo esto es que los autores que cometen estos disparates ni siquiera son conscientes de ellos, y usan el símbolo $\sqrt[n]{z}$ en sucesiones, límites o integrales como si de una función usual se tratara. Habría que decirles ¡oiga! si para usted $\sqrt[n]{z}$ son n números, ¿qué significado tiene una expresión como $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right)$? Pues eso, ni se dan cuenta.

Finalmente, observa que en la definición (3.10) de $\sqrt[n]{z}$ interviene el argumento principal, $\arg(z)$. Por la definición dada de argumento principal, tenemos que $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ y, como ya hemos visto anteriormente, se produce una discontinuidad del argumento principal en el eje real negativo y, en consecuencia, la función $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ es discontinua en el eje real negativo. Te informo que no hay que preocuparse mucho por esta discontinuidad, de hecho es muy útil y, entre otras cosas, sirve para contar ceros de funciones. Lo que quiero es llamarte la atención sobre lo que ocurre cuando se elige el argumento principal en en el intervalo $[0, 2\pi[$. Cuando se hace así, la función $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ resulta ser discontinua en el eje real positivo. Mala cosa; con esa elección para el argumento principal, una función que era continua en $\mathbb{R}^+$, al extenderla a $\mathbb{C}$ ya no es continua en $\mathbb{R}^+$.

3.3.3.2. La igualdad $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$

En general, no es cierto que, dados dos números complejos z y w, el producto de las raíces n-ésimas *principales* de z y de w sea igual a la raíz n-ésima *principal* de zw. Lo que, evidentemente, sí es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n-ésima de zw. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$, es *una* raíz n-ésima de zw *pero no tiene por qué ser la principal*. Vamos a ver qué condiciones deben cumplirse para que $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$ sea la raíz n-ésima principal de zw. Para ello, bastará con exigir que el argumento principal de $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$ esté en el intervalo $]-\pi/n, \pi/n]$. Como suponemos que n es un número natural $n \geqslant 2$, tenemos que $-\pi < \dfrac{\arg z}{n} + \dfrac{\arg w}{n} \leqslant \pi$ y, por (3.7), deducimos que $\arg\left(\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}\right) = \dfrac{\arg z}{n} + \dfrac{\arg w}{n} = \dfrac{\arg z + \arg w}{n}$. Tenemos que:

$$\arg\left(\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}\right) = \frac{\arg z + \arg w}{n} \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right] \Longleftrightarrow -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi$$

Hemos probado que

$$\boxed{\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \Longleftrightarrow -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi}$$

Por ejemplo, si los números z y w están en el semiplano de la derecha, es decir, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$; por tanto en este caso $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ por lo que $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$. En particular, esto es cierto cuando $z, w \in \mathbb{R}^+$. Por tanto, *no perdemos ninguna de las propiedades de las raíces reales positivas al extender las raíces a* $\mathbb{C}$.

En el caso en que $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos que $\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi$, y no se cumple la condición anterior. En este caso

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 \neq 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)}$$

es decir $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de $1 = (-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1. Ahora ya sabes dónde está el error en lo que sigue:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

3.3.4. Ejercicios propuestos

---

72. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + i\,b$.

i) $(7-2i)(5+3i)$ ii) $(i-1)^3$ iii) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ iv) $\dfrac{3+i}{2+i}$

v) $\dfrac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$ vi) $(1+i)^{-2}$ vii) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ viii) $i^2(1+i)^3$

73. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

a) $f_1(z) = \overline{z}^2$ b) $f_2(z) = z^3$ c) $f_3(z) = \dfrac{1}{z}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e) $f_4(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

74. Calcula las siguientes cantidades.

a) $|(1+i)(2-i)|$ b) $\left|\dfrac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right|$ c) $|(1+i)^{20}|$ d) $|\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)|$

75. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

76. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

a) $-\sqrt{3}-i$ b) $-\sqrt{3}+i$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$ d) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

77. Expresa los siguientes números en la forma $a + i\,b$:

a) $(-1+i\sqrt{3})^{11}$ b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$ c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$ d) $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

78. Prueba que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$ el argumento principal viene dado por

$$\arg z = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}$$

Sugerencia. Ver el ejercicio resuelto (22).

79. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

80. Supuesto que $|z| = 1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

81. Sea $z = x + i\,y$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } \ 1 - x + y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } \ 1 - x + y < 0 \end{cases}$$

82. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ donde a, b, c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

83. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^3 = 1 + i$ b) $z^4 = i$ c) $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$ d) $z^8 = 1$ e) $z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0$

84. Prueba que si una ecuación polinómica con coeficientes reales admite una raíz compleja, z, entonces también admite como raíz a $\overline{z}$. Da un ejemplo de una ecuación polinómica de grado mayor que 1 que tenga como raíz compleja $1 + i$ pero no admita como raíz a $1 - i$.

85. Calcula las soluciones de las ecuaciones:

a) $z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26 = 0$; b) $z^4 + (5 + 4i)z^2 + 10i = 0$

Sugerencia. El número $1 + i$ es raíz de la ecuación del apartado a).

86. Demuestra la llamada "igualdad del paralelogramo":

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

87. Dados dos números complejos α y β, calcula el mínimo valor para $z \in \mathbb{C}$ de la cantidad $|z - \alpha|^2 + |z - \beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

88. Prueba que $\left|\dfrac{z - a}{1 - \overline{a}\,z}\right| < 1$ si $|z| < 1$ y $|a| < 1$ y también si $|z| > 1$ y $|a| > 1$.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

89. Sea w un número complejo de módulo 1. Expresa los números $w - 1$ y $w + 1$ en forma polar.

90. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)} \quad 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcula $A+iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

91. Calcula una fórmula para la suma

$$\sum_{k=-N}^{N}\big(\cos(2k\pi t)+i\operatorname{sen}(2k\pi t)\big)$$

(tu respuesta debería de ser un cociente de senos).

92. Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ y $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\ \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$. Dado un número entero $m\in\mathbb{Z}$, calcula el valor de las expresiones:

1. $1+w^m+w^{2m}+\cdots+w^{(n-1)m}$;
2. $1-w^m+w^{2m}-\cdots+(-1)^{n-1}w^{(n-1)m}$.

95. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

1. $\operatorname{sen}3\varphi=3\ \operatorname{sen}\varphi-4\ \operatorname{sen}^3\varphi$.
2. $\cos 4\varphi=8\ \cos^4\varphi-8\ \cos^2\varphi+1$.
3. $\operatorname{sen}5\varphi=5\ \operatorname{sen}\varphi-20\ \operatorname{sen}^3\varphi+16\ \operatorname{sen}^5\varphi$.

96. Representa gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$\begin{array}{llll} |z-3|\leqslant 3; & 2<|z-i|\leqslant 3; & |\arg z|<\pi/6; & |z-i|+|z+i|=4 \\ |z-1|=|z-2i|; & \left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right|=2; & \operatorname{Im}(z^2)>6; & |z-i|=\operatorname{Im}z+1 \end{array}$$

97. Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z=0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

98. Resuelve la ecuación $(z-1)^n=(z+1)^n$, donde $z\in\mathbb{C}$ y $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

99. Sea $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1+z_2+z_3=0$.

100. Si $0\leqslant\arg w-\arg z<\pi$, prueba que el área del triángulo de vértices 0, z y w viene dada por $\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}w)$.

3.3.5. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 24 Calcula la parte real e imaginaria de $\dfrac{\overline{z}}{1+z^2}$ donde $z\in\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$.

Solución. Todo lo que hay que hacer es realizar las operaciones indicadas. Pongamos para ello $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\frac{\overline{z}}{1+z^2} = \frac{x-iy}{1+(x+iy)^2} = \frac{x-iy}{1+x^2-y^2+2xyi} = \frac{(x-iy)(1+x^2-y^2-2xyi)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} =$$
$$= \frac{x+x^3-3xy^2+i(-y-3x^2y+y^3)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} =$$
$$= \frac{x+x^3-3xy^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + i\frac{-y-3x^2y+y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

Luego

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{1+z^2}\right) = \frac{x+x^3-3xy^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\overline{z}}{1+z^2}\right) = \frac{-y-3x^2y+y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

☺

Ejercicio resuelto **25** Calcula $\left|\dfrac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right|$.

Solución. Como lo que nos piden es el módulo no es preciso realizar las operaciones indicadas. Basta tener en cuenta que el módulo de un producto es el producto de los módulos y, por tanto, el módulo de un cociente es el cociente de los módulos. En consecuencia:

$$\left|\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right| = \frac{\left|2+i\sqrt{5}\right|\left|1+i\sqrt{3}\right|^3}{\left|\sqrt{5}+i\sqrt{3}\right|} = 6\sqrt{2}$$

☺

Ejercicio resuelto **26** Calcula los números complejos z tales que $w = \dfrac{2z-i}{2+iz}$ es

a) Un número real;

b) Un número imaginario puro.

Solución. Pongamos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$w = \frac{2x+i(2y-1)}{2-y+ix} = \frac{(2x+i(2y-1))(2-y-ix)}{(2-y)^2+x^2} = \frac{3x+i(-2x^2-2y^2+5y-2)}{(2-y)^2+x^2}$$

Por tanto, w es real si, y sólo si

$$-2x^2-2y^2+5y-2=0 \iff x^2+(y-5/4)^2 = 9/16$$

Es decir, z está en la circunferencia de centro $(0, 5/4)$ y radio $3/4$.

Análogamente, w es imaginario puro si, y sólo si, $x = 0$, es decir, z está en el eje imaginario. ☺

Ejercicio resuelto **27** Calcula los números complejos z tales que $w = \dfrac{z-1-i}{z+1+i}$

a) Es un número real;

b) Tiene módulo 1.

Solución. Pongamos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$w = \frac{z-1-i}{z+1+i} = \frac{x-1+i(y-1)}{x+1+i(y+1)} = \frac{\big(x-1+i(y-1)\big)\big(x+1-i(y+1)\big)}{(x+1)^2+(y+1)^2} = \\ = \frac{x^2+y^2-2+i(2y-2x)}{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

Por tanto, w es real si, y sólo si, $y = x \neq -1$, es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero y $z \neq -(1+i)$.

Es claro que $|w| = 1$ si, y sólo si

$$|z-1-i\,| = |z+1+i\,| \iff (x-1)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y+1)^2 \iff x+y=0$$

Es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto. ☺

Ejercicio resuelto 28 Comprueba que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por

$$\vartheta = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi \ \text{ si } y<0,\, x<0 \\ -\pi/2 \ \text{ si } y<0,\, x=0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) \ \text{ si } x>0 \\ \pi/2 \ \text{ si } y>0,\, x=0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi \ \text{ si } y \geqslant 0,\, x<0 \end{cases}$$

Solución. Teniendo en cuenta que para $t<0$ es $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} t < 0$ y para $0 \leqslant t$ es $0 \leqslant \operatorname{arc\,tg} t < \pi/2$, se sigue que el número ϑ definido por las igualdades anteriores verifica que $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$. Por tanto, para probar que $\vartheta = \arg(z)$ bastará que comprobemos la igualdad $z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$, es decir, las igualdades $x = |z|\cos\vartheta$, $y = |z|\operatorname{sen}\vartheta$.

Para $\vartheta = \pi$, $\vartheta = \pi/2$ y $\vartheta = -\pi/2$ dichas igualdades son evidentes.

Sea $x>0$ en cuyo caso $\vartheta = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$. En este caso, como $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$, tenemos que $\operatorname{tg}\vartheta = y/x$ y deducimos

$$\frac{1}{\cos^2\vartheta} = 1+\operatorname{tg}^2\vartheta = 1+\frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} \longrightarrow x^2 = (x^2+y^2)\cos^2\vartheta \longrightarrow x = |z|\cos\vartheta$$

donde, en la última implicación, hemos tenido en cuenta que $x>0$ y $\cos\vartheta > 0$. Deducimos también que

$$y = x\ \operatorname{tg}\vartheta = \frac{x}{\cos\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta = |z|\operatorname{sen}\vartheta$$

Consideremos $x<0$ e $y>0$. Tenemos que $\pi/2 < \vartheta = \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi < \pi$, por lo que $-\pi/2 < \vartheta - \pi < 0$, y deducimos $\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\vartheta - \pi) = y/x$. Razonando como antes obtenemos que $x^2 = (x^2+y^2)\cos^2\vartheta$. Como $x<0$ y $\cos\vartheta < 0$, se sigue que $x = |z|\cos\vartheta$. De esta igualdad deducimos, al igual que antes, que $y = |z|\operatorname{sen}\vartheta$.

Consideremos $x<0$ e $y<0$. Tenemos que $-\pi < \vartheta = \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi < -\pi/2$, por lo que $0 < \vartheta + \pi < \pi/2$, y deducimos $\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\vartheta + \pi) = y/x$. Razonando como en el caso anterior volvemos a obtener las igualdades $x = |z|\cos\vartheta$, $y = |z|\operatorname{sen}\vartheta$. ☺

Ejercicio resuelto 29 Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a) } -1+i \quad \text{b) } \frac{-\sqrt{3}+i}{1+i} \quad \text{c) } \frac{1}{-1+i\sqrt{3}}$$

Solución. a) Tenemos que $\arg(-1+i) = \operatorname{arc\,tg}(-1)+\pi = 3\pi/4$, por lo que

$$-1+i = \sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\operatorname{sen}(3\pi/4)\big)$$

b) Tenemos que

$$\arg(-\sqrt{3}+i) = \operatorname{arc\,tg}(-1/\sqrt{3}) + \pi = -\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{3}) + \pi = -\pi/6+\pi = 5\pi/6$$
$$\arg(1+i) = \operatorname{arc\,tg}(1) = \pi/4 \longrightarrow \arg\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\pi/4$$

deducimos que $\dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12} \in \operatorname{Arg}\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)$. Por tanto

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i} = \sqrt{2}\big(\cos(7\pi/12) + i\operatorname{sen}(7\pi/12)\big)$$

c) $\arg(-1+i\sqrt{3}) = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) + \pi = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) + \pi = -\pi/3+\pi = 2\pi/3$, por lo que $\arg\left(\dfrac{1}{-1+i\sqrt{3}}\right) = -2\pi/3$. Por tanto

$$\frac{1}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\big(\cos(-2\pi/3) + i\operatorname{sen}(-2\pi/3)\big)$$

☺

Ejercicio resuelto 30 Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

Solución. Sabemos que $\arg z + \arg w \in \operatorname{Arg}(zw)$; además $-2\pi < \arg z + \arg w \leqslant 2\pi$. Tenemos las siguientes posibilidades:

$$\begin{aligned}
-2\pi < \arg z + \arg w \leqslant -\pi &\longrightarrow 0 < \arg z + \arg w + 2\pi \leqslant \pi \longrightarrow \\
&\longrightarrow \arg(zw) = \arg z + \arg w + 2\pi \\
-\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi &\longrightarrow \arg(zw) = \arg z + \arg w \\
\pi < \arg z + \arg w \leqslant 2\pi &\longrightarrow -\pi < \arg z + \arg w - 2\pi \leqslant 0 \longrightarrow \\
&\longrightarrow \arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi
\end{aligned}$$

Para calcular $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ se procede de forma análoga teniendo en cuenta ahora que $\arg z - \arg w \in \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{w}\right)$ y que $-2\pi < \arg z - \arg w < 2\pi$. ☺

Ejercicio resuelto 31 Calcula los números complejos z tales que $w = \dfrac{2z-1}{z-2}$

a) Tiene argumento principal igual a $\pi/2$;

b) Tiene argumento principal igual a $-\pi/2$.

Solución. Pongamos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Como

$$\frac{2z-1}{z-2} = \frac{2x-1+2yi}{x-2+iy} = \frac{(2x-1+2yi)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2-5x+2-3yi}{(x-2)^2+y^2}$$

deducimos que $\arg w = \pi/2$ si, y sólo si, $2x^2+2y^2-5x+2=0$ e $y<0$. Como

$$2x^2+2y^2-5x+2=0 \iff (x-5/4)^2+y^2=9/16$$

deducimos que $\arg w = \pi/2$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$ que está contenida en el semiplano inferior. También También deducimos que $\arg w = -\pi/2$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$ que está contenida en el semiplano superior. ☺

Ejercicio resuelto 32 Resuelve la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ donde a, b, c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\iff z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0\\
&\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0\\
&\iff \left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0\\
&\iff \begin{cases} z=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\[2mm] z=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases}
\end{aligned}$$

Las dos soluciones obtenidas suelen expresarse en la forma

$$az^2+bz+c=0 \iff z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Observa que hemos seguido el mismo procedimiento que en el caso real[1]. Debes entender bien la igualdad

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{3.12}$$

Aquí b^2-4ac es un número complejo (en particular, puede ser real), $\sqrt{b^2-4ac}$ es su raíz cuadrada principal y $-\sqrt{b^2-4ac}$ es *la otra raíz cuadrada* (todo número complejo tiene *dos* raíces cuadradas: la principal y su opuesta). Aquí no hay positivos ni negativos, ni nada parecido ¡estamos trabajando con números complejos! Comento esto para volver a insistir en que los símbolos $+$ y $-$ tienen un carácter puramente algebraico: no indican positivo y negativo.

[1]Antes, en la enseñanza media se resolvía la ecuación $ax^2+bx+c=0$ donde a, b, c son números reales, igual que lo hemos hecho aquí. He comprobado que ahora los estudiantes llegan a la Universidad sin saberla resolver.

En general, para resolver ecuaciones con números complejos no es buena estrategia separar la ecuación en su parte real y su parte imaginaria y resolver éstas por separado, sino que debes trabajar con la variable compleja z. No olvides que con los números complejos puedes hacer las mismas operaciones que con los números reales y algunas más que no siempre puedes hacer con los números reales, como extraer raíces y otras que pronto estudiaremos. ☺

Ejercicio resuelto 33 Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + (1+i)z^2 + 5i = 0$.

Solución. Poniendo $w = z^2$, la ecuación queda $w^2 + (1+i)w + 5i = 0$, cuyas soluciones son

$$\frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 20i}}{2} = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{-18i}}{2} =$$
$$= \frac{-(1+i) \pm \sqrt{18}(\cos(-\pi/4) + i\operatorname{sen}(-\pi/4))}{2} =$$
$$= \frac{-(1+i) \pm \sqrt{18}(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2})}{2} = \frac{-(1+i) \pm 3(1-i)}{2} = \begin{cases} 1-2i \\ -2+i \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación dada son las raíces $\pm\sqrt{1-2i}$ y $\pm\sqrt{-2+i}$. Tenemos que $\arg(1-2i) = -\operatorname{arc\,tg} 2$ y $\arg(-2+i) = \pi - \operatorname{arc\,tg}(1/2)$. Usando que $\cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$, obtenemos:

$$\pm\sqrt{1-2i} = \pm\sqrt[4]{5}\big(\cos\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} 2}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} 2}{2}\right)\big)$$
$$\pm\sqrt{-2+i} = \pm\sqrt[4]{5}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}(1/2)}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}(1/2)}{2}\right)\right)$$

Observa que las soluciones son números complejos pero no son complejos conjugados. La ecuación dada tiene coeficientes complejos. ☺

Ejercicio resuelto 34 Calcula las soluciones de las ecuaciones:

a) $z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26 = 0$; b) $z^4 + (5+4i)z^2 + 10i = 0$

Sugerencia. El número $1+i$ es raíz de la ecuación del apartado a).

Solución. Haremos el apartado a). Para ello usaremos un resultado, que se supone que debes conocer, según el cual si un polinomio $P(x)$ se anula para un valor α, $P(\alpha) = 0$, entonces es divisible por $x - \alpha$, es decir $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ donde $Q(x)$ es un polinomio de un grado menor que $P(x)$.

Como la ecuación dada es polinómica con coeficientes reales y nos dicen que $1+i$ es raíz, también es raíz $1-i$. Por tanto, el polinomio dado debe de ser divisible por $(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^2 - 2z + 2$. Haciendo la división, obtenemos que

$$z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26 = (z^2 + 4z + 13)(z^2 - 2z + 2)$$

Lo que queda ya es inmediato. ☺

Ejercicio resuelto **35** Demuestra la llamada "igualdad del paralelogramo":

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \quad (z,w\in\mathbb{C}) \tag{3.13}$$

y explica su significado geométrico.

Solución. Basta realizar las operaciones indicadas. Tenemos que:

$$|z+w|^2=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w=|z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) \tag{3.14}$$

$$|z-w|^2=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=z\overline{z}+w\overline{w}-z\overline{w}-\overline{z}w=|z|^2+|w|^2-2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) \tag{3.15}$$

Sumando estas igualdades se obtiene la igualdad del enunciado. Su significado geométrico es que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados. ☺

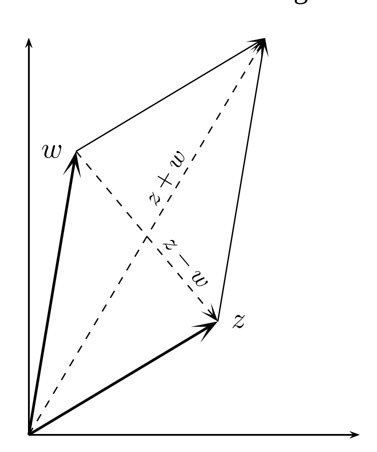


Figura 3.6. Igualdad del paralelogramo

Ejercicio resuelto **36** Dados dos números complejos α y β, calcula el mínimo valor para $z\in\mathbb{C}$ de la cantidad $|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

Solución. La sugerencia y un poco de intuición deben ser suficientes para hacer este ejercicio. La intuición lo que dice es que el punto que buscamos debe ser la el punto medio del segmento de extremos α y β, es decir el punto $u=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Ahora debemos relacionar la cantidad que nos dan con $|z-u|$. Usando la igualdad del paralelogramo (3.13) con z sustituido por $z-\alpha$ y w por $z-\beta$ y escribiéndola de derecha izquierda, tenemos que

$$2\big(|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2\big)=|2z-\alpha-\beta|^2+|\beta-\alpha|^2$$

de donde

$$|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2=2\left|z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^2+\frac{1}{2}|\beta-\alpha|^2$$

Deducimos que $|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2\geqslant\dfrac{1}{2}|\beta-\alpha|^2$ para todo $z\in\mathbb{C}$ y la igualdad se da si, y sólo si, $z=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Ejercicio resuelto 37 Prueba las desigualdades:

a) $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$

b) $|z + w| \geqslant \frac{1}{2}(|z| + |w|)\left|\frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|}\right|$

donde z, w son números complejos no nulos. Estudia también cuándo se da la igualdad en cada una de dichas desigualdades.

Sugerencia. Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

Solución. Siguiendo la sugerencia, es muy fácil hacer el apartado a). Haremos el apartado b). Siguiendo la sugerencia, elevamos al cuadrado y comprobamos que la diferencia es positiva.

$$|z+w|^2 - \frac{1}{4}(|z| + |w|)^2\left|\frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|}\right|^2 =$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{z}w) - \frac{1}{4}(|z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|)\left(2 + 2\frac{\operatorname{Re}(\overline{z}w)}{|z||w|}\right) =$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{z}w) - \frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|w|^2 - |z||w| - \frac{1}{2}\big(|z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|\big)\frac{\operatorname{Re}(\overline{z}w)}{|z||w|} =$$

$$= \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|) + 2\frac{\operatorname{Re}(\overline{z}w)}{|z||w|}|z||w| - \frac{1}{2}\big(|z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|\big)\frac{\operatorname{Re}(\overline{z}w)}{|z||w|} =$$

$$= \frac{1}{2}(|z| - |w|)^2 - \frac{1}{2}\big(|z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|\big)\frac{\operatorname{Re}(\overline{z}w)}{|z||w|} =$$

$$= \frac{1}{2}(|z| - |w|)^2\left(1 - \frac{\operatorname{Re}(\overline{z}w)}{|z||w|}\right) \geqslant 0$$

Porque $\operatorname{Re}(\overline{z}w) \leqslant |\overline{z}w| = |z||w|$. La igualdad se da si, y sólo si, $|z| = |w|$ o $\operatorname{Re}(\overline{z}w) = |\overline{z}w|$ lo que equivale a que $\overline{z}w = \lambda \in \mathbb{R}^+$ que equivale a que z y w estén en una misma semirrecta a partir del origen, o sea, que tengan los mismos argumentos.

Ejercicio resuelto 38 Expresa en forma binómica los números

$$(1+i)^{25}, \quad (\sqrt{3}+i)^{37}, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{24}$$

Solución. Naturalmente, se trata de aplicar la fórmula de De Moivre y para ello todo lo que hay que hacer es expresar los números en su forma polar. Consideremos el número $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}$. Tenemos que $|z| = \sqrt{2}$ (cociente de los módulos) y un argumento de z es

$$\arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(-1+i) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) - (\operatorname{arc\,tg}(-1) + \pi) = \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{12}$$

Por tanto

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{24} = (\sqrt{2})^{24}\left(\cos\left(-24\frac{5\pi}{12}\right) + i\operatorname{sen}\left(-24\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2^{12} = 4096$$

Ejercicio resuelto 39 Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

a) $\operatorname{sen} 3\varphi = 3\ \operatorname{sen}\varphi - 4\ \operatorname{sen}^3\varphi$.

b) $\cos 4\varphi = 8\ \cos^4\varphi - 8\ \cos^2\varphi + 1$.

c) $\operatorname{sen} 5\varphi = 5\ \operatorname{sen}\varphi - 20\ \operatorname{sen}^3\varphi + 16\ \operatorname{sen}^5\varphi$.

Solución. La fórmula de De Moivre es una herramienta excelente para obtener identidades trigonométricas. Lo único que hay que hacer es usar la igualdad

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx) \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$$

Desarrollando la potencia del lado izquierdo por medio del binomio de Newton y agrupar la parte real, que será igual a $\cos(nx)$ y la parte imaginaria, que será igual a $\operatorname{sen}(nx)$. Por ejemplo, para $n = 2$ se obtiene inmediatamente que $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Haciendo $n = 3$ obtenemos

$$\cos^3 x + 3i \cos^2 x \operatorname{sen} x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x - i \operatorname{sen}^3 x = \cos(3x) + i \operatorname{sen}(3x)$$

Igualando partes imaginarias, resulta:

$$\operatorname{sen}(3x) = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x = 3(1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

Esta es la igualdad a). Las otras dos igualdades b) y c) se obtiene de forma parecida.

Ejercicio resuelto 40 Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, y $w = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\ \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$. Dado un número entero, $m \in \mathbb{Z}$, calcula el valor de las expresiones:

a) $1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m}$.

b) $1 - w^m + w^{2m} - \cdots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)m}$.

Solución. Necesitamos la expresión de la suma de una progresión geométrica. Sean z un número complejo distinto de 1 y $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$. Tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} S & = & 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + \quad z^n \\ Sz & = & \quad\ z + z^2 + z^3 + \cdots + \quad z^n + z^{n+1} \end{array}\right\} \longrightarrow S(z-1) = z^{n+1} - 1$$

Y deducimos que

$$\boxed{1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}} \tag{3.16}$$

La suma en a) es una progresión geométrica de razón w^m. Debemos distinguir el caso en que $w^m = 1$, lo que ocurre cuando m es un múltiplo de n, en cuyo caso la suma en a) es igual a n. En los demás casos, tenemos que

$$1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m} = \frac{w^{nm} - 1}{w^m - 1} = 0$$

En particular, haciendo $m = 1$, deducimos que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es igual a 0. El apartado b) se hace de forma parecida. ☺

Ejercicio resuelto 41 Sea w un número complejo de módulo 1. Expresa los números $w-1$ y $w+1$ en forma polar.

Solución. Sea $w=\cos t+i\operatorname{sen} t$ con $t=\arg(w)$. Pongamos $u=\cos(t/2)+i\operatorname{sen}(t/2)$. Con lo que $u^2=w$ y $u\overline{u}=1$. Tenemos que

$$w-1=u^2-u\overline{u}=u(u-\overline{u})=2i\operatorname{sen}(t/2)u \tag{3.17}$$

Deducimos que $|w-1|=2|\operatorname{sen}(t/2)|$. Supondremos en lo que sigue que $w\neq 1$. Observa que $w-1$ es producto de 3 números: el número i, cuyo argumento principal es $\pi/2$, el número u, cuyo argumento principal es $t/2$ y el número $2\operatorname{sen}(t/2)$ cuyo argumento principal es 0 cuando $\operatorname{sen}(t/2)>0$, y π cuando $\operatorname{sen}(t/2)<0$. Un argumento de $w-1$ será $\pi/2+t/2+\arg(\operatorname{sen}(t/2))$. Observa que $-\pi<t\leqslant\pi$ y $t\neq 0$. Distinguiremos dos casos:

$$0<t\leqslant\pi\longrightarrow\operatorname{sen}(t/2)>0\longrightarrow\arg(w-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}=\frac{t+\pi}{2}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow w-1=2\operatorname{sen}(t/2)\big(-\operatorname{sen}(t/2)+i\cos(t/2)\big)$$

$$-\pi<t<0\longrightarrow\operatorname{sen}(t/2)<0\longrightarrow\arg(w-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}-\pi=\frac{t-\pi}{2}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow w-1=-2\operatorname{sen}(t/2)\big(\operatorname{sen}(t/2)-i\cos(t/2)\big)$$

Fíjate en que si en (3.17) hacemos el producto iu y distinguimos los casos $\operatorname{sen}(t/2)>0$ y $\operatorname{sen}(t/2)<0$, obtenemos las mismas expresiones para $w-1$. ☺

Ejercicio resuelto 42 Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)}\quad 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)}\quad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx=\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Solución. Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, podemos calcular $A+iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

Solución. Pongamos $w=\cos x+i\operatorname{sen} x$; $u=\cos(x/2)+i\operatorname{sen}(x/2)$. Tenemos que $w\neq 1$ porque $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$.

$$A+iB=1+w+w^2+w^3+\cdots+w^n=\frac{w^{n+1}-1}{w-1}=\text{(por (3.17))}=\frac{w^{n+1}-1}{2i\operatorname{sen}(x/2)u}$$

Teniendo en cuenta que $w^{n+1}=\cos\big((n+1)x\big)+i\operatorname{sen}\big((n+1)x\big)$ es un número complejo de módulo 1 y que $u^{n+1}=\cos\big((n+1)x/2\big)+i\operatorname{sen}\big((n+1)x/2\big)$, podemos usar la igualdad (3.17) para obtener que:

$$w^{n+1}-1=2i\operatorname{sen}\big((n+1)x/2\big)u^{n+1}$$

Deducimos que

$$A+iB = u^{n+1}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \left(\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Igualando partes real e imaginaria, se obtienen las dos igualdades del enunciado. ☺

Ejercicio resuelto 43 Dados dos números complejos distintos $a, b \in \mathbb{C}$, justifica que para $z \neq b$ el número $\dfrac{z-a}{z-b}$ es real si, y sólo si, z está en la recta que pasa por a y por b; y es real negativo si, y sólo si, z está en el segmento que une a con b.

Solución. Sea $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$. Tenemos que

$$\frac{z-a}{z-b} = t \Longleftrightarrow z = \frac{a-bt}{1-t} = a + \frac{t}{1-t}(a-b)$$

La recta que pasa por a y b tiene la ecuación paramétrica $z = a + \lambda(a-b)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que la igualdad anterior nos dice que $\dfrac{z-a}{z-b}$ es real si, y sólo si, z está en dicha recta.

Si $t < 0$, la igualdad anterior puede escribirse, cambiando t por $-s$, en la forma

$$\frac{z-a}{z-b} = -s \Longleftrightarrow z = \frac{a+bs}{1+s} = \frac{s}{1+s}b + \frac{1}{1+s}a$$

Lo que nos dice que z es de la forma $\lambda b + (1-\lambda)a$ con $0 < \lambda = \dfrac{s}{1+s} < 1$ pero esos son justamente los puntos del segmento que une a con b (excluidos los extremos).

Ejercicio resuelto 44 a) Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

b) Deduce de lo anterior que si el baricentro y el circuncentro de un triángulo coinciden, dicho triángulo debe ser equilátero.

Solución. a) Si z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero, entonces cada uno debe estar girado un ángulo de $\pi/3$ radianes respecto de otro. Sabemos que multiplicar por un complejo, u, de módulo 1 es un giro de amplitud igual a $\arg(u)$. Definamos $u = \cos(\pi/3) + i\operatorname{sen}(\pi/3)$. Los tres vértices los podemos escribir como z_1, $z_1 u$, $z_2 u^2$ y, por tanto:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z(1 + u + u^2) = z\frac{u^3-1}{u-1} = 0$$

Supongamos ahora que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, y que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Para probar que dichos números son vértices de un triángulo equilátero, lo que vamos a hacer es comprobar que son las raíces cúbicas de un número complejo. Es decir, se trata de probar que hay un número α tal que z_1, z_2 y z_3 son las raíces de la ecuación polinómica $z^3 - \alpha = 0$. Para esto es necesario y suficiente que el producto $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ puede escribirse en la forma $z^3 - \alpha$. Tenemos:

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) = z^3 - (z_1+z_2+z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3 =$$
$$= z^3 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3$$

Poniendo $\alpha = z_1 z_2 z_3$, lo que hay que probar es que $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0$. Todavía no hemos usado la hipótesis de que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Vamos a usarla ahora para intentar sacar factor común en la suma $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0$ la expresión $z_1 + z_2 + z_3$. Tenemos que:

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \overline{z_3} z_3 z_1 z_2 + \overline{z_2} z_2 z_1 z_3 + \overline{z_1} z_1 z_2 z_3 = (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) z_1 z_2 z_3 = 0$$

Pues $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0$.

El apartado b) se deduce fácilmente de a) siempre que sepas lo que es el baricentro y el circuncentro de un triángulo. ☺

Ejercicio resuelto 45 Si $0 \leqslant \arg w - \arg z < \pi$, prueba que el área del triángulo de vértices 0, z y w viene dada por $\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}w)$.

Solución. El área de todo triángulo es la mitad de la base por la altura. En la figura (3.7) se ha tomado como base el vector z con longitud $|z|$ y la altura es h. Observa que $\operatorname{sen}(\varphi - \vartheta) = \dfrac{h}{|w|}$. Por tanto

$$\text{área} = \frac{1}{2}|z|h = \frac{1}{2}|z||w|\operatorname{sen}(\varphi - \vartheta)$$

Esto ya deberías saberlo: el área de cualquier triángulo es igual a la mitad del producto

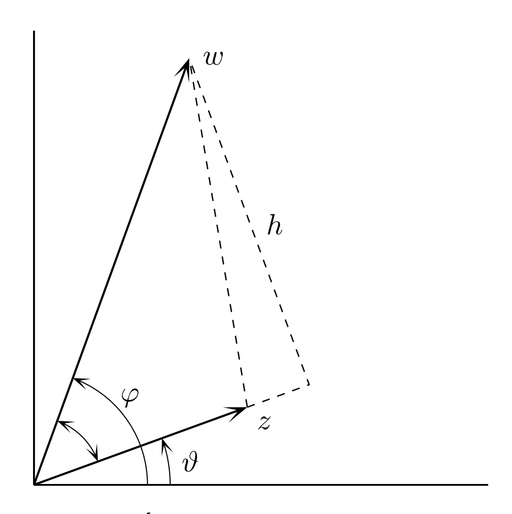


Figura 3.7. Área de un triángulo

de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo que forman. Pongamos $z = x + iy$, $w = u + iv$. Como $\vartheta = \arg(z)$ y $\varphi = \arg(w)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\text{área} = \frac{1}{2}|z||w|\operatorname{sen}(\varphi - \vartheta) &= \frac{1}{2}|z||w|\big(\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\vartheta) - \cos(\varphi)\operatorname{sen}(\vartheta)\big) = \\ &= \frac{1}{2}|z||w|\left(\frac{v}{|w|}\frac{x}{|z|} - \frac{u}{|w|}\frac{y}{|z|}\right) = \frac{1}{2}(vx - uy) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}w)\end{aligned}$$



3.4. Funciones elementales complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$, cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, a toda función compleja $f : A \to \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u = \operatorname{Re} f$ “parte real de f” y la función $v = \operatorname{Im} f$ “parte imaginaria de f” definidas para todo $(x, y) = x + iy \in A$ por:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

Naturalmente, $f(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)$.

3.4.1. La función exponencial

Definimos[2] la exponencial compleja de un número $z = x + i\, y$ como

$$\boxed{\mathrm{e}^{x+i\,y} = \exp(x + i\, y) = \mathrm{e}^{x}\big(\cos y + i \operatorname{sen} y\big)} \tag{3.18}$$

Observa que

$$\boxed{|\,\mathrm{e}^{z}\,| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{z})} \tag{3.19}$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\,t} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})} \tag{3.20}$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\boxed{\cos t = \frac{\mathrm{e}^{i\,t} + \mathrm{e}^{-i\,t}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{\mathrm{e}^{i\,t} - \mathrm{e}^{-i\,t}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})} \tag{3.21}$$

La exponencial compleja tiene la propiedad fundamental de transformar sumas en productos. Se prueba fácilmente, haciendo uso de la definición (3.18 y de las igualdades (2.4) y (2.5) que

$$\boxed{\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{z}\, \mathrm{e}^{w} \qquad \text{para todos } z, w \in \mathbb{C}} \tag{3.22}$$

Esta propiedad, junto con las ecuaciones de Euler (3.21), hacen que la exponencial compleja sea la herramienta más usada para trabajar con las funciones seno y coseno. Por ejemplo, de la fórmula de Euler (3.20) y de la igualdad anterior, se deduce enseguida la fórmula de De Moivre.

$$\cos(nt) + i \operatorname{sen}(nt) = \mathrm{e}^{itn} = \left(\mathrm{e}^{it}\right)^{n} = \left(\cos t + i \operatorname{sen} t\right)^{n} \qquad (n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}) \tag{3.23}$$

Igualmente, de las igualdades

$$\cos(a + b) + i \operatorname{sen}(a + b) = \mathrm{e}^{(a+b)i} = \mathrm{e}^{ia}\, \mathrm{e}^{ib} = (\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

[2]Más adelante veremos la justificación de esta definición.

se deducen en seguida, haciendo el producto indicado e igualando partes real e imaginaria, las igualdades (2.4) y (2.5).

Otras identidades trigonométricas se obtienen también muy fácilmente. Por ejemplo, para expresar un producto de senos o cosenos como una suma de senos o de cosenos se puede hacer lo que sigue.

$$\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib}=\mathrm{e}^{i(a+b)/2}\left(\mathrm{e}^{i(a-b)/2}+\mathrm{e}^{i(b-a)/2}\right)=2\,\mathrm{e}^{i(a+b)/2}\cos((a-b)/2) \tag{3.24}$$

Igualando partes real e imaginaria, deducimos que:

$$\cos a+\cos b = 2\cos((a-b)/2)\cos((a+b)/2) \tag{3.25}$$

$$\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b = 2\cos((a-b)/2)\operatorname{sen}((a+b)/2) \tag{3.26}$$

De la igualdad (3.22), se deduce que para todo $z\in\mathbb{C}$ y todo $k\in\mathbb{Z}$ es

$$\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{z+2k\pi i}$$

Lo que, en particular, nos dice que $\exp(z)=\exp(z+2\pi i)$, o sea, la exponencial compleja es una función *periódica* con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva.

La función exponencial es particularmente útil para representar los números complejos de módulo 1, es decir los números complejos de la forma $\cos t+i\operatorname{sen} t$ ($t\in\mathbb{R}$). Recuerda que multiplicar por un número complejo de módulo 1 representa un giro cuya amplitud es el argumento de dicho número. Fíjate que el complejo conjugado de e^{it} es e^{-it}.

Una exponencial real es siempre positiva. Para la exponencial compleja no tiene sentido hablar de positiva, todo lo que podemos decir es que la *exponencial compleja no se anula* nunca pues $|\,\mathrm{e}^{z}\,|=\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}>0$.

3.4.2. Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $\mathrm{e}^{w}=z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w\in\mathbb{C}$. Como

$$\mathrm{e}^{w}=\mathrm{e}^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $\mathrm{e}^{w}=z$ es necesario y suficiente que:

1. $|\mathrm{e}^{w}|=|z\,|$, esto es, $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} w}=|z|$, es decir, $\operatorname{Re} w=\log|z\,|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z\,|$).

2. $\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{w})=\operatorname{Arg}(z)$. Como $\operatorname{Im} w\in\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{w})$, esta igualdad equivale a $\operatorname{Im} w\in\operatorname{Arg} z$; y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w=\arg(z)+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{e}^{w}=z\}=\{\log|z|+i(\arg(z)+2k\pi),k\in\mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $\mathrm{e}^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$.

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k\in\mathbb{Z}\}}$$

Todos los logaritmos de z están situados en una misma recta vertical de abscisa $\log|z|$, y a partir de uno cualquiera de ellos podemos situar todos los demás, desplazándolo hacia arriba o hacia abajo una distancia igual a un múltiplo entero de 2π. De entre todos los logaritmos de z elegimos uno, llamado **logaritmo principal**, definido por

$$\boxed{\log z = \log|z| + i\arg(z) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^*}$$

Cuando z es un número real positivo, $z \in \mathbb{R}^+$, el logaritmo principal que acabamos de definir coincide con el logaritmo real de z. Es decir, acabamos de *extender* la función logaritmo real de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{C}^*$. Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log z + i2k\pi$ para algún entero k. Además, de todos los logaritmos de z, el logaritmo principal es el único cuya parte imaginaria está en el intervalo $]-\pi, \pi]$.

Es importante que observes que la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log\left(\mathrm{e}^{i\,2\pi/3}\right) = i\frac{2\pi}{3}, \quad \log\left(\mathrm{e}^{i\,3\pi/4}\right) = i\frac{3\pi}{4}$$

Y

$$\log\left(\mathrm{e}^{i\,2\pi/3}\,\mathrm{e}^{i\,3\pi/4}\right) = \log\left(\mathrm{e}^{i\,17\pi/12}\right) = \log\left(\mathrm{e}^{-i7\pi/12}\right) = -i\frac{7\pi}{12} \neq i\frac{2\pi}{3} + i\frac{3\pi}{4}$$

Lo que está claro es que el número $\log z + \log w \in \operatorname{Log}(zw)$, es decir, $\log z + \log w$ es *un* logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo *principal* de zw.

Observación. Muchos libros usan la notación $\operatorname{Log} z$ para representar el logaritmo principal de z y $\log z$ para representar el conjunto de todos los logaritmos de z. De esta forma consiguen que la función $\log$, que era conocida para reales positivos, ya no pueda usarse más, porque ahora $\log 1$ ya no será 0 sino el conjunto $\{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$; y lo que antes escribíamos $\log 2$ ahora tendremos que escribirlo $\operatorname{Log} 2$. Es decir, no se gana nada y se pierde todo. Es lo que yo digo, ¿para qué hacer las cosas bien pudiendo hacerlas mal?

3.4.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b\in\mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = \mathrm{e}^{b\log a}$. Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos de la forma $\log a + i2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a + i\,2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es **una** potencia de base a y exponente b. Representamos por $[a^b]$ el conjunto de todas ellas.

$$[a^b] = \left\{\mathrm{e}^{b(\log a + i\,2k\pi)} : k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Se destaca una:

$$a^b = \mathrm{e}^{b\log a}$$

que se llama **valor principal** de la potencia de base a y exponente b. Observa que si $b = 1/n$ donde $n\in\mathbb{N}$, el número

$$a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log a\right) = \exp\left(\frac{\log a}{n} + i\frac{\arg a}{n}\right) = |a|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg a}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

3.4.4. Ejercicios propuestos

101. Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i,\ \pm\sqrt{3} \pm i$ en la forma $r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$.

102. Calcula el módulo y los argumentos principales de los números

$$1 + \mathrm{e}^{i\varphi},\ 1 - \mathrm{e}^{i\varphi},\ -a\,\mathrm{e}^{i\varphi}$$

donde $|\varphi| \leqslant \pi$ y $a > 0$.

103. Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ \mathrm{e}^{-3},\ \mathrm{e}^{5i},\ 4,\ -5\,\mathrm{e},\ 1+i$$

104. Calcula $\log(3i) + \log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log\big(3i(-1+i\sqrt{3})\big)$.

105. Calcula $\log(-1-i) - \log i$ y $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

106. Calcula

$$[(-4)^i],\ i^{-3i},\ [i^{2/\pi}],\ [i^i],\ 1^{2i},\ 3^{1-i},\ ((-i)^i)^i,\ (1+i)^{1+i}$$

107. Estudia, para $z\in\mathbb{C}^*$ y $n\in\mathbb{N}$, las igualdades:

a) $\log(\mathrm{e}^z) = z$; $b)$ $\exp(\log(z)) = z$; $c)$ $\log(\sqrt[n]{z}) = \dfrac{\log(z)}{n}$; $d)$ $\log(z^n) = n\log(z)$.

108. Prueba que la función logaritmo principal establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-_{\mathrm{o}}$ y $\Omega = \{z\in\mathbb{C}^* : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.

109. Estudia condiciones para que $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

110. Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

a) $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$, b) $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$

111. Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \operatorname{Log}[a^b] = b \operatorname{Log}(a) \quad \text{b) } \log[a^b] = b \operatorname{Log}(a) \quad \text{c) } \log(a^b) = b \log a$$

112. Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2 = z^2$; por tanto $2\operatorname{Log}(-z) = 2\operatorname{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z)$.

113. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

3.4.5. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 46 Estudia, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, las igualdades:

$$\text{a) } \log\left(\mathrm{e}^z\right) = z\,;\ b)\ \exp(\log(z)) = z\,;\ c)\ \log\left(\sqrt[n]{z}\right) = \frac{\log(z)}{n}\,;\ d)\ \log(z^n) = n\log(z).$$

Solución. a) Es evidente que z es *un* logaritmo de e^z y será el logaritmo principal si, y sólo si, $-\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi$. En consecuencia:

$$\log\left(\mathrm{e}^z\right) = z \Longleftrightarrow -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi$$

b) Los logaritmos de z se definen como los números cuya exponencial es z, luego, en particular, $\exp(\log(z)) = z$ cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$.

c)

$$\begin{aligned} \log\left(\sqrt[n]{z}\right) &= \log|\sqrt[n]{z}| + i\arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \frac{\log|z|}{n} + i\frac{\arg z}{n} \\ \frac{\log(z)}{n} &= \frac{\log|z|}{n} + i\frac{\arg z}{n} \end{aligned}$$

La igualdad en c) se verifica siempre.

d)

$$\begin{aligned} \log(z^n) &= \log(|z^n|) + i\arg(z^n) = n\log(|z|) + i\arg(z^n) \\ n\log(z) &= n\log(|z|) + in\arg(z) \end{aligned}$$

La igualdad en d) equivale a que $\arg(z^n) = n\arg(z)$. Como $n\arg(z)$ es *un* argumento de z^n, para que sea el argumento principal deberá ser $-\pi < n\arg(z) \leqslant \pi$. ☺

Ejercicio resuelto 47 Estudia condiciones para que $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

Solución. Tenemos que

$$\left(a^b\right)^c = \exp(c\log(a^b)); \quad a^{bc} = \exp(bc\log a)$$

Por otra parte

$$\exp(c\log(a^b)) = \exp\left(c\log(\mathrm{e}^{b\log a})\right) = \exp\left(c(b\log a + i2k\pi)\right) = \exp(bc\log a + ic2k\pi)$$

Donde k es un entero que hay que elegir por la condición de que

$$-\pi < \operatorname{Im}(b\log a + i2k\pi) \leqslant \pi$$

Concluimos que si $k = 0$, lo que ocurre solamente cuando $-\pi < \operatorname{Im}(b\log a) \leqslant \pi$, entonces la igualdad del enunciado se cumple para todo c. En otro caso, la igualdad del enunciado se cumple solamente cuando c es un número entero. ☺

Ejercicio resuelto 48 Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

a) $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$, b) $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$

Solución. La forma razonable de interpretar la igualdad $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$, es que sumando cada uno de los elementos de $\operatorname{Arg}(z)$ con cada uno de los elementos de $\operatorname{Arg}(w)$ obtenemos todos los elementos de $\operatorname{Arg}(zw)$. Que efectivamente esto es así es fácil de probar. Sean $s \in \operatorname{Arg}(z)$ y $t \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces, sabemos que $s + t$ es un argumento de zw, esto es $s + t \in \operatorname{Arg}(zw)$. Luego hemos probado la inclusión $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \subset \operatorname{Arg}(zw)$. Recíprocamente, sea $\varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$. Elijamos cualquier elemento $s \in \operatorname{Arg}(z)$ y pongamos $t = \varphi - s$. Entonces t es un argumento de $\dfrac{zw}{z} = w$, esto es, $t \in \operatorname{Arg}(w)$; luego $\varphi = s + t \in \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$. Lo que prueba la otra inclusión $\operatorname{Arg}(zw) \subset \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$.

Análogamente, La forma razonable de interpretar la igualdad $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$, es que sumando cada uno de los elementos de $\operatorname{Log}(z)$ con cada uno de los elementos de $\operatorname{Log}(w)$ obtenemos todos los elementos de $\operatorname{Log}(zw)$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z)$, la igualdad b) se deduce de a).

Observación. Quien haya estudiado el concepto de *grupo cociente*, puede interpretar la suma $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$ en el grupo cociente del grupo aditivo de los números reales respecto del subgrupo de los múltiplos enteros de 2π, esto es, el grupo $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si z es un complejo no nulo, se tiene que $\operatorname{Arg}(z) \in G$ y, por definición de suma en un grupo cociente, tenemos que $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$ es la clase que contiene a $\arg(z) + \arg(w)$ y, como $\arg(z) + \arg(w) \in \operatorname{Arg}(zw)$, obtenemos que $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$. ☺

Ejercicio resuelto 49 Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2 = z^2$; por tanto $2\operatorname{Log}(-z) = 2\operatorname{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z)$.

Solución. De la igualdad $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$, probada en el ejercicio anterior, se deduce que $\operatorname{Log}(z^2) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z)$. Es decir, que sumando de todas las formas posibles dos logaritmos de z obtenemos todos los logaritmos de z^2. Pero eso es muy distinto a sumar cada logaritmo de z consigo mismo. Es decir, el conjunto $2\operatorname{Log}(z)$ es solamente una parte del conjunto $\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z)$. ☺

3.5. Aplicaciones de los números complejos

Como ya hemos dicho anteriormente, la exponencial compleja es la herramienta más útil para trabajar con funciones sinusoidales, esto es, las funciones seno y coseno. Muchísimos procesos naturales, entre los que destacan por su importancia y universalidad los movimientos oscilatorios y ondulatorios, se describen adecuadamente por medio de funciones sinusoidales. Eso explica la presencia de la exponencial compleja y de los números complejos en teorías que, a primera vista, nada tienen que ver con ellos. Veamos algunos ejemplos.

3.5.1. Movimiento armónico simple

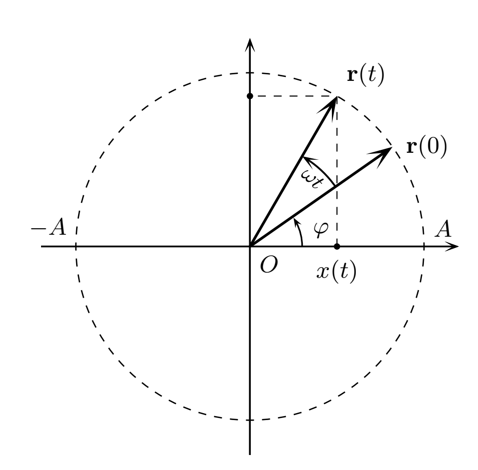


Figura 3.8. Movimiento circular

Un número complejo es un vector del plano que, escrito en forma polar, tiene asociado un ángulo y por eso, los números complejos son muy apropiados para representar giros y movimientos circulares. Consideremos un móvil que recorre una circunferencia centrada en el origen y de radio R con una velocidad angular constante ω. Supongamos que su posición inicial para $t = 0$ viene dada por $(A\cos\varphi, A\operatorname{sen}\varphi)$. La posición de dicho móvil en el tiempo t es

$$\mathbf{r}(t) = \big(A\cos(\omega t+\varphi), A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)\big)$$

Usando números complejos, podemos escribir

$$\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + iA\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$$

Que se expresa mejor con la exponencial compleja:

$$\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + iA\operatorname{sen}(\omega t+\varphi) = A\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)} = A\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

Recuerda que multiplicar por $\mathrm{e}^{i\omega t}$ es un giro de amplitud ωt. La igualdad $\mathbf{r}(t) = A\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ nos dice que la posición del móvil en el tiempo t se obtiene girando el vector que representa su posición inicial $\mathbf{r}(0) = A\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ un giro de amplitud ωt.

La proyección sobre el eje de abscisas del vector $\mathbf{r}(t)$ es la primera componente de dicho vector:

$$x(t) = \operatorname{Re}\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \tag{3.27}$$

Interpretamos $|x(t)|$ como la distancia al origen en el instante t de un móvil que se desplaza sobre el eje de abscisas y cuya posición en el tiempo t viene dada por la igualdad (3.27). Observa que dicho móvil recorre el segmento $[-A, A]$ con un movimiento que se caracteriza porque se repite a intervalos regulares de tiempo, pues definiendo $T = 2\pi/\omega$, se tiene que:

$$x(t+T) = A\cos(\omega(t+T)+\varphi) = A\cos(\omega t+2\pi+\varphi) = A\cos(\omega t+\varphi) = x(t)$$

Dicho movimiento se llama *movimiento armónico simple*. Naturalmente, la proyección sobre el eje de ordenadas del vector $\mathbf{r}(t)$ también describe un movimiento armónico simple de ecuación

$$y(t) = \operatorname{Im}\mathbf{r}(t) = A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi) \tag{3.28}$$

Las ecuaciones (3.27) y (3.28) representan un mismo tipo de movimiento pues un seno no es más que un coseno retrasado en $\pi/2$, como se sigue de la igualdad $\cos(x-\pi/2)=\operatorname{sen} x$.

En el movimiento armónico simple $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ el número A se llama *amplitud*, el número $\omega t+\varphi$ se llama *fase*, siendo φ la *fase inicial*; ω es la *frecuencia angular* que se mide en radianes por segundo. El número $T=2\pi/\omega$ es el *periodo*, que es el tiempo, medido en segundos, que el móvil tarda en completar un ciclo. El número $f=1/T$ es la *frecuencia*, que es el número de ciclos recorridos en un segundo. La unidad de la frecuencia es el ciclo por segundo que se llama *herzio*.

La representación compleja proporciona una visualización gráfica del movimiento que es muy útil para el estudio de la composición de movimientos armónicos simples. Consideremos dos movimientos armónicos simples de igual frecuencia dados por

$$x_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1), \qquad x_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

Queremos estudiar el movimiento dado por $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$. La representación compleja de los movimientos permite dar una respuesta sin necesidad de hacer cálculos. Pongamos

$$x_1(t)=\operatorname{Re}\mathbf{r}_1(t)=\operatorname{Re}A_1\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_1)}; \qquad x_2(t)=\operatorname{Re}\mathbf{r}_2(t)=\operatorname{Re}A_2\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_2)}$$

Claramente, $x(t)=x_1(t)+x_2(t)=\operatorname{Re}(\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t))$. Como los vectores $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ giran con igual velocidad angular, ω, el vector suma $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t)$ también gira con la misma velocidad angular (el paralelogramo de lados $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ gira todo él con velocidad angular ω). Deducimos que $x(t)=\operatorname{Re}(\mathbf{r}(t))$ es la ecuación de un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω, amplitud igual al módulo de $\mathbf{r}(t)$ (que debe ser constante) y fase igual al argumento del número complejo $\mathbf{r}(t)$. El módulo de una suma lo hemos calculado en (3.14). En nuestro caso es

$$|\mathbf{r}(t)|^2=|\mathbf{r}_1(t)|^2+|\mathbf{r}_2(t)|^2+2\operatorname{Re}(\mathbf{r}_1(t)\overline{\mathbf{r}_2(t)})=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

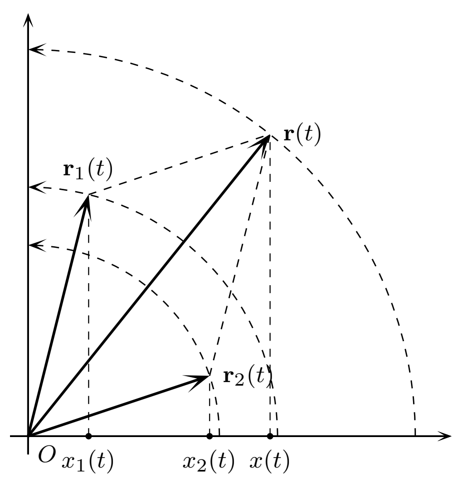


Figura 3.9. Composición de movimientos armónicos

Como la frecuencia angular debe ser ω, la fase será $\omega t + \varphi$ donde φ es la fase inicial, que es el argumento del número complejo

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1(0)+\mathbf{r}_2(0) = A_1\,\mathrm{e}^{i\varphi_1} + A_2\,\mathrm{e}^{i\varphi_2} = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2) + i(A_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + A_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)$$

que ya debes saber calcular.

3.5.2. Circuitos eléctricos

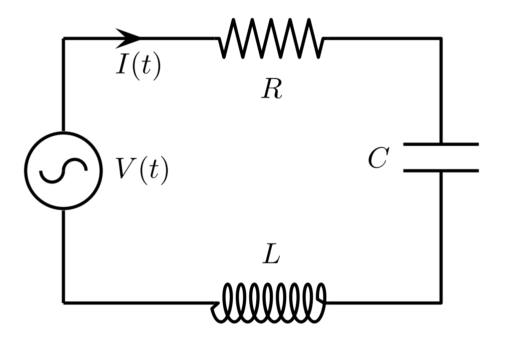


Figura 3.10. Circuito RLC

En el análisis de circuitos eléctricos los números complejos, con el nombre de *fasores*, fueron introducidos en 1863 por el matemático e ingeniero Charles Proteus Steinmetz (1865-1923). Un fasor es un número complejo que representa la amplitud y fase inicial de una sinusoide. Los fasores proporcionan una herramienta útil para estudiar circuitos eléctricos cuyo voltaje es de tipo sinusoidal $V(t) = V_m\cos(\omega t + \varphi)$. Aquí $V_m > 0$ es la amplitud o máximo valor del voltaje, y φ la fase inicial. Podemos asociar a $V(t)$ un fasor que representamos $\mathbf{V}$ y es el número complejo $\mathbf{V} = V_m\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. De esta forma podemos escribir $V(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{V}\,\mathrm{e}^{i\omega t})$ con lo que separamos la información de frecuencia y de fase. Observa que, conocida la frecuencia, la sinusoide queda determinada de forma única por su fasor asociado.

La derivada de una sinusoide es otra sinusoide. El fasor que representa a la derivada se expresa muy fácilmente mediante el fasor que representa a la sinusoide.

$$V'(t) = \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = -V_m\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) = V_m\omega\cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = \mathrm{Re}(i\omega\mathbf{V}\,\mathrm{e}^{i\omega t})$$

Deducimos que el fasor que representa a $V'(t)$ es $i\omega\mathbf{V}$. Observa que $i\omega\mathbf{V} = \omega V_m\,\mathrm{e}^{i(\varphi+\pi/2)}$, por lo que el fasor que corresponde a la derivada de una sinusoide va adelantado 90 grados respecto a la sinusoide.

De la misma forma, el fasor que representa a la primitiva de la sinusoide $V(t)$ es $\dfrac{1}{i\omega}\mathbf{V}$ y va retrasado 90 grados respecto a la sinusoide.

Supongamos que en el circuito de la figura (3.10) se tiene que la intensidad de la corriente viene dada por una sinusoide (lo cual se sabe que es así cuando la fuerza electromotriz aplicada es sinusoidal). Pongamos $I(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$ y sea $\mathbf{I}$ su fasor asociado. Expresemos la caída de potencial en cada uno de los elementos que forman el circuito mediante los fasores de la corriente y el voltaje. Se trata de un circuito RLC que consta de una resistencia de R ohmios, un condensador de capacitancia C y un inductor, con inductancia L.

La diferencia de potencial en los extremos de la resistencia viene dada por

$$V_R(t) = RI(t) = RI_m\cos(\omega t + \varphi)$$

La relación entre los fasores respectivos es

$$\mathbf{V_R} = R\mathbf{I}.$$

Como $R > 0$ se tiene que el voltaje a través de una resistencia está en fase con la corriente.

Es sabido que una corriente variable en un inductor produce un campo magnético que da lugar a una fuerza electromotriz inducida que se opone a la fuerza electromotriz aplicada, lo que origina una caída de potencial dada por

$$V_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

Deducimos que la relación entre los correspondientes fasores es

$$\mathbf{V_L} = i\omega L\mathbf{I}$$

y por tanto el voltaje a través de un inductor va adelantado 90 grados respecto a la corriente.

Llamando $Q(t)$ a la carga que almacena el condensador en el tiempo t, se sabe que la diferencia de potencial entre los extremos del condensador viene dada por la igualdad

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)\,\mathrm{d}s$$

Y deducimos que la relación entre los correspondientes fasores es

$$\mathbf{V_C} = \frac{1}{i\omega C}\mathbf{I} = -\frac{i}{\omega C}\mathbf{I}$$

y por tanto el voltaje a través de un inductor va retrasado 90 grados respecto a la corriente.

La suma de las diferencias de potencial a través de los distintos elementos del circuito debe ser igual al voltaje aplicado. En términos de los fasores asociados, esto quiere decir que:

$$R\mathbf{I} + i\omega L\mathbf{I} - \frac{i}{\omega C}\mathbf{I} = \left(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)\mathbf{I} = \mathbf{V} \tag{3.29}$$

El número complejo

$$\mathbf{Z} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

se llama *impedancia*. La impedancia depende de la frecuencia de la fuerza electromotriz aplicada y de las características del circuito. Cuando se conocen la impedancia y el voltaje, podemos calcular el fasor de la corriente por la igualdad

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{V}}{R + i\omega L - \dfrac{i}{\omega C}}$$

y la corriente en el circuito viene dada por $I(t) = \mathbf{I}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$.

Tenemos que

$$|\mathbf{I}| = \frac{|\mathbf{V}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

El número $\omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ se llama *reactancia*. El valor de la frecuencia para el que la reactancia se anula viene dado por $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ y se llama *frecuencia de resonancia*. Es el valor de la frecuencia para el cual el valor de $|\mathbf{I}|$ es máximo.

3.5.3. Procesamiento digital de señales

Como sin duda sabes, los formatos digitales más frecuentes de audio e imagen son, respectivamente, MP3 y JPG. Cuesta trabajo imaginar cómo sería Internet sin estos formatos. Lo que quizás no sepas es que la codificación MP3 y la JPG se llevan a cabo con algoritmos que usan números complejos. El hecho, por extraño que pueda parecer, es que las principales herramientas para trabajar con todo tipo de señales (audio, vídeo, voz, imagen,...) son complejas. La *transformada Z, la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto*, la *Transformada Discreta de Fourier*, la *Función de Transferencia*, los *modelos de polos y ceros*, la *Transformada de Laplace* y otras muchas herramientas básicas para el tratamiento de señales, son todas ellas transformaciones que usan números complejos. Todavía más, las propias señales se caracterizan por su *espectro* que ¡es un conjunto de números complejos! Si te sientes atraído por el apasionante mundo del tratamiento digital de señales, todo lo que sepas de números complejos te será útil en tu trabajo.

Como lectura adicional te recomiendo el capítulo 24 del libro de Michael Spivak [16].

Capítulo 4

Funciones Continuas y límite funcional

En matemáticas, la evidencia es enemiga de la corrección.
Bertrand Russell

4.1. Introducción

En esta lección vamos a estudiar con algún detalle un concepto teórico importante que es el de continuidad. Para motivar la definición que vamos a dar de continuidad, consideremos una ley física de la forma $P = f(V)$, que relaciona los valores de una "variable independiente V" (podemos pensar que es el volumen de un gas) con otra "variable dependiente P" (podemos pensar que es la presión). Si queremos usar dicha ley, hemos de medir un valor V_0 de la variable V, y es inevitable que al hacerlo cometamos algún error el cual, naturalmente, influye en el correspondiente valor de P, que ya no será exactamente igual a $P_0 = f(V_0)$. Surge así la pregunta natural: ¿de qué forma el error en la medida de V afecta al valor resultante de P? Es claro que si para valores de V "muy próximos" a V_0 obtengo valores de P muy diferentes entre sí, la ley "f" que relaciona V con P no tendrá ninguna utilidad práctica.

Puesto que los errores de medida son inevitables, no es razonable tratar de obtener "el verdadero valor P_0". Lo que sí puede hacerse es fijar una cota de error admisible para P (la cual dependerá de cada situación concreta), llamemos "ε" a dicha cota ($\varepsilon > 0$), y tratar de obtener otra cota de error "δ" ($\delta > 0$), de tal forma que siempre que midamos V_0 con un error menor que δ tengamos la seguridad de que el valor resultante para P se diferencia de P_0 en menos que ε. Esto es, $|f(V)-f(V_0)| < \varepsilon$ siempre que $|V-V_0| < \delta$. Cuando esto efectivamente pueda hacerse para cualquier cota de error $\varepsilon > 0$ decimos que la ley "f" es continua en V_0.

Observa que cabe esperar que la cota de error δ dependa del ε fijado en cada caso. Intuitivamente, cuanto más pequeño sea el error permitido en los datos finales, tanto mejor tendremos que medir la variable independiente. En general, la precisión δ con la que debemos medir V_0

para obtener un error final menor que ε, depende no solamente del valor fijado de ε sino también del valor de V_0. Esto es fácil de entender, no es lo mismo medir un volumen de varios metros cúbicos que otro de unos pocos milímetros cúbicos, la precisión de nuestra medida debe ser mejor en este último caso.

Las ideas anteriores conducen, de forma natural, a la definición matemática de continuidad. En todo lo que sigue, la letra A representará un conjunto no vacío de números reales. En la práctica A será siempre un intervalo o una unión de intervalos. Recuerda que la notación $f : A \to \mathbb{R}$ quiere decir que f es una función real cuyo dominio es A. Es muy importante advertir que A no tiene por qué coincidir con el dominio natural de la función. Esto es así porque con frecuencia estamos interesados en estudiar propiedades de una función en una parte de su dominio natural. Además, la continuidad de f depende tanto de la "regla que la define" como del conjunto en donde estamos trabajando. Enseguida pondremos ejemplos para aclarar esto.

4.2. Continuidad

4.1 Definición (Continuidad en un punto). Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

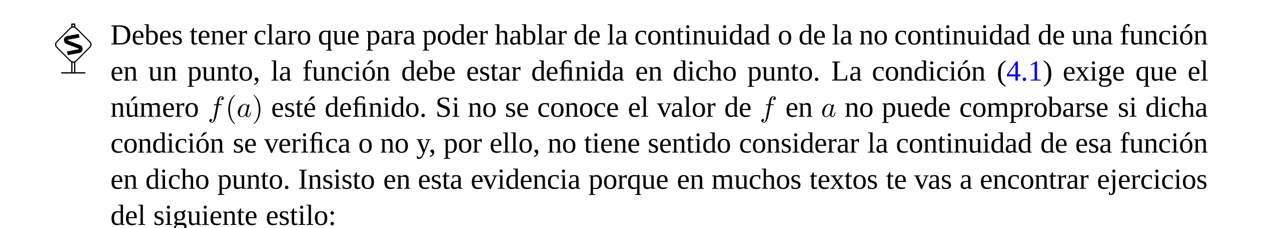
La definición anterior suele escribirse, con abuso del formalismo lógico, de la siguiente forma:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+ \ \exists\delta\in\mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} |x-a|<\delta \\ x\in A \end{array}\right\} \longrightarrow \quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon \tag{4.1}$$

Comentarios a la definición. Observa que en esta definición el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasar a f fuera de A no nos interesa. El siguiente ejemplo es ilustrativo.

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la *función de Dirichlet* dada por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = -1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es la función que vale 1 en los puntos racionales y -1 en los irracionales. Esta función no es continua en ningún punto. La razón es que en todo intervalo abierto, por pequeño que sea, siempre hay números racionales e irracionales. Por eso, la función f oscila constantemente entre 1 y -1.

b) Las funciones $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1$ y $h : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = -1$ son continuas (¡son funciones constantes!) en todo punto de sus respectivos dominios de definición.



Debes tener claro que para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto. La condición (4.1) exige que el número $f(a)$ esté definido. Si no se conoce el valor de f en a no puede comprobarse si dicha condición se verifica o no y, por ello, no tiene sentido considerar la continuidad de esa función en dicho punto. Insisto en esta evidencia porque en muchos textos te vas a encontrar ejercicios del siguiente estilo:

a) Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$.

b) Estudiar la continuidad de la función $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$.

c) Estudiar la continuidad de la función $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ en $x = 0$.

Respuesta: Las funciones f, g y h no están definidas en 0, por tanto no tiene sentido estudiar su continuidad en 0. Para poder estudiar la continuidad en 0 de estas funciones, primero hay que definirlas en 0. Por ejemplo, podemos definir $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $h(0) = 0$. Ahora la respuesta es: f no es continua en 0, g no es continua en 0 pero es continua por la derecha en 0, y h es continua en 0.

4.2 Definición (Continuidad en un conjunto). Se dice que f es continua en un conjunto $C \subset A$, si f es continua en todo punto de C.

No suele ser tarea fácil demostrar que una función dada es continua. Generalmente, lo que se hace es descomponer la función que queremos estudiar en otras más sencillas cuya continuidad ya es conocida previamente. Es por ello interesante saber qué tipo de operaciones realizadas con funciones continuas conducen a nuevas funciones continuas.

4.2.1. Propiedades básicas de las funciones continuas

4.3 Teorema. *Sean f, g funciones reales definidas en A. Se verifica que:*

a) Las funciones $f + g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

b) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en todo punto de A en el que g sea continua. En consecuencia, la función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula nunca es una función continua.

Demostración. a) Sea $a \in A$ un punto de A en el que f y g son continuas. Debemos probar que $f + g$ y fg son continuas en a. Escribamos nuestras hipótesis:

$$\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \ \exists\, \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \ : \ x \in A \wedge |x - a| < \delta_1 \quad \longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1 \tag{4.2}$$

$$\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \ \exists\, \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \ : \ x \in A \wedge |x - a| < \delta_2 \quad \longrightarrow \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon_2 \tag{4.3}$$

Naturalmente, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$ y $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2)$ dependen del valor de ε_1 y ε_2. Debemos relacionar los números $|(f+g)(x) - (f+g)(a)|$ y $|(fg)(x) - (fg)(a)|$ con $|f(x) - f(a)|$ y $|g(x) - g(a)|$.

Para la suma la cosa es muy sencilla.

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= \big|\big(f(x) - f(a)\big) + \big(g(x) - g(a)\big)\big| \leqslant \\ &\leqslant |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dado $\varepsilon > 0$, hagamos en (4.2) $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ y en (4.3) $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ y sean $\delta_1 = \delta_1(\frac{\varepsilon}{2})$ y $\delta_2 = \delta_2(\frac{\varepsilon}{2})$. Pongamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, como consecuencia de las desigualdades (4.4), (4.2) y (4.3), se deduce que $|(f+g)(x) - (f+g)(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, siempre que $x \in A$ y $|x - a| < \delta$.

Para el producto hay que pensar un poquito más.

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(a)| &= \big|f(x)\big(g(x) - g(a)\big) + g(a)\big(f(x) - f(a)\big)\big| \leqslant \\ &\leqslant |f(x)|\,|g(x) - g(a)| + |g(a)|\,|f(x) - f(a)| \end{aligned} \tag{4.5}$$

La cantidad $|g(a)|\,|f(x) - f(a)|$ puede controlarse fácilmente usando (4.2). Dado $\varepsilon > 0$, hagamos en (4.2) $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|g(a)|+1)}$ (la precaución de dividir por $|g(a)| + 1$ es porque pudiera ocurrir que $g(a) = 0$), y sea $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} x \in A \wedge |x - a| < \delta_1 &\longrightarrow |g(a)|\,|f(x) - f(a)| < |g(a)|\frac{\varepsilon}{2(|g(a)|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} \\ x \in A \wedge |x - a| < \delta_1 &\longrightarrow |f(x)| = |f(a) + (f(x) - f(a))| < |f(a)| + \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pongamos $M = |f(a)| + \varepsilon_1$, hagamos en (4.3) $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M}$ y sea $\delta_2 = \delta_2(\frac{\varepsilon}{2M})$. Definamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Teniendo ahora en cuenta las desigualdades (4.5) y (4.6), deducimos que

$$x \in A \wedge |x - a| < \delta \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |f(x)|\,|g(x) - g(a)| < M\dfrac{\varepsilon}{2M} = \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |g(a)|\,|f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \longrightarrow |(fg)(x) - (fg)(a)| < \varepsilon$$

La demostración del apartado b) se hace de forma parecida. □

El teorema anterior es muy útil pero con frecuencia no se entiende bien lo que dice o se interpreta mal. Lo que dice es que la suma, producto y cociente de funciones continuas (siempre que no dividamos por 0) también es continua. De aquí puedes deducir fácilmente algunas consecuencias.

4.4 Corolario. *a) Si la suma de dos funciones es continua y una de ellas es continua, la otra función también es continua.*

b) La suma de una función continua y otra discontinua es una función discontinua.

c) Si el producto de dos funciones es continuo y una de ellas es continua y no se anula, la otra función es continua.

d) El producto de una función continua y que no se anula por otra discontinua es una función discontinua.



Hasta aquí todo bien. El problema es cuando tenemos que estudiar la continuidad de la suma o el producto de dos funciones discontinuas. En esta situación el teorema anterior no nos dice nada. Peor aún; no puede haber ningún teorema que diga lo que pasa en este caso. La razón es que puede pasar cualquier cosa. La suma o el producto de dos funciones discontinuas puede ser unas veces continua y otras veces discontinua. Se trata de un problema que hay que estudiar en cada caso concreto y que depende de cómo sean las funciones que sumamos o multiplicamos.

Por ejemplo, sea f la función de Dirichlet que, como sabemos, es discontinua en todo punto. Sea g una función continua cualquiera; por ejemplo, la identidad $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones $g + f$ y $g - f$ son discontinuas en todo punto pero su suma es la función $2g$ que es continua. Por otra parte, el cuadrado de f, esto es la función $h(x) = f(x)f(x) = (f(x))^2 = 1$, es la función constante igual a 1 y, por tanto, es continua.

Teniendo en cuenta que las funciones polinómicas son sumas de productos de funciones constantes por potencias de la función identidad, deducimos el siguiente corolario.

4.5 Corolario. *Toda función racional es continua en su dominio natural de definición.*

De hecho, todas las funciones elementales que conoces son continuas en sus dominios naturales de definición. Esto no lo podemos probar todavía pero lo aceptaremos y lo usaremos cuando sea preciso; por ejemplo, para hacer ejercicios.

Además de sumar y multiplicar funciones, también sabemos componerlas. Veamos cómo se comporta la continuidad respecto de la composición de funciones.

4.6 Teorema (Continuidad de una función compuesta). *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$ y que g es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a. En particular, si g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en todo punto de A en el que f sea continua. Más en particular, la composición de funciones continuas es una función continua.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de g en $f(a)$, existe $\rho > 0$ tal que para todo $y \in B$ con $|y - f(a)| < \rho$ se tiene que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$. Ahora, por la continuidad de f en a, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(a)| < \rho$. Deducimos así que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$. Es decir, la función compuesta $g \circ f$ es continua en a. $\square$

4.2.2. Propiedades locales

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la "proximidad" de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

4.7 Definición. Dados una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que una función $g : B \to \mathbb{R}$ es una *extensión* de f, si $B \supset A$ y f es la restricción de g al conjunto A, es decir $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Los conceptos de extensión y de restricción de una función son esencialmente el mismo: todo depende de que se mire "para arriba" o "para abajo".

Es importante distinguir entre una función y su restricción a un conjunto. Veamos un ejemplo que nos permitirá introducir una función muy útil.

4.8 Ejemplo (Función parte entera). La función que a cada número $x \in \mathbb{R}$ asigna *el mayor entero que es menor o igual que* x se llama función *parte entera*. Dicha función se representa con la letra E y está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por las condiciones siguientes:

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

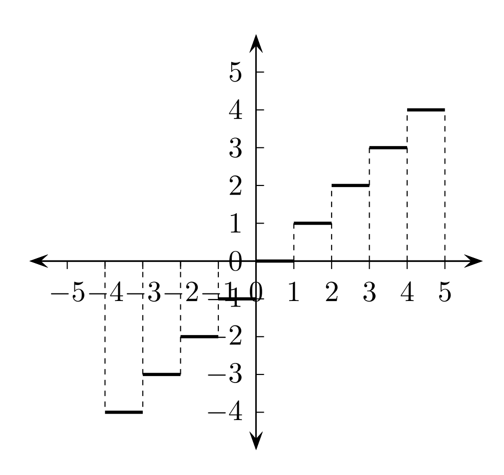


Figura 4.1. Función parte entera

No es difícil probar que esta función es discontinua en todos los enteros. Ahora, si consideramos a dicha función trabajando solamente en el intervalo $[1, 2[$, es decir, la función f restricción de E a $[1, 2[$ cuyo dominio es el intervalo $[1, 2[$ y que a cada punto de dicho intervalo asigna su “parte entera”, $f(x) = E(x)$, para $1 \leqslant x < 2$; entonces la función f es constante pues, claramente $f(x) = 1$ para todo $x \in [1, 2[$, luego f es continua en todos los puntos de su dominio, en particular f es continua en 1 a pesar de que la función “parte entera” es discontinua en dicho punto. ♦

El ejemplo anterior, y también el ejemplo de la función de Dirichlet antes visto, prueban que una restricción de una función discontinua puede ser continua o, lo que es igual, una extensión de una función continua puede ser discontinua. Son importantes y útiles a este respecto los siguientes resultados fáciles de probar.

4.9 Proposición. *a) Cualquier restricción de una función continua es también continua.*

b) Cualquier extensión de una función continua en un intervalo abierto *es también* continua en dicho intervalo abierto.

Observa la importancia que en la afirmación b) anterior tiene el hecho de que el intervalo sea *abierto*. El ejemplo de la función “parte entera”, antes visto, pone de manifiesto que una extensión de una función continua en un intervalo *no abierto* puede no ser continua.

De las afirmaciones anteriores se deduce el siguiente resultado.

4.10 Teorema (Teorema de localización). *Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.*

Este resultado es bastante útil para evitarnos hacer trabajo innecesario. Por ejemplo, si queremos estudiar la continuidad de la función parte entera, como dicha función es constante en los intervalos de la forma $]n, n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$, el resultado anterior nos dice que dicha función es continua en estos intervalos. Sólo queda así estudiar lo que pasa en los enteros.

La continuidad de una función en un punto permite obtener información sobre el comportamiento de la función en los puntos próximos al mismo. Estos resultados se llaman *locales*.

4.11 Teorema (Conservación local del signo). *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *continua en un punto* $a \in A$ *con* $f(a) \neq 0$*. Entonces hay un número* $r > 0$ *tal que para todo* $x \in A$ *con* $|x - a| < r$ *se verifica que* $f(x)f(a) > 0$*. Es decir,* $f(x) > 0$ *si* $f(a) > 0$*, o* $f(x) < 0$ *si* $f(a) < 0$*, en todo punto* $x \in]a - r, a + r[\cap A$*.*

Demostración. Supondremos que $f(a) > 0$. Podemos entonces tomar $\varepsilon = f(a)/2$ en (4.1) para obtener, en virtud de la continuidad de f en a, un $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$, lo que implica que $f(x) > f(a)/2 > 0$. El caso en que $f(a) < 0$ se reduce al anterior sin más que sustituir f por $-f$. □

4.12 Proposición (Acotación local). *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *continua en un punto* $a \in A$*. Entonces hay números,* $M_a > 0$*,* $r_a > 0$ *tales que para todo* $x \in A$ *con* $|x - a| < r_a$ *se verifica que* $|f(x)| \leqslant M_a$*.*

Demostración. Hagamos $\varepsilon = 1$ en (4.1) para obtener, en virtud de la continuidad de f en a, un $r_a > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r_a$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < 1$. Pongamos $M_a = 1 + |f(a)|$. Entonces, para todo $x \in]a - r_a, a + r_a[\cap A$ tenemos que:

$$|f(x)| = |f(a) + (f(x) - f(a))| \leqslant |f(a)| + |f(x) - f(a)| < 1 + |f(a)| = M_a$$

□

4.3. Teorema de Bolzano. Supremo e ínfimo

Si ahora mides 175cm y hace 10 años medías 135cm, es seguro que en algún momento intermedio medías con exactitud 161cm. Si una entrada de cine cuesta 5€ y hace 3 años costaba 4€, es seguro que en algún momento ir al cine costaba exactamente 4.99€. ¿Seguro? No, a ningún empresario de cine le parecería bien cobrar 4.99€ por la entrada.

La diferencia está en que la talla de una persona es una función continua del tiempo y para pasar de 135cm a 175cm tiene que pasar por todos los valores intermedios, pero el precio de las entradas de cine no varía de forma continua con el tiempo y puede pasar "de golpe" de 4.5€ a 5€.

La gráfica de una función continua en un intervalo, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, la imaginamos como una curva continua, por ello, si $f(a) < 0 < f(b)$, la gráfica de f tiene que atravesar el eje de abscisas para pasar de un punto situado por debajo de él a otro que se encuentra por encima y, por tanto, f *tiene que* anularse en algún punto entre a y b. Esto es precisamente lo que afirma el conocido *teorema* que sigue.

4.13 Teorema (Teorema de los ceros de Bolzano). *Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.*

Lo primero que llama la atención en este teorema es su *evidencia*. No está de más a este respecto recordar que, como decía Bertrand Russell, "en matemáticas, la evidencia es enemiga de

la corrección". Precisamente, el mérito de Bernard Bolzano (1781-1848) está en haber llamado la atención sobre la necesidad de *demostrar* muchas proposiciones, aparentemente evidentes, que se refieren a las funciones continuas. Podemos añadir, además, que suele ser particularmente difícil demostrar matemáticamente lo que nuestra intuición presenta como evidente; de hecho, *con las herramientas que tenemos hasta ahora no podemos demostrar el teorema*.

La función $f(x) = x^2 - 2$ es continua y $f(0) < 0 < f(2)$, el teorema de Bolzano asegura que existe un número positivo en el que f se anula. En otras palabras, el teorema prueba *la existencia* del número $\sqrt{2}$ y, como dicho número no es racional, deducimos que para probar el teorema se precisa usar alguna propiedad que NO tienen los números racionales. Pero todas las propiedades de los números reales que enunciamos en el Capítulo 1 las tienen también los números racionales. Concluimos que los números reales deberán tener otra propiedad que todavía no hemos considerado.

4.3.1. La propiedad del supremo

Comentamos en el Capítulo 1 que no debemos preocuparnos mucho *por lo que sea* el número $\sqrt{2}$, pero al menos deberíamos de tener alguna forma de *probar su existencia*; es decir, de las propiedades de los números reales se debería poder deducir que hay un número cuyo cuadrado es igual a 2. ¿Qué sabemos de $\sqrt{2}$? No es racional, pero podemos aproximarlo por racionales. Con una calculadora obtenemos sucesivas aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$ por defecto:

$$1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1.414213,\dots$$

Es claro que $\sqrt{2}$ debe ser el *menor número mayor que todas ellas*. Pues bien, justamente necesitamos una propiedad que garantice la existencia de ese "menor número mayor que". Nos vendrá bien introducir alguna terminología nueva.

4.14 Definición. Sea E un conjunto no vacío de números reales. Un número $z \in \mathbb{R}$ se dice que es un **mayorante o cota superior** (resp. **minorante o cota inferior**) de E si $x \leqslant z$ (resp. $z \leqslant x$) para todo $x \in E$.

Si hay algún elemento de E que también sea mayorante (resp. minorante) de E, dicho elemento es necesariamente único y se llama **máximo** (resp. **mínimo**) de E y lo representaremos por $\max(E)$ (resp. $\min(E)$).

Un conjunto que tiene algún mayorante (resp. minorante) se dice que está **mayorado o acotado superiormente** (resp. **minorado o acotado inferiormente**). Un conjunto que está mayorado y minorado se dice que está **acotado**.

Está claro que un conjunto puede no tener mínimo ni máximo. Los problemas de "optimización" consisten, justamente, en estudiar condiciones que garanticen la existencia de valores máximos y mínimos para funciones de diversas clases. La siguiente propiedad garantiza que *ciertos conjuntos* de números reales tienen mínimo.

P8 Propiedad del supremo. Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

4.15 Definición. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}$, no vacío y mayorado, se llama **supremo o extremo superior** de E, al mínimo mayorante de E y lo notaremos por $\sup(E)$.

Con esta terminología lo que dice la propiedad **P8** es que todo conjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo (pero nótese que el supremo no tiene por qué pertenecer al conjunto).

4.3.2. Propiedad de extremo inferior

A partir de la propiedad del supremo, se prueba con facilidad el siguiente resultado.

4.16 Proposición (Propiedad del ínfimo). *Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.*

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}$, un conjunto no vacío y minorado. Definamos $A = \{-x : x \in E\}$. El conjunto A es no vacío y mayorado (pues si z es un minorante de E entonces $-z$ es mayorante de A). La propiedad del supremo nos dice que hay un número real c que es el mínimo mayorante de A. Comprobemos que $-c$ es el máximo minorante de E. Para todo $x \in E$ se tiene que $-x \in A$ y como c es un mayorante de A, tenemos que $-x \leqslant c$, esto es, $-c \leqslant x$. Por tanto $-c$ es un minorante de E. Veamos que es el máximo minorante, y para ello probaremos que ningún número mayor que $-c$ es minorante de E. Sea, pues, $u > -c$. Entonces $-u < c$ y, como c es el mínimo mayorante de A, se sigue que $-u$ no puede ser mayorante de A, esto es, tiene que haber algún elemento $x \in A$ tal que $-u < x$. Pero entonces tenemos que $-x < u$ y, como $-x \in E$, concluimos que u no es minorante de E. □

4.17 Definición. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}$, no vacío y minorado, se llama **ínfimo o extremo inferior** de E, al máximo minorante de E y lo notaremos por $\text{ínf}(E)$.

Con esta terminología lo que dice la propiedad del ínfimo es que todo conjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo (pero nótese que el ínfimo no tiene por qué pertenecer al conjunto).

4.18 Estrategia. Para probar desigualdades en las que intervienen supremos o ínfimos las siguientes observaciones, aunque evidentes, pueden ser útiles. Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.

a) Si queremos probar que un número real x verifica que $\sup(C) \leqslant x$, lo que tenemos que hacer es probar que x es un mayorante de C.

b) Si queremos probar que un número real x verifica que $x \leqslant \text{ínf}(C)$, lo que tenemos que hacer es probar que x es un minorante de C.

Sea C un conjunto no vacío y acotado de números reales. Pongamos $\alpha = \text{ínf}(C)$, $\beta = \sup(C)$. Los siguientes razonamientos son de uso constante:

a) Si un número real x verifica que $x < \beta$ entonces x no puede ser mayorante de C (porque β es el mínimo mayorante de C), por tanto tiene que haber algún $z \in C$ tal que $x < z$.

b) Si un número real x verifica que $x > \alpha$ entonces x no puede ser minorante de C (porque α es el máximo minorante de C), por tanto tiene que haber algún $u \in C$ tal que $u < x$.

La propiedad del supremo es lo que distingue a los números reales de los racionales. Dicha propiedad se usa para probar la existencia de números reales que cumplen alguna determinada condición. La demostración del teorema de Bolzano es un ejemplo importante de ello.

Demostración del teorema de los ceros de Bolzano

Es suficiente probar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces f se anula en algún punto del intervalo $]a,b[$. Una buena estrategia para demostrar un teorema es "darlo por demostrado" y *trabajar hacia atrás*. Tenemos que buscar un punto $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$. Por supuesto, puede haber muchos puntos donde f se anule (el teorema dice que *al menos hay uno*), pero de todos ellos el más fácil de caracterizar es el "primero", porque a la izquierda de él la función es siempre negativa. Esto lleva a considerar el conjunto E de los puntos $x \in [a,b]$ tales que f toma valores negativos en $[a,x]$:

$$E = \{x \in [a,b] : f(t) < 0 \ \text{ para todo } \ t \in [a,x]\}$$

Por su definición, tenemos que $E \subset [a,b]$ y $a \in E$. La propiedad del supremo nos dice que hay un número real, c, que es el supremo de E. Es evidente que $a \leqslant c \leqslant b$. La propiedad de conservación local del signo implica que existe algún $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b - \delta$ y f es negativa en todos los puntos del intervalo $[a, a+\delta]$ y positiva en todos los puntos del intervalo $[b-\delta, b]$. Esto implica que $a < c < b$.

Veamos que $[a,c[\subset E$. Sea $a < x_0 < c$. Como $x_0 < c$ y c es el mínimo mayorante de E, tiene que existir algún punto $z_0 \in E$ tal que $x_0 < z_0 \leqslant c$. Por tanto, si $t \in [a,x_0]$ también $t \in [a,z_0]$ y, como, $z_0 \in E$, será $f(t) < 0$, luego $x_0 \in E$. Nótese que hemos probado también que $f(x) < 0$ para todo $x \in [a,c[$.

Finalmente, probaremos que $f(c) = 0$. Como a la izquierda de c la función f toma valores negativos y f es continua, deducimos que *no puede ser* $f(c) > 0$ y, por tanto, $f(c) \leqslant 0$. Pero tampoco puede ser $f(c) < 0$, pues entonces, por la conservación local del signo, habría un intervalo de la forma $[c-\rho, c+\rho] \subset [a,b]$ tal que $f(t) < 0$ para todo $t \in [c-\rho, c+\rho]$ lo que implica que en E hay puntos mayores que c lo que es contradictorio. Concluimos así que $f(c) = 0$. □

Observa que la demostración que hemos dado no nos dice cómo calcular un punto en el que la función se anule. Es una demostración de "existencia". Veremos más adelante otra demostración, algo más constructiva, en la que se basa un algoritmo bastante eficaz para calcular de forma aproximada raíces de ecuaciones.

Un enunciado *equivalente* del teorema de Bolzano es el siguiente.

4.19 Teorema (**Teorema del valor intermedio**). *La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.*

Demostración. Supongamos que I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I. Queremos probar que la imagen de f, esto es, el conjunto $J = f(I)$ es un intervalo. Teniendo en cuenta la definición de intervalo (2.10), deberemos probar que si dos números están en J, todos los números comprendidos entre ellos también se quedan dentro de J. Sean pues, u, v

elementos de J con $u < v$. Debe haber elementos α, β en I tales que $f(\alpha) = u$, $f(\beta) = v$. Como f es una función, debe ser $\alpha \neq \beta$; podemos suponer que $\alpha < \beta$. Sea $z \in]u, v[$, esto es, $u < z < v$. Definamos la función $h : I \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = z - f(x)$ para todo $x \in I$. Como f es continua, h es continua en I. Tenemos que $h(\alpha) = z - f(\alpha) = z - u > 0$ y $h(\beta) = z - f(\beta) = z - v < 0$. Como I es un intervalo, tenemos que $[\alpha, \beta] \subset I$. Podemos, pues, aplicar el teorema antes demostrado a la función h en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y obtenemos que tiene que haber algún punto $\lambda \in]\alpha, \beta[$ tal que $h(\lambda) = z - f(\lambda) = 0$. Hemos probado así que $f(\lambda) = z$. Como $\lambda \in [\alpha, \beta] \subset I$, concluimos que $z \in J = f(I)$. Como esto es cierto cualquiera sea el punto $z \in]u, v[$, concluimos que $[u, v] \subset J$ y, en consecuencia, J es un intervalo.

Recíprocamente, si suponemos que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo, y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo I que toma valores positivos y negativos, entonces $J = f(I)$ es un intervalo en el que hay números negativos y positivos, luego debe contener al 0, es decir f tiene que anularse en algún punto de I. □

Observa que el teorema del valor intermedio dice que una función continua en un intervalo toma *todos los valores comprendidos entre dos cualesquiera de sus valores*. Bueno, eso es lo que nos dice la intuición ¿verdad?

4.20 Estrategia. El teorema de Bolzano proporciona una herramienta útil para probar que ciertas ecuaciones tienen solución. Consideremos el siguiente problema. Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder para aplicar el teorema de Bolzano es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Se comprueba que la función h es continua y está definida en un intervalo I. Unas veces el intervalo donde h está definida debemos elegirlo nosotros de forma adecuada, y otras veces viene impuesto por el enunciado del ejercicio.
- Se comprueba que hay puntos en I donde la función h es negativa y otros en los que h es positiva. Se concluye, por el teorema de Bolzano, que h debe anularse en algún punto de I, que es lo que queríamos probar.

4.3.3. Consecuencias del teorema de Bolzano

Hay consecuencias de este teorema que están lejos de ser evidentes. Algunas de ellas están expuestas en el excelente libro de R. Courant y H. Robbins *¿Qué es la Matemática?* ([17]). Por ejemplo, en dicho libro se demuestra, usando como herramienta básica el teorema de Bolzano, que, dadas dos regiones acotadas del plano, siempre existe una recta que divide simultáneamente a cada una de ellas en dos partes con igual área. Este resultado se puede generalizar. Puede probarse, con la ayuda del teorema de Bolzano, que si tenemos tres sólidos en el espacio (imagina que son tres bocadillos de muy distintos tamaños), es siempre posible encontrar un plano que los divida simultáneamente en dos partes de igual volumen (puedes cortar a los tres bocadillos exactamente “por la mitad” de un sólo tajo). Nosotros aquí nos conformaremos con obtener algunas consecuencias menos vistosas pero muy útiles.

4.21 Corolario (Existencia de raíces). *Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.*

Demostración. La función $f\colon \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^k - a$, es continua y $f(0) = -a < 0$, $f(1+a) = (1+a)^k - a > 0$. Deducimos que hay algún número $c > 0$ tal que $f(c) = 0$. Dicho número es único porque la función f es estrictamente creciente. □

4.22 Corolario (Ceros de polinomios de grado impar). *Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.*

Demostración. Sea

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n$$

una función polinómica de grado impar $n \geqslant 3$. Nuestro objetivo es probar que $P(x)$ toma valores positivos y negativos. Podemos suponer que $c_n > 0$. Supongamos en lo que sigue que $|x| \geqslant 1$. Dividiendo por x^n tenemos que

$$\frac{P(x)}{x^n} = \frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x} + c_n \tag{4.7}$$

Para $0 \leqslant k \leqslant n-1$, tenemos, por ser $|x| \geqslant 1$ y $n-k \geqslant 1$, que:

$$\frac{|c_k|}{|x|^{n-k}} \leqslant \frac{|c_k|}{|x|}$$

Por otra parte

$$\frac{|c_k|}{|x|} \leqslant \frac{c_n}{2n} \Longleftrightarrow |x| \geqslant \frac{|c_k|}{c_n}2n$$

Definamos

$$M = \text{máx}\left\{\frac{|c_k|}{c_n}2n : k = 0,1,2\ldots,n-1\right\}, \quad K = \text{máx}\{M, 1\}$$

Para $|x| \geqslant K$ y para $k = 0,1,2,\ldots,n-1$, tenemos que:

$$\frac{c_k}{x^{n-k}} \geqslant -\frac{|c_k|}{|x|^{n-k}} \geqslant -\frac{|c_k|}{|x|} \geqslant -\frac{c_n}{2n}$$

Deducimos que para $|x| \geqslant K$ es:

$$\frac{P(x)}{x^n} \geqslant -(n-1)\frac{c_n}{2n} + c_n > -\frac{c_n}{2} + c_n = \frac{c_n}{2} > 0 \tag{4.8}$$

Ahora si $x < -K$, se tiene por ser n impar que $x^n < 0$, y la desigualdad anterior implica que $P(x) < 0$. Análogamente, si $x > k$ debe ser $P(x) > 0$.

Hemos probado que $P(x)$ toma valores positivos y negativos, como es una función continua y está definida en un intervalo, $\mathbb{R}$, concluimos que debe anularse en algún punto. □

4.3.3.1. Continuidad y monotonía

Hemos visto que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo. Podemos preguntarnos si esta propiedad caracteriza la continuidad. En general, la respuesta es que no. Es fácil dar ejemplos de funciones discontinuas en un intervalo cuya imagen es un intervalo pero estas funciones no pueden ser monótonas. Es fácil entender que si una función monótona es discontinua es porque su gráfica "da saltos", es decir, su imagen *no* es un intervalo. El siguiente resultado deja claro este punto.

4.23 Teorema. *Una función monótona en un intervalo*[1] *cuya imagen es un intervalo es continua.*

Demostración. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función creciente en un intervalo I cuya imagen $J = f(I)$ es un intervalo. Queremos probar que f es continua. Sea $a \in I$ y supongamos que a no es un punto extremo de I, esto es, que los conjuntos

$$I_a^- = \{x \in I : x < a\}, \quad I_a^+ = \{x \in I : x > a\}$$

no son vacíos. Para demostrar que f es continua en a, probaremos que

$$\sup f(I_a^-) = \sup\{f(x) : x \in I, x < a\} = f(a) = \text{ínf}\{f(x) : x \in I, x > a\} = \text{ínf} f(I_a^+)$$

Probemos que $f(a) = \sup f(I_a^-)$. Pongamos $\alpha = \sup f(I_a^-)$. Para todo $x \in I_a^-$ tenemos que $x < a$ y, como f es creciente, $f(x) \leqslant f(a)$. Luego $f(a)$ es un mayorante del conjunto $f(I_a^-)$ y, en consecuencia, debe ser $\alpha \leqslant f(a)$. Veamos que no puede ocurrir que $\alpha < f(a)$. Para ello supondremos que $\alpha < f(a)$ y llegaremos a una contradicción. Tomemos un elemento cualquiera $z \in]\alpha, f(a)[$. Sea $u \in I_a^-$. Entonces $f(u) \leqslant \alpha < z < f(a)$. Como $f(u)$ y $f(a)$ están en $J = f(I)$ y J es, por hipótesis, un intervalo, deducimos que $z \in J$, esto es, $z = f(s)$ para algún $s \in I$. No puede ser $s = a$ y, como f es creciente y $z < f(a)$, debe verificarse que $s < a$, esto es, $s \in I_a^-$ en cuyo caso debe ser $f(s) \leqslant \alpha$, es decir, $z \leqslant \alpha$ lo cual es claramente contradictorio pues $\alpha < z$.

Análogamente se prueba que $f(a) = \beta = \text{ínf} f(I_a^+)$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Tiene que haber elementos $u \in I_a^-$ y $v \in I_a^+$ tales que $\alpha - \varepsilon < f(u)$ y $f(v) < \beta + \varepsilon$, es decir

$$f(a) - \varepsilon < f(u) \leqslant f(v) < f(a) + \varepsilon.$$

Definamos $\delta = \text{mín}\{a - u, v - a\} > 0$. Entonces para todo $x \in I$ verificando que $|x - a| < \delta$ se tiene que $x \in]a - \delta, a + \delta[\subset]u, v[$ y, por tanto, $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$ lo que implica que $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, esto es, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Los casos en que a es un posible extremo de I se hacen de forma análoga. □

4.24 Corolario. *Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.*

4.25 Corolario. *La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.*

[1] No es necesario suponer que la función está definida en un intervalo, de hecho en la demostración no se usa esta hipótesis. El enunciado que damos es para facilitar su visualización.

Demostración. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona definida en un intervalo I. Como f es inyectiva en I su inversa, f^{-1}, está definida en el conjunto imagen $J = f(I)$ y, claramente, $f^{-1}(J) = I$. Como la inversa de una función estrictamente monótona f es también estrictamente monótona (y del mismo tipo que f) e I es, por hipótesis, un intervalo, el teorema anterior, aplicado a f^{-1}, nos dice que f^{-1} es continua en J[2]. □

Considera una función inyectiva y continua en un intervalo e intenta dibujar su gráfica; comprobarás que la función no puede "subir y bajar" porque en tal caso se pierde la inyectividad, por tanto, o bien "siempre sube" y es estrictamente creciente, o bien "siempre baja" y es estrictamente decreciente. Eso es lo que afirma el siguiente resultado, que será usado más adelante para obtener una importante propiedad de las funciones con derivada distinta de cero.

4.26 Teorema. *Toda función inyectiva y continua en un intervalo es estrictamente monótona.*

Demostración. [3] Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva en el intervalo I. Sean $a_0 < b_0$ dos puntos de I. Como f es inyectiva debe ser $f(a_0) \neq f(b_0)$. Por tanto, o bien $f(b_0) - f(a_0) > 0$, o bien $f(b_0) - f(a_0) < 0$. Supongamos que es $f(b_0) - f(a_0) > 0$ y demostremos que f es estrictamente creciente en I. Para ello sean $a_1 < b_1$ puntos de I. Pongamos

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = (1-t)a_0 + ta_1 \\ y(t) = (1-t)b_0 + tb_1 \end{array}\right\} \qquad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Tenemos que $x(0) = a_0$, $x(1) = a_1$, $y(0) = b_0$, $y(1) = b_1$. Además, poniendo $\alpha = \operatorname{mín}\{a_0, a_1\}$ y $\beta = \operatorname{máx}\{a_0, a_1\}$, se tiene que:

$$\alpha = (1-t)\alpha + t\alpha \leqslant x(t) \leqslant (1-t)\beta + t\beta = \beta$$

Como I es un intervalo y $\alpha, \beta \in I$, se verifica que $[\alpha, \beta] \subset I$, por lo que $x(t) \in I$. Análogamente, se tiene que $y(t) \in I$. Además, como $a_0 < b_0$ y $a_1 < b_1$, se verifica que $x(t) < y(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$. Consideremos la función:

$$g(t) = f(y(t)) - f(x(t)) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

La función g es continua en $[0, 1]$ por ser composición y diferencia de funciones continuas. Como f es inyectiva y $x(t) < y(t)$, se tiene que $g(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$. El teorema de Bolzano implica que g debe tener signo constante en $[0, 1]$ y, como $g(0) > 0$, concluimos que $g(t) > 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Por tanto $g(1) = f(b_1) - f(a_1) > 0$. Hemos probado así que f es estrictamente creciente.

Análogamente, si se supone que es $f(b_0) - f(a_0) < 0$ se demuestra que f es estrictamente decreciente en I. □

4.3.4. Ejercicios propuestos

---

114. a) Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

[2] Este resultado es cierto tal como está enunciado, sin necesidad de suponer que la función es continua.
[3] Esta elegante demostración está tomada del libro de M. Spivak [16].

b) Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

c) Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.

d) Da un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.

e) Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

115. Prueba que si $f: A \to \mathbb{R}$ es continua en a entonces también lo es $|f|$. Da un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.

116. Representamos por $E(x)$ la parte entera de x (4.8). Haz un esquema de las gráficas de las siguientes funciones y estudia su continuidad.

a) $f(x) = x - E(x)$

b) $f(x) = E(1/x)$

117. Estudia la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = E(x^2)$.

118. Estudia la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

119. Estudia la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

120. Estudia la continuidad de la función $f: [0,4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(1) = 1/4$ y:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x \in [0,1[\cup]1,2] \\ E(x) - 7/4 & \text{si } x \in]2,4] \end{cases}$$

121. Estudia la continuidad de la función $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

122. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo x en $[a,b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

123. Sea $a > 1$. Prueba que la ecuación $x + \mathrm{e}^{-x} = a$ tiene al menos una solución positiva y otra negativa.

124. Prueba que la ecuación $x + \mathrm{e}^{x} + \operatorname{arc\,tg} x = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

125. Prueba que hay un número real $x > 0$ tal que $\log x + \sqrt{x} = 0$.

126. Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que siempre hay dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

127. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) = f(b)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, prueba que hay algún punto $c \in [a, b-(b-a)/n]$ tal que $f(c) = f(c + (b-a)/n)$.

128. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demuestra que en algún momento de su carrera recorre 1 kilómetro en exactamente 5 minutos.

129. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuestra que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

130. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

131. Sean f, g funciones continuas que no se anulan en un intervalo I, verificando que $(f(x))^2 = (g(x))^2$ para todo $x \in I$. Prueba que o bien $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, o bien $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in I$. ¿Cuántas funciones hay $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y verificando que $(\varphi(x))^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$?.

132. Demuestra el apartado b) del teorema (4.3).

133. Justifica las afirmaciones del corolario (4.4).

134. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Prueba que hay un único $a \in \mathbb{R}$ verificando que $f(a) = a$.

135. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x)\big((f \circ f)(x)\big) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $f(1000) = 999$, calcula $f(500)$.

136. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\sin x = \dfrac{2x}{101\pi}$?

137. Sea E un conjunto no vacío de números reales acotado.

a) Describe el conjunto de todos los mayorantes de E.

b) Describe el conjunto de todos los minorantes de E.

138.

a) Prueba que $\sup(E) \in E$ si, y sólo si, E tiene máximo, en tal caso $\max(E) = \sup(E)$.

b) Prueba que $\inf(E) \in E$ si, y sólo si, E tiene mínimo, en tal caso $\min(E) = \inf(E)$.

139. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Prueba que $\sup A \leqslant \inf B$.

140. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) Si $A \subset B$ entonces $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ e $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.

b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

141. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}; \quad AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

Prueba que $\sup(A - B) = \sup A - \operatorname{ínf} B$ y, supuesto que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$, prueba que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

142. Usando solamente la definición de intervalo (2.10), y las propiedades del supremo e ínfimo, describe todos los posibles tipos de intervalo.

143. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{ínf}\{|x - a| : a \in A\}$. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leqslant |x - y|$$

Deduce que la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ es continua.

144. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a, b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Prueba que f es constante.

145. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a, b[$. Prueba que hay dos números u, v verificando que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u, v[$.

146. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente. Supongamos que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo x en $[a, b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Sugerencia. Considera el supremo del conjunto $\{x \in [a, b] : x \leqslant f(x)\}$. Fíjate que no suponemos que f sea continua.

147. Justifica que, dado $x \in \mathbb{R}$, la ecuación $\log t + t^5 = x$ tiene una única solución, que representamos por $\varphi(x)$. Justifica que la función $x \mapsto \varphi(x)$, $(x \in \mathbb{R})$, así definida es continua.

148. Prueba que la función $f :] - 1, 1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\right)$ es biyectiva.

Calcula f^{-1} y comprueba que es una función continua.

149. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua verificando que $|f(s) - f(t)| \geqslant |s - t|$ para todos $s, t \in [0, 1]$, y $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$. Prueba que o bien es $f(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$, o bien es $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in [0, 1]$.

150. Sean

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0 \text{ o } x^2 < 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 \geqslant 2\}.$$

Prueba que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} = A \cup B$ y $a < b$ para todos $a \in A$, $b \in B$. Además:

a) Para cada $r \in A$ hay algún $s \in A$ tal que $r < s$.

b) Para cada $u \in B$ hay algún $t \in B$ tal que $t < u$.

c) No hay ningún $z \in \mathbb{Q}$ con la propiedad de que todo número racional menor que z esté en A y todo número racional mayor que z esté en B.

151. Sean
$$A=\{x\in\mathbb{R}: x\leqslant 0 \ \text{ o } \ x^2<2\},\ B=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \ \text{ y } \ x^2\geqslant 2\}.$$
Prueba que $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $\mathbb{R}=A\cup B$ y $a<b$ para todos $a\in A$ y $b\in B$. Sea $z\in\mathbb{R}$ el extremo superior de A. Prueba que $z^2=2$, $A=]-\infty,z[$, $B=[z,+\infty[$.

4.3.5. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 50 a) Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

b) Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

c) Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.

d) Da un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.

e) Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

Solución. a) Una función continua cuya imagen no sea un intervalo *no* puede estar definida en un intervalo. Una vez que caes en este detalle, se te deben de ocurrir muchos ejemplos. Como la función $f:]0,1[\cup]2,3[\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1$ para $x\in]0,1[$ y $f(x)=2$ para $x\in]2,3[$. Es claro que f es continua (usa, si quieres el teorema de localización para justificarlo en media línea) y su imagen es el conjunto $\{1,2\}$ que no es un intervalo.

b) Aquí debes tener en cuenta que, por el teorema (4.23), la función que buscas no puede ser monótona. Una vez que caes en este detalle, se te deben de ocurrir muchos ejemplos. Como la función $f:[0,2]\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2x$ para $x\in[0,1]$, $f(x)=x/2$ para $x\in]1,2]$. Claramente f es discontinua en $x=1$, pero su imagen es el intervalo $[0,2]$.

c) Esto es muy fácil. Por ejemplo, la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Claramente, $f(\mathbb{R})=]0,1]$.

d) Esto es muy fácil. Por ejemplo, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in[0,1[$. Claramente, $f([0,1[)=[1,+\infty[$.

e) Por ejemplo, la restricción de la función seno al intervalo $]-\pi,\pi[$. Si quieres otro ejemplo más elemental, puedes modificar de forma apropiada el ejemplo del punto b).

Ejercicio resuelto 51 Prueba que si $f:A\rightarrow\mathbb{R}$ es continua en a entonces también lo es $|f|$. Da un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.

Demostración. Todo lo que se necesita es la desigualdad $\big||u|-|v|\big|\leqslant|u-v|$. En nuestro caso tenemos:
$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$$

Supuesto que f es continua en a, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$ y $x \in A$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ lo que, por la desigualdad anterior, implica que $\big||f(x)| - |f(a)|\big| < \varepsilon$ y, por tanto, $|f|$ es continua en a.

La función dada por $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = -1$ si $x < 0$, es discontinua en 0 pero $|f|$ es continua en 0. ☺

Ejercicio resuelto **52** Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = E(x^2)$.

Demostración. Claramente $f = E \circ \varphi$ donde $\varphi(x) = x^2$. Puesto que φ es continua en todo punto y la función parte entera es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, deducimos por el teorema de composición de funciones continuas, que f es continua en todo punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a) = a^2 \notin \mathbb{Z}$. Es decir, f es continua en $\mathbb{R} \setminus B$ donde $B = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Los puntos de B requieren un estudio particular pues, ***a priori***, no podemos asegurar que f sea discontinua en ellos.

Empecemos estudiando la posible continuidad de f en 0. Es claro que para $-1 < x < 1$ tenemos que $0 \leqslant x^2 < 1$ por lo que $f(x) = 0$ para todo $x \in]-1, 1[$. Es decir, la función $f_{|]-1,1[}$ (*restricción de f al intervalo* $]-1,1[$) *es la función constante igual a* 0 y por tanto $f_{|]-1,1[}$ *es continua*. Como el intervalo $]-1,1[$ *es abierto* deducimos, *por el teorema de localización* que f es continua en $]-1,1[$ y, en particular, f *es continua en* 0.

Consideremos ahora un punto de la forma $\sqrt{q}$ donde $q \in \mathbb{N}$ (fijo en lo que sigue). Para todo $x \in]\sqrt{q-1}, \sqrt{q}[$ se tiene que $q-1 < x^2 < q$ por lo que $f(x) = q-1$. Cualquiera sea $\delta > 0$, hay puntos

$$x \in]\sqrt{q} - \delta, \sqrt{q} + \delta[\cap]\sqrt{q-1}, \sqrt{q}[$$

para los que $|f(\sqrt{q}) - f(x)| = |q - (q-1)| = 1$, por lo que tomando $\varepsilon_0 < 1$ deducimos que f no es continua en $\sqrt{q}$.

De forma análoga se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $-\sqrt{q}$ donde $q \in \mathbb{N}$. ☺

Ejercicio resuelto **53** Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

Solución. El teorema de localización puede usarse en este tipo de ejercicios. En nuestro caso, es evidente que para $x > 1$ es $f(x) = 0$, y para $x < -1$ es $f(x) = -x$. Por tanto la *restricción* de f a los intervalos $]1, +\infty[$ y $]-\infty, -1[$ es continua y, como estos intervalos son *abiertos*, deducimos por el teorema de localización que f es continua en dichos intervalos. De forma parecida podemos razonar con un intervalo del tipo $]1/(n+1), 1/n[$ donde $n \in \mathbb{N}$ pues, para $x \in]1/(n+1), 1/n[$ se tiene que $f(x) = nx$, luego la restricción de f a dicho intervalo es continua y, por tratarse de un intervalo *abierto*, deducimos que f es continua en $]1/(n+1), 1/n[$. Análogamente se razona con un intervalo del tipo $]-1/n, -1/(n+1)[$. El teorema de localización no nos dice qué pasa en los puntos extremos de los intervalos considerados, es decir, en los puntos de la forma $1/n$ donde $n \in \mathbb{Z}^*$, y tampoco en 0.

Estudiemos qué ocurre en un punto de la forma $1/p$ donde $p \geqslant 2$ es un entero (fijo en lo que sigue). Tenemos que $f(1/p) = 1$. Para todo $x \in]1/(p-1), 1/p[$ se tiene que

$p-1 < 1/x < p$, por lo que $E(1/x) = p-1$ y $f(x) = (p-1)x$, y por tanto

$$f(1/p) - f(x) = 1 - (p-1)x > 1 - (p-1)/p = 1/p.$$

En consecuencia, dado $\varepsilon_0 = 1/2p$, *cualquiera sea* $\delta > 0$ hay puntos $x \in]1/(p-1), 1/p[$ cuya distancia al punto $1/p$ es menor que δ, para los cuales *no se verifica* la desigualdad $|f(1/p) - f(x)| < \varepsilon_0$. Concluimos que f es discontinua en $1/p$. De forma parecida se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $1/q$ donde $q \leqslant -2$ es un entero. Igualmente se prueba que f es discontinua en los puntos 1 y -1.

Queda por ver qué pasa en 0. Si dibujamos con paciencia (con lápiz y regla) la gráfica de f obtenemos la figura 4.2 (los segmentos verticales indican discontinuidades de salto):

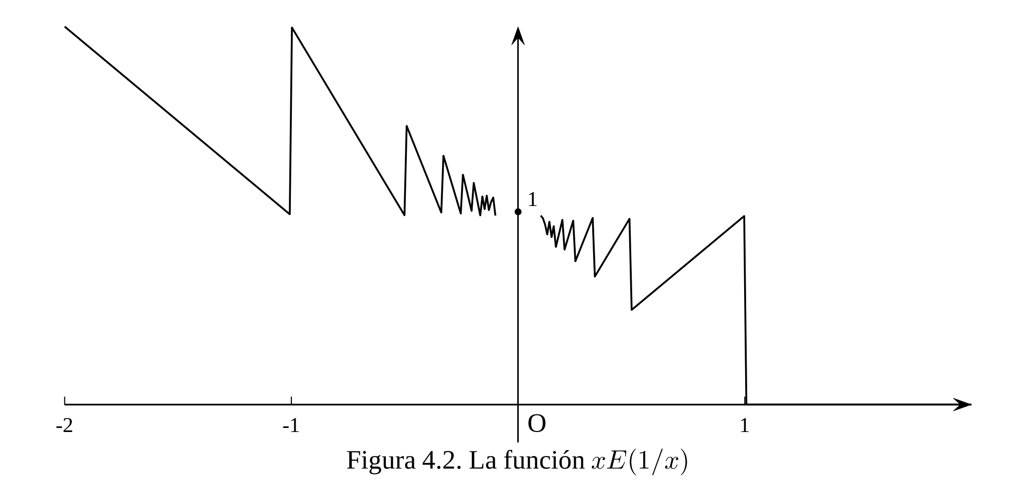


Figura 4.2. La función $xE(1/x)$

Parece que f es continua en 0. Para *probarlo* hay que probar que $|f(x) - f(0)|$ es tan pequeño como queramos ($< \varepsilon$) siempre que $|x - 0| = |x|$ sea suficientemente pequeño ($< \delta$). Lo usual en estos casos es *trabajar para atrás*. Empezamos *acotando* $f(x) - 1$. Recordemos que

$$E(1/x) \leqslant 1/x \leqslant E(1/x) + 1 \tag{4.9}$$

Si $x > 0$ podemos multiplicar por x dicha desigualdad para obtener que

$$xE(1/x) \leqslant 1 \leqslant xE(1/x) + x.$$

Resulta así que para $x > 0$ es:

$$0 \leqslant 1 - xE(1/x) = f(0) - f(x) \leqslant x \tag{4.10}$$

Si $x < 0$ podemos multiplicar por x la desigualdad (4.9) para obtener que

$$xE(1/x) \geqslant 1 \geqslant xE(1/x) + x.$$

Resulta así que para $x < 0$ es:

$$0 \geqslant 1 - xE(1/x) = f(0) - f(x) \geqslant x \quad \text{es decir} \quad 0 \leqslant f(x) - f(0) \leqslant -x \tag{4.11}$$

De (4.10) y (4.11) deducimos que $|f(x) - f(0)| \leqslant |x|$. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ con lo que, evidentemente, si $|x| < \delta$ entonces $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Luego f es continua en 0. ☺

Ejercicio resuelto 54 Estudia la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$.

Solución. El propósito de este ejercicio es que no olvides que $|\operatorname{sen} z|\leqslant 1$ para todo $z\in\mathbb{R}$. Da igual como escribas z, esta desigualdad es válida para todo número real z (recuerda cómo deben leerse las matemáticas). Por tanto $|\operatorname{sen}(1/x)|\leqslant 1$. En consecuencia, $|f(x)|\leqslant|x|$ de donde se sigue inmediatamente que f es continua en 0. ☺

Ejercicio resuelto 55 Estudia la continuidad de la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ 1/q & \text{si } x=p/q \text{ (fracción irreducible)}\end{cases}$$

Solución. Es fácil probar que la función es discontinua en todos los puntos racionales de $]0,1]$. La idea es que en todo intervalo abierto hay números irracionales en los que la función vale 0. Sea $r=\frac{p}{q}\in]0,1]$ un número racional escrito como fracción irreducible. Tenemos que $f(r)=\frac{1}{q}$. Tomemos ahora un $\varepsilon>0$ menor que $\frac{1}{q}$; por ejemplo $\varepsilon=\frac{1}{2q}$. Cualquiera sea $\delta>0$, en el intervalo $]r-\delta,r+\delta[\cap[0,1]$ hay números irracionales, si x es uno de ellos, se tiene que $x\in[0,1]$, $|x-r|<\delta$ pero $|f(x)-f(r)|=\frac{1}{q}$ no es menor que $\varepsilon=\frac{1}{2q}$. Concluimos que f es discontinua en r.

Para probar que f es continua en todos los puntos irracionales de $[0,1]$ y también en 0 hay que pensar un poquito. La idea es la siguiente: dado $\varepsilon>0$, quitar los puntos de $[0,1]$ donde la función toma un valor mayor que ε. Dichos puntos son los puntos racionales de la forma $r=\frac{p}{q}$ (fracción irreducible $p,q\in\mathbb{N}$) con $\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$, esto es, $q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$. Fijado un valor de $\varepsilon>0$, el conjunto de valores de $q\in\mathbb{N}$ para los que se verifica que $\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ es finito. Llamemos a este conjunto Q_ε. Para cada número $q\in Q_\varepsilon$ las fracciones irreducibles de la forma $\frac{p}{q}$ que están en $]0,1]$ son como mucho $q-1$. Concluimos que el conjunto de los números racionales de $]0,1]$ en los que la función f toma un valor mayor o igual que ε, es finito. Llamemos a este conjunto R_ε. Sea ahora a un número irracional de $[0,1]$ o $a=0$. Tenemos que $a\notin R_\varepsilon$ por lo que para todo $r\in R_\varepsilon$ el número $|a-r|$ es positivo. Sabemos que todos conjunto finito tiene máximo y mínimo. Definamos $\delta=\min\{|a-r|:r\in R_\varepsilon\}$. Entonces $\delta>0$ y para todo $x\in[0,1]$ con $|x-a|<\delta$ se tiene que $x\notin R_\varepsilon$, luego $|f(x)-f(a)|=f(x)<\varepsilon$, lo que prueba que f es continua en a. ☺

Ejercicio resuelto 56 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a\leqslant f(x)\leqslant b$ para todo x en $[a,b]$. Prueba que hay algún punto $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$.

Solución. Este ejercicio es muy sencillo. Basta hacer una representación gráfica. Imagina la gráfica de una función continua f en $[a,b]$ que toma valores en $[a,b]$. Lo que te dicen en el ejercicio es que pruebes que la gráfica de f corta a la diagonal del rectángulo $[a,b]\times[a,b]$. Gráficamente eso es evidente. Para hacerlo, seguiremos la estrategia (4.20). La ecuación que debemos considerar es $f(x)=x$. Definamos $h(x)=x-f(x)$ para $x\in[a,b]$. La función h es continua, porque nos dicen que f es continua, y está definida en el intervalo $[a,b]$. Tenemos que $h(a)=a-f(a)\leqslant 0$ y $h(b)=b-f(b)\geqslant 0$. Si alguno de estos números es igual a 0 entonces $c=a$ o $c=b$; en otro caso debe ser $h(a)<0$ y $h(b)>0$, en cuyo caso el teorema de Bolzano asegura que hay algún $c\in]a,b[$ tal que $h(c)=0$, es decir, $f(c)=c$. ☺

Ejercicio resuelto 57 Prueba que la ecuación $x + \mathrm{e}^x + \operatorname{arc\,tg} x = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Solución. Sea $f(x) = x + \mathrm{e}^x + \operatorname{arc\,tg} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es evidente que $f(x) > 0$ para todo $x \geqslant 0$. Observa que si $x < 0$ y está muy alejado del origen, entonces e^x es positivo pero muy pequeño y $\operatorname{arc\,tg} x$ será negativo (cercano a $-\pi/2$). Vemos así que para estos valores de x la función f será negativa. De alguna forma debemos justificar esto que "vemos". Podríamos hacerlo estudiando el límite en $-\infty$ pero aún no tenemos esa herramienta. Para lo que nos pide el ejercicio, es suficiente que encontremos un punto $a < 0$ en el que $f(a) < 0$. En estos ejercicios no hay que buscar valores "raros". Tomemos $a = -1$. Tenemos que $f(-1) = -1 + 1/\mathrm{e} + \operatorname{arc\,tg}(-1) = -1 + 1/\mathrm{e} - \pi/4$, como $e > 2$, claramente es $f(-1) < 0$. Como f es continua, está definida en un intervalo (todo $\mathbb{R}$) y toma valores positivos y negativos, el teorema de Bolzano nos dice que debe anularse en algún punto. Como la función f es estrictamente creciente, por ser suma de funciones estrictamente crecientes, es inyectiva, por lo que se anula en un único punto. Además, como $f(0) = 1$, el teorema de Bolzano nos dice que el punto donde f se anula está en $[-1, 0]$. ☺

Ejercicio resuelto 58 Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que siempre hay dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

Solución. Llamemos L a la longitud del ecuador terrestre (unos cuarenta mil Kilómetros). Sea $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ la función que a cada punto $x \in [0, L]$ hace corresponder la temperatura, $f(x)$, medida en grados centígrados, que hay en dicho punto del ecuador. Suponemos que f es una función continua (cosa muy razonable). Se trata de probar que hay algún punto $c \in [0, L/2]$ tal que $f(c) = f(c + L/2)$. Para ello, aplicando la estrategia (4.20), consideramos la función $h(x) = f(x + L/2) - f(x)$ definida en el intervalo $[0, L/2]$. Tenemos que $h(0) = f(L/2) - f(0)$ y $h(L/2) = f(L) - f(L/2)$. Lo único que hay que darse cuenta ahora es que el punto a distancia L vuelve a ser el punto de partida (el ecuador es una curva cerrada), por tanto $f(L) = f(0)$ y, $h(L/2) = f(0) - f(L/2)$. Observamos que $h(0)$ y $h(L/2)$ son números opuestos. O los dos son cero, en cuyo caso podemos tomar $c = 0$, o uno es negativo y otro positivo, en cuyo caso el teorema de Bolzano asegura que h tiene que anularse en algún $c \in]0, L/2[$, esto es, $f(c + L/2) = f(c)$, como se quería probar. ☺

Ejercicio resuelto 59 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) < f(b)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, prueba que hay algún punto $c \in [a, b - (b - a)/n]$ tal que

$$f(c + (b - a)/n) - f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

Solución. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Llamemos al número $f(b) - f(a)$ el *incremento* de f en $[a, b]$. Dado un número natural $n \geqslant 2$, nos preguntamos si hay algún intervalo de longitud $(b - a)/n$ en el cual el incremento de f sea igual a $(f(b) - f(a))/n$. Para ello dividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos de longitud igual a $(b - a)/n$. Estos intervalos son de la forma $[x_k, x_{k+1}]$, donde $x_k = a + k(b - a)/n$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Es claro que la suma de los incrementos de f en cada uno de los n intervalos $[x_k, x_{k+1}]$

es igual al incremento de f en el intervalo $[a, b]$. Es decir:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a).$$

Como en esta suma hay n sumando en total, deducimos que *o bien todos ellos son igual* a $(f(b) - f(a))/n$ o bien alguno de ellos es mayor que $(f(b) - f(a))/n$ en cuyo caso tiene que haber necesariamente otro que sea menor que $(f(b) - f(a))/n$.

Definamos la función $g : [a, b - (b - a)/n] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x+(b-a)/n)-f(x)$. Nótese que $g(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Según acabamos de ver:

- O bien para todo $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ es $g(x_k) = \dfrac{f(b) - f(a)}{n}$, en cuyo caso se verifica que $f(x_{k+1}) - f(x_k) = \dfrac{f(b) - f(a)}{n}$.
- O bien hay puntos x_p, x_q tales que $g(x_p) < (f(b) - f(a))/n < g(x_q)$, en cuyo caso, como la función g es continua, el teorema de Bolzano implica que tiene que haber algún punto t_0 comprendido entre x_p y x_q tal que $g(t_0) = (f(b) - f(a))/n$, es decir se verifica que $f(t_0 + (b - a)/n) - f(t_0) = (f(b) - f(a))/n$.

Hemos probado así que hay un intervalo de longitud $(b - a)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(b) - f(a))/n$. ☺

Ejercicio resuelto **60** Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuestra que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

Solución. Sea $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(t) =$ tiempo (medido en horas) que marca el reloj en el tiempo t. Podemos admitir que f es continua. El incremento de f en el intervalo $[0, 12]$ es igual a $f(12)-f(0) = 12$. Deducimos, por lo antes visto que, para cada $n \geqslant 2$, hay algún intervalo de longitud $(12 - 0)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(12) - f(0))/n$. Es decir, que en algún instante c_0 el reloj mide con exactitud un período de tiempo igual a $\frac{12}{n}$ horas: $f(c_0+12/n)-f(c_0) = 12/n$. Tomando $n = 12$ obtenemos la solución del ejercicio. ☺

Ejercicio resuelto **61** Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

Solución. Supongamos que el automovilista tarda 4 horas en llegar a Madrid. Llamando $f : [8, 12] \to \mathbb{R}$ la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $f(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el sábado, y $g : [8, 12] \to \mathbb{R}$ a la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $g(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el domingo; tenemos que $f(8) = g(8) = 0$, $f(12) = g(12) = \alpha$ donde α es la distancia entre Granada y Madrid.

Como las funciones f y g son continuas, la función $h(t) = f(t) - (\alpha - g(t))$ también es continua. Como $h(8) = -\alpha < 0$, $h(12) = \alpha > 0$, deducimos que $h(t_0) = 0$ para algún

$t_0 \in [8,12]$, es decir $f(t_0) = \alpha - g(t_0)$. Por tanto, el sábado y el domingo, en el instante t_0 el automovilista se encuentra a la misma distancia de Granada.

Si dibujas las gráficas de f y de $\alpha - g$ verás que este resultado es *evidente*. ☺

Ejercicio resuelto 62 Sean f, g funciones continuas que no se anulan en un intervalo I, verificando que $(f(x))^2 = (g(x))^2$ para todo $x \in I$. Prueba que o bien $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, o bien $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in I$. ¿Cuántas funciones hay $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y verificando que $(\varphi(x))^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$?.

Solución. La función $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en I y verifica que $h(x)^2 = 1$ para todo $x \in I$, luego $h(x) = 1$ o $h(x) = -1$ para cada $x \in I$. Como I es un intervalo y h es continua, el conjunto $h(I)$ tiene que ser un intervalo, luego deberá ser $h(I) = \{1\}$ o $h(I) = \{-1\}$. En el primer caso es $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, en el segundo $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in I$.

La igualdad $\varphi(x)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ equivale a $|\varphi(x)| = |x|$. Lo que da cuatro posibilidades; a saber: $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = -x$, $\varphi_3(x) = |x|$, $\varphi_4(x) = -|x|$, donde, en cada caso, se entiende que las igualdades son para todo $x \in \mathbb{R}$. ☺

Ejercicio resuelto 63 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Prueba que hay un único $a \in \mathbb{R}$ verificando que $f(a) = a$.

Solución. Naturalmente, se trata de probar que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se anula en algún punto. Como es continua (porque nos dicen que f lo es) y está definida en un intervalo, intentaremos aplicar el teorema de Bolzano. Tomemos un punto $c \in \mathbb{R}$. Si $f(c) = c$ hemos acabado. En otro caso será $f(c) \neq c$. Supongamos que $f(c) < c$. Entonces, como f es decreciente, será $f(f(c)) \geqslant f(c)$. Si $f(f(c)) = f(c)$, hemos acabado. En otro caso será $f(f(c)) > f(c)$. Pero en este caso obtenemos que $g(c) > 0$ y $g(f(c)) < 0$ por lo que el teorema de Bolzano garantiza que g tiene que anularse en algún punto. Se razona de forma análoga si suponemos que $c < f(c)$. Finalmente, como g es estrictamente creciente, solamente puede anularse en un único punto. ☺

Ejercicio resuelto 64 Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}; \quad AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

Prueba que $\sup(A - B) = \sup A - \operatorname{ínf} B$ y, supuesto que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$, prueba que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Solución. Sea $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \operatorname{ínf}(B)$, $\gamma = \sup(A - B)$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant b$. En consecuencia $a - b \leqslant \alpha - \beta$, lo que prueba que $\alpha - \beta$ es un mayorante de $A - B$, y por tanto $\gamma \leqslant \alpha - \beta$. Probaremos ahora que $\alpha - \beta \leqslant \gamma$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a - b \leqslant \gamma$, es decir, $a \leqslant b + \gamma$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número $b + \gamma$ es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant b + \gamma$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $\alpha - \gamma \leqslant b$, es decir, $\alpha - \gamma$ es un minorante de B, y por tanto $\alpha - \gamma \leqslant \beta$, es decir, $\alpha - \beta \leqslant \gamma$.

Sea $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \sup(B)$, $\mu = \sup(AB)$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha$ y $b \leqslant \beta$. En consecuencia, por ser $a > 0, b > 0$, $ab \leqslant \alpha\beta$, lo que prueba

que $\alpha\beta$ es un mayorante de AB y por tanto $\mu \leqslant \alpha\beta$.
Probaremos ahora que $\alpha\beta \leqslant \mu$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $ab \leqslant \mu$, esto es, $a \leqslant \mu/b$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número μ/b es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant \mu/b$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $b \leqslant \mu/\alpha$, es decir,μ/α es un mayorante de B, y por tanto $\beta \leqslant \mu/\alpha$, es decir, $\alpha\beta \leqslant \mu$. ☺

Ejercicio resuelto 65 Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leqslant |x - y|.$$

Deduce que la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ es continua.

Solución. Teniendo en cuenta que $|a| \leqslant b$ equivale a que $a \leqslant b$ y $-a \leqslant b$, la desigualdad que nos piden probar equivale a estas dos desigualdades:

$$\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \leqslant |x - y| \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(y, A) - \operatorname{dist}(x, A) \leqslant |x - y| \tag{4.12}$$

Pero es claro que basta con probar una sola de ellas pues entonces cambiando x por y obtenemos la otra (porque $|x - y| = |y - x|$). Probaremos la primera de las dos desigualdades (4.12). Escribamos la desigualdad en la forma:

$$\operatorname{dist}(x, A) \leqslant |x - y| + \operatorname{dist}(y, A)$$

En todo lo que sigue x e y están fijos. Tenemos que para todo $a \in A$:

$$\operatorname{dist}(x, A) \leqslant |x - a| \leqslant |x - y| + |y - a|.$$

Es decir

$$\operatorname{dist}(x, A) - |x - y| \leqslant |y - a| \quad \text{para todo} \quad a \in A.$$

Deducimos que $\operatorname{dist}(x, A) - |x - y|$ es un minorante del conjunto $\{|y - a| : a \in A\}$, y por tanto será menor o igual que el máximo minorante de dicho conjunto, que es por definición $\operatorname{dist}(y, A)$. Hemos probado así que

$$\operatorname{dist}(x, A) - |x - y| \leqslant \operatorname{dist}(y, A).$$

Que es la desigualdad que queríamos probar.

Es evidente, teniendo en cuenta la desigualdad que acabamos de probar, que la función $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ es continua, pues dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ con lo que, evidentemente, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |x - y| < \varepsilon$ siempre que $|x - y| < \delta$. Observa que aquí un mismo "δ" vale para todo punto. ☺

Ejercicio resuelto 66 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a, b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Prueba que f es constante.

Solución. Llamemos $\beta = \sup f(\mathbb{R})$. Es claro que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Y, si f es constante deberá darse la igualdad $f(x) = \beta$ en todo punto x de $\mathbb{R}$. Luego tenemos que probar que, dado $a \in \mathbb{R}$, es imposible que ocurra $f(a) < \beta$. Pero eso es claro, pues

si fuera $f(a) < \beta$, entonces tomando $\lambda \in]f(a), \beta[$, por el teorema de conservación del signo aplicado a la función $g(x) = \lambda - f(x)$ en el punto a, deducimos que existe un intervalo abierto $]u, v[$ que contiene al punto a y tal que para todo $x \in]u, v[$ es $g(x) > 0$, es decir, $f(x) < \lambda$. Pero entonces $\sup f(]u, v[) \leqslant \lambda < \beta$ en contradicción con la hipótesis hecha. ☺

Ejercicio resuelto **67** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente. Supongamos que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo x en $[a, b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Sugerencia. Considera el supremo del conjunto $\{x \in [a, b] : x \leqslant f(x)\}$. Fíjate que no suponemos que f sea continua.

Solución. Sea $M = \{x \in [a, b] : x \leqslant f(x)\}$. El conjunto M no es vacío ($a \in M$) y está mayorado (b es un mayorante de M). Sea $c = \sup(M)$. Evidentemente $c \in [a, b]$. Probaremos que $f(c) = c$. Probaremos para ello que *no* puede ser $f(c) \neq c$.

a) Si fuera $c < f(c)$, entonces, como c es un mayorante de M, tendríamos que $f(c) \notin M$, es decir, $f(c) > f(f(c))$. Y también, por ser f creciente, tendríamos que $f(c) \leqslant f(f(c))$, resultando así una contradicción.

b) Si fuera $f(c) < c$, entonces hay algún $z \in M$ tal que $f(c) < z$. Y como $z \leqslant f(z)$ deducimos que $f(c) < f(z)$ lo cual, por ser f creciente, implica que $c < z$ lo que es contradictorio. ☺

Ejercicio resuelto **68** Justifica que, dado $x \in \mathbb{R}$, la ecuación $\log t + t^5 = x$ tiene una única solución, que representamos por $\varphi(x)$. Justifica que la función $x \mapsto \varphi(x)$, $(x \in \mathbb{R})$, así definida es continua.

Solución. La función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \log t + t^5$ es continua. Como $\mathbb{R}^+$ es un intervalo, el conjunto imagen $f(\mathbb{R}^+)$ también es un intervalo. Claramente $f(\mathbb{R}^+)$ es un intervalo no minorado ni mayorado, luego $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. La función f es estrictamente creciente, por tanto es inyectiva. Deducimos que dado $x \in \mathbb{R}$ hay un único $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(t) = x$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función inversa de f. La función φ es estrictamente creciente y su imagen es un intervalo ($\mathbb{R}^+$), luego es continua en virtud del teorema (4.23). ☺

Ejercicio resuelto **69** Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua verificando que $|f(s) - f(t)| \geqslant |s - t|$ para todos $s, t \in [0, 1]$, y $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$. Prueba que o bien es $f(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$, o bien es $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Solución. La clave de este ejercicio consiste en darse cuenta de que la condición del enunciado $|f(s) - f(t)| \geqslant |s - t|$ implica que f es inyectiva en $[0, 1]$. Como f se supone continua, el teorema (4.26) nos dice que f es estrictamente monótona.

La condición $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$ nos dice que o bien es $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ o bien es $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. En el primer caso f será estrictamente creciente y en el segundo estrictamente decreciente.

Supongamos que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Probaremos que $f(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$. Como f es estrictamente creciente, será $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Haciendo $t = 0$ y $s = x$ en la desigualdad $|f(s) - f(t)| \geqslant |s - t|$, obtenemos que $f(x) \geqslant x$. Haciendo $t = 1$ y $s = x$ obtenemos que $1 - f(x) \geqslant 1 - x$, es decir, $f(x) \leqslant x$. Concluimos que $f(x) = x$.

El caso en que $f(0)=1$ y $f(1)=0$ se hace de forma parecida. ☺

Ejercicio resuelto **70** Sean

$$A=\{x\in\mathbb{Q} : x\leqslant 0 \text{ o } x^2<2\},\quad B=\{x\in\mathbb{Q} : x>0 \text{ y } x^2\geqslant 2\}.$$

Prueba que $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $\mathbb{Q}=A\cup B$ y $a<b$ para todos $a\in A$, $b\in B$. Además:

a) Para cada $r\in A$ hay algún $s\in A$ tal que $r<s$.

b) Para cada $u\in B$ hay algún $t\in B$ tal que $t<u$.

c) No hay ningún $z\in\mathbb{Q}$ con la propiedad de que todo número racional menor que z esté en A y todo número racional mayor que z esté en B.

Solución. a) Sea $r\in A$. Si $r<1$ basta tomar $s=1$. Supongamos, pues, que $1\leqslant r$. Un número racional que sea mayor que r será de la forma $r+\varepsilon$ donde ε es un número racional positivo. Para que dicho número esté en A deberá verificarse que $(r+\varepsilon)^2<2$. Si, *además* $\varepsilon<1$, entonces $\varepsilon^2<\varepsilon$, por lo que $(r+\varepsilon)^2<r^2+2r\varepsilon+\varepsilon$. Es por tanto *suficiente* que $r^2+2r\varepsilon+\varepsilon\leqslant 2$ para lo cual basta tomar $\varepsilon=\dfrac{2-r^2}{2r+1}$. Es claro que dicho número ε es racional. Además, como $1\leqslant r$ y $r^2<2$, es $0<\varepsilon<1$ y por tanto el número $s=r+\dfrac{2-r^2}{2r+1}$ verifica que $r<s$ y $s\in A$.

b) Este apartado se hace de manera análoga al anterior. Dado $u\in B$ hay que tratar de determinar un número racional positivo, ε tal que $0<u-\varepsilon$ y $(u-\varepsilon)^2\geqslant 2$. Esta última condición es lo mismo que:

$$u^2-2\geqslant 2u\varepsilon-\varepsilon^2 \qquad (1)$$

Como queremos que $0<\varepsilon<u$, debemos tener $2u\varepsilon-\varepsilon^2>\varepsilon^2>0$. Sabemos que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2, en consecuencia si $u\in B$ entonces $u^2>2$. Puesto que $2u\varepsilon>2u\varepsilon-\varepsilon^2$, para que se verifique (1) es *suficiente* que $u^2-2\geqslant 2u\varepsilon$, para lo cual basta tomar $\varepsilon=\dfrac{u^2-2}{2u}$ se tiene con ello que el número $t=u-\dfrac{u^2-2}{2u}$ está en B y $t<u$.

c) Sea $z\in\mathbb{Q}$. Como $A\cup B=\mathbb{Q}$, deberá ser $z\in A$ o $z\in B$. Si $z\in A$, sabemos, por a), que hay elementos $s\in A$ con $z<s$. Si $z\in B$, sabemos, por b), que hay elementos $t\in B$ con $t<z$. Concluimos así que no hay ningún $z\in\mathbb{Q}$ verificando que todo número racional menor que z está en A y todo número racional mayor que z está en B. ☺

4.4. Continuidad en intervalos cerrados y acotados

Sabemos que la imagen, $f(I)$, de un intervalo I por una función continua f es un intervalo. También sabemos, porque hemos visto ejemplos (50), que, en general, el intervalo $f(I)$ no es del *mismo tipo* que I. Aquí tiene algunos ejemplos más.

1. $f(x) = x^2$; $f([-1,1[) = f(]-1,1]) = [0,1]$;
2. $f(x) = 1/x$; $f(]0,1]) = [1,+\infty[$; $f([1,+\infty[) =]0,1]$.
3. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $f(]-\pi,\pi[= [-1,1]$.

Vemos así que la imagen por una función continua de un intervalo abierto, o semiabierto, o de una semirrecta, puede ser un intervalo de distinto tipo. Queda por considerar qué ocurre con los intervalos cerrados y acotados, es decir, los de la forma $[a,b]$. Vamos a probar que este tipo de intervalos se conservan por funciones continuas. Nótese que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, como ya sabemos que $f([a,b])$ es un intervalo, para probar que $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado basta probar que el intervalo $f([a,b])$ tiene máximo y mínimo, es decir, que hay números $u,v\in[a,b]$ tales que para todo $x\in[a,b]$ es $f(u)\leqslant f(x)\leqslant f(v)$, pues entonces será $f([a,b]) = [f(u),f(v)]$.

En la siguiente definición introducimos la terminología que se usa.

4.27 Definición. Sea $f:B\to\mathbb{R}$. Se dice que f está mayorada (resp. minorada) en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado (resp. minorado). Se dice que f *está acotada en* B si el conjunto $f(B)$ está acotado. Se dice que f alcanza en B un **máximo** (resp. un **mínimo**) **absoluto** si el conjunto $f(B)$ tiene máximo (resp. mínimo), es decir, existe algún punto $v\in B$ (resp. $u\in B$) tal que $f(x)\leqslant f(v)$ (resp. $f(u)\leqslant f(x)$) para todo $x\in B$.

El siguiente resultado que vamos a ver es uno de los más importantes del Análisis Matemático. Su demostración no es del todo inmediata y su lectura requiere atención. El ejemplo que sigue te ayudará mucho a entenderla.

4.28 Ejemplo. Puedes considerar la gráfica de una función como el perfil de una cadena de montañas con sus cumbres y valles alternándose. Supongamos que iluminamos la gráfica desde la izquierda con un haz de luz de rayos paralelos al eje de abscisas tal como se indica en la figura (4.3). Algunos puntos de las montañas quedarán expuestos a la luz y otros quedarán en sombra. Se entiende que los valles quedan en la sombra. En la figura he representado en trazo más grueso los puntos de luz. La condición que debe cumplir un punto $(x,f(x))$ para ser un punto de luz es que a la izquierda de x la función tome valores más pequeños que $f(x)$, es decir, $(x,f(x))$ es un punto de luz si para todo $t\in[a,x]$ es $f(t)\leqslant f(x)$. Cuando esta condición se verifica diremos también que x es un punto de luz para f. Observa que el máximo de la función se alcanza en un punto c que, por supuesto, es un punto de luz para f pero que es el *último* punto de luz para f, porque a la derecha de c la función no puede tomar valores mayores que $f(c)$. Esta idea es la que vamos a seguir en la demostración del siguiente teorema.

♦

4.29 Teorema (Teorema de Weierstrass). *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

Demostración. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Queremos probar que hay algún punto $c\in[a,b]$ en el que f alcanza un máximo absoluto. Según hemos visto en el ejemplo anterior, el punto c debe ser el último punto de luz para f. Esto lleva a considerar el conjunto de todos los puntos $x\in[a,b]$ que son puntos de luz para f.

$$E = \left\{x\in[a,b] : f(t)\leqslant f(x) \quad \text{para todo } t\in[a,x]\right\} \tag{4.13}$$

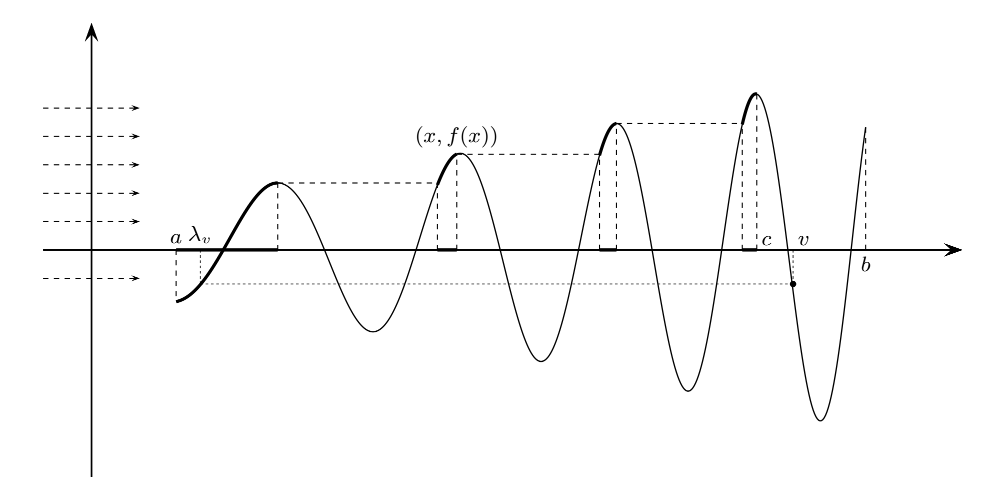


Figura 4.3. Visualización de la demostración del teorema de Weierstrass

En la figura (4.3) he representado el conjunto E con trazo grueso sobre el eje de abscisas. Observa que, en la figura, E es una unión de intervalos.

La idea siguiente es considerar el máximo de E. Pero no sabemos *a priori* que E tenga máximo, por eso lo que hacemos es considerar el supremo de E. Lo que está claro es que el conjunto E no es vacío porque $a \in E$. Además, por su misma definición, es $E \subset [a, b]$. Por tanto, E está acotado. La propiedad del supremo garantiza la existencia de un mínimo mayorante de E, es decir, del supremo de E. Sea, pues, $c = \sup(E)$. La intuición nos dice que el punto c así definido cumple lo que queremos, pero hay que probarlo. En primer lugar, como $a \in E$ y b es un mayorante de E, tenemos que $a \leqslant c \leqslant b$, esto es, $c \in [a, b]$.

Empezaremos probando que $c \in E$. Si $c = a$ nada hay que probar porque $a \in E$. Supondremos que $a < c \leqslant b$. Sea $u \in [a, b]$ tal que $u < c$. Probaremos *que no puede ser* $f(c) < f(u)$. Si así fuera, llamando $g(x) = f(u) - f(x)$; pon la continuidad de f y el teorema de conservación del signo, tiene que haber un número $\delta > 0$ tal que $u < c - \delta$ y para todo $z \in]c - \delta, c]$ se cumpla que $g(z) > 0$, es decir $f(z) < f(u)$. Por ser c el mínimo mayorante de E, tiene que haber algún $z_0 \in]c - \delta, c] \cap E$. Tenemos entonces que $f(z_0) < f(u)$ y, como $z_0 \in E$ y $a \leqslant u < z_0$, deberá ser $f(u) \leqslant f(z_0)$, lo que nos lleva a que $f(z_0) < f(u) \leqslant f(z_0)$ y, por tanto, $f(z_0) < f(z_0)$, lo cual es claramente contradictorio. Concluimos que $f(u) \leqslant f(c)$. Como esto es cierto para todo $u \in [a, b]$ tal que $u \leqslant c$, resulta que $c \in E$.

Probaremos ahora que $f(x) \leqslant f(c)$ para todo $x \in [a, b]$. Como $c \in E$, para todo $x \in [a, c]$ es $f(x) \leqslant f(c)$. Por tanto, en el caso de que fuera $c = b$ nada nuevo habría que probar. Consideremos que $a \leqslant c < b$, en cuyo caso debemos probar que si $c < v \leqslant b$ entonces $f(v) \leqslant f(c)$.

Observa que cada punto $v \in]c, b]$ es un punto de sombra de f y, por eso, tiene que haber puntos anteriores a él en los que f tome un valor mayor que $f(v)$, entre estos puntos tiene que haber puntos de luz. La idea ahora va a ser asociar a cada punto $v \in]c, b]$ un punto de luz $\lambda_v \in E$, tal que $f(v) \leqslant f(\lambda_v)$. Esta es la parte más técnica de la demostración. En la figura (4.3) he representado un punto v y su correspondiente λ_v.

En lo que sigue consideramos un punto $v \in]c, b]$ fijo. Notemos que como $c < v \leqslant b$, entonces $v \notin E$ por lo que tiene que haber algún $z \in [a, v[$ tal que $f(v) < f(z)$. Se trata de

"cazar" al menor de tales z. Consideramos para ello el conjunto

$$A_v = \left\{ z \in [a,b] : f(v) \leqslant f(z) \right\}$$

Definamos $\lambda_v = \text{ínf}(A_v)$. Por la observación antes hecha, tenemos que $a \leqslant \lambda_v < v$. Queremos probar que $\lambda_v \in A_v$, es decir que $f(v) \leqslant f(\lambda_v)$. Para ello razonamos como antes para probar que la desigualdad $f(\lambda_v) < f(v)$ lleva a contradicción. En efecto, si fuera $f(\lambda_v) < f(v)$, llamando $h(x) = f(v) - f(x)$; por la continuidad de f y el teorema de conservación del signo, tiene que haber un número $\delta > 0$ tal que $\lambda_v + \delta \leqslant b$, y para todo $z \in [\lambda_v, \lambda_v + \delta[$ se cumpla que $h(z) > 0$, es decir $f(z) < f(v)$. Por ser λ_v el máximo minorante de A_v, tiene que haber algún $z_0 \in [\lambda_v, \lambda_v + \delta[\cap A_v$. Tenemos entonces que $f(z_0) < f(v)$ y, como $z_0 \in A_v$ deberá ser $f(v) \leqslant f(z_0)$, lo que nos lleva a que $f(z_0) < f(v) \leqslant f(z_0)$ y, por tanto, $f(z_0) < f(z_0)$, lo cual es claramente contradictorio. Concluimos que $f(v) \leqslant f(\lambda_v)$.

Deducimos ahora fácilmente que $\lambda_v \in E$. En efecto, si $t \in [a, \lambda_v[$ entonces $t \notin A_v$, es decir, $f(t) < f(v)$ y como $f(v) \leqslant f(\lambda_v)$, resulta que $f(t) < f(\lambda_v)$. En consecuencia, $\lambda_v \in E$ y, por tanto $\lambda_v \leqslant c$. Finalmente, como $c \in E$, concluimos que $f(v) \leqslant f(\lambda_v) \leqslant f(c)$.

La consideración de la función $-f$ prueba que también f alcanza un mínimo absoluto en $[a,b]$. Queda así demostrado el teorema. □

Siempre que leas la demostración de un teorema debes fijarte dónde y cómo se usan todas y cada una de las hipótesis. ¿Dónde se ha usado en la demostración anterior que el intervalo $[a,b]$ es cerrado y acotado? Si no lo sabes vuelve a leerla y fíjate bien. Alternativamente, intenta repetir la demostración sustituyendo $[a,b]$ por $]a,b]$ o $[a,b[$ y fíjate hasta dónde puedes llegar. Te ayudaré un poco. Observa que el conjunto de los puntos de luz de una función creciente en un intervalo I es el propio I. ¿Y si la función es decreciente?

Al igual que el teorema de Bolzano, el teorema de Weierstrass es un teorema de *existencia*. Su demostración no proporciona un método de cálculo del máximo o mínimo absolutos de una función. En el Capítulo dedicado a derivadas veremos técnicas eficaces para dicho cálculo.

Con frecuencia, lo que interesa del teorema de Weierstrass es una consecuencia inmediata del mismo que se recoge en el siguiente corolario.

4.30 Corolario. *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.*

Veamos una aplicación del teorema de Weierstrass. Se llama *coeficiente líder* de una función polinómica al coeficiente de la mayor potencia de la variable. Seguramente sabes que una parábola cuyo coeficiente líder es positivo (lo que suele llamarse "una parábola con los cuernos para arriba") tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$, y si el coeficiente líder es negativo (lo que suele llamarse "una parábola con los cuernos para abajo") tiene un máximo absoluto en $\mathbb{R}$. Este comportamiento no es exclusivo de las parábolas y se puede generalizar a toda función polinómica de grado par. La idea de la demostración es sencilla. Un polinomio de grado par es muy grande cuando el valor absoluto de x es grande, por tanto para encontrar el mínimo podemos buscarlo en un intervalo cerrado y acotado.

4.31 Proposición. *Una función polinómica de grado par cuyo coeficiente líder es positivo alcanza un mínimo absoluto en* $\mathbb{R}$ *y si el coeficiente líder es negativo alcanza un máximo absoluto en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n$$

una función polinómica de grado par $n \geqslant 2$. Podemos suponer que $c_n > 0$ y probaremos que P alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$. Razonando exactamente igual que en el corolario (4.22), probamos (4.8) que hay un número $K \geqslant 1$ tal que para $|x| \geqslant K$ es:

$$\frac{P(x)}{x^n} \geqslant \frac{c_n}{2} > 0 \tag{4.14}$$

Pongamos en lo que sigue $\alpha = \frac{c_n}{2}$. Como n es par, se tiene que $x^n > 0$ para todo $x \neq 0$. Además, como $K \geqslant 1$, para $|x| \geqslant K$ es $|x|^n \geqslant |x|$ por tanto:

$$P(x) \geqslant \alpha x^n = \alpha|x|^n \geqslant \alpha|x| \qquad (|x| \geqslant K)$$

Haciendo ahora $M = \text{máx}\,\{K, |P(0)|/\alpha\}$, tenemos que para $|x| \geqslant M$ es

$$P(x) \geqslant \alpha|x| \geqslant \alpha M$$

La razón de elegir M en la forma que lo hemos hecho, es porque ahora podemos asegurar que $\alpha M \geqslant |P(0)|$. En el intervalo $[-M, M]$ la función $P(x)$ alcanza, en virtud del teorema de Weierstrass, un mínimo absoluto en algún punto $c \in [-M, M]$. Si ahora x es un número real podemos considerar dos posibilidades:

- $x \in [-M, M]$ en cuyo caso será $P(x) \geqslant P(c)$.
- $x \notin [-M, M]$, esto es $|x| > M$, en cuyo caso $P(x) \geqslant \alpha M \geqslant |P(0)| \geqslant P(0) \geqslant P(c)$.

En cualquier caso resulta que $P(x) \geqslant P(c)$, lo que prueba que P alcanza en c un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$. □

4.4.1. Ejercicios propuestos

152. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$ hay algún $y \in [a, b]$ tal que $|f(y)| \leqslant \frac{2}{10}|f(x)|$. Prueba que f se anula en algún punto de $[a, b]$.

153. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in [a, b]$ por $g(x) = \text{máx}\, f([a, x])$, es continua.

154. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \text{máx}\, f([a, b])$, $m = \text{mín}\, f([a, b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $[f(a), M[\cup]m, f(a)]$ en al menos dos puntos de $[a, b]$.

4.4.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 71 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in [a,b]$ por $g(x) = \text{máx}\, f([a,x])$, es continua.

Solución. La función g es claramente creciente en $[a,b]$. Para probar que es continua es suficiente, por el teorema (4.23), probar que su imagen es un intervalo. Sea $M = \text{máx}\, f([a,b])$. Probaremos que $g[a,b] = [f(a), M]$. Para ello sea $u \in]f(a), M[$ y sea $t_u = \sup\{x \in [a,b] : f(s) \leqslant u \text{ para todo } s \in [a,x]\}$. Entonces $f(t_u) = u$ y también $g(t_u) = u$. Los detalles que faltan debes completarlos tú. ☺

4.5. Límite funcional

Sean I un intervalo, a un punto de I, y f una función definida en $I \setminus \{a\}$. Naturalmente, como f no está definida en a no tiene sentido hablar de la continuidad de f en a. Sin embargo, podemos preguntarnos ¿es posible encontrar un número $L \in \mathbb{R}$ tal que *definiendo* $f(a) = L$, la *nueva función* así obtenida sea continua en a? Para ello el número L tendría que cumplir la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{4.15}$$

La condición "$0 < |x-a|$" se pone para excluir la posibilidad de hacer $x = a$ en la desigualdad $|x-a| < \delta$, lo cual es obligado porque la función f no está definida en a.

Podemos modificar un poco la situación anterior, suponiendo ahora que f está definida en todo el intervalo I pero no es continua en a. En este caso queremos cambiar el valor de f en a, es decir, encontrar, si es posible, un número $L \in \mathbb{R}$ tal que *definiendo* el valor de f en a igual a L, la *nueva función* así obtenida sea continua en a. La condición que tiene que cumplir dicho número L es exactamente la misma de antes (4.15).

Nótese que ahora la condición "$0 < |x-a|$" es obligada porque aunque nuestra función f está definida en a, el valor que toma en a no es "el apropiado". Observa que el valor que f tiene en a no interviene para nada en la condición (4.15).

En los dos casos considerados, la condición obtenida (4.15) es la misma con independencia del hecho de que f esté o no definida en a, y, en caso de estarlo, del posible valor que f pueda tener en a. Por ello, en lo que sigue consideraremos la siguiente situación.

Notación. En adelante, representaremos por I un intervalo; a será un punto de I, y f será una función que supondremos definida en $I \setminus \{a\}$ sin excluir la posibilidad de que dicha función pueda estar definida en todo el intervalo I lo cual, para nuestros propósitos actuales, carece de importancia.

4.32 Definición. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{4.16}$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Observa que la existencia del límite es independiente de que f esté o no definida en a y, en caso de estarlo, del valor que f pueda tener en a. También debe advertirse que en la definición de la *igualdad* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, sólo intervienen *desigualdades*.

Es fácil probar que la condición (4.16) no puede ser satisfecha por dos números distintos, es decir, *el límite de una función en un punto, si existe, es único*. Una consecuencia inmediata de la definición dada de límite y de la definición de continuidad (4.1), es el siguiente resultado.

4.33 Proposición. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:*

i) f es continua en a.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

4.5.1. Límites laterales de una función en un punto

En la recta real es posible distinguir si nos acercamos “por la derecha” o “por la izquierda” a un punto. Ello conduce de forma natural a la consideración de los *límites laterales* que pasamos a definir.

4.34 Definición.

- Supongamos que el conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} a < x < a + \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon \tag{4.17}$$

  Dicho número se llama **límite por la derecha de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \alpha$.

- Supongamos que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la izquierda* en a, si existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array} \right\} \longrightarrow \quad |f(x) - \beta| < \varepsilon \tag{4.18}$$

  Dicho número se llama **límite por la izquierda de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \beta$.



Observación. Es importante advertir que los límites laterales son casos particulares del concepto general de límite de una función en un punto dado en la definición (4.32). Para convencerte de ello, basta que consideres la restricción de la función f a la derecha del punto a, esto es, la restricción de f al intervalo $\{x \in I : x > a\}$, en cuyo caso el límite por la derecha de f en a no es otra cosa que el límite en el punto a (en el sentido de la definición (4.32)) de dicha restricción. Igual pasa con el límite por la izquierda.

En particular, es claro que:

- Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$.
- Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$.

Por ello, cualquier resultado referente a límites de funciones en un punto puede ser convenientemente enunciado para límites laterales sin más que considerar la restricción de la función a la derecha o a la izquierda del punto en cuestión.

La siguiente proposición también es consecuencia inmediata de las definiciones dadas.

4.35 Proposición. *Si a no es un extremo de I, entonces f tiene límite en a si, y sólo si, los dos límites laterales de f en a existen y son iguales, en cuyo su valor común coincide con el valor del límite de f en a.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = L \tag{4.19}$$

Notación. En la mayoría de los textos de Cálculo los límites laterales por la derecha y por la izquierda suelen representarse con las siguientes notaciones

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

El problema es que hay estudiantes que leen los símbolos y no leen lo que significan, y terminan interpretando que a^+ y a^- son números. Claro está que no son números, son símbolos que significan que en los límites $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ se consideran solamente los valores de la variable x que son respectivamente mayores o menores que a. Esa es la forma correcta de leer esos símbolos. Ya he advertido varias veces de la necesidad de traducir en palabras el significado de los símbolos. Lo repito una vez más: no se deben leer los símbolos sino su significado.

4.5.2. Límites infinitos

4.5.2.1. Funciones divergentes en un punto

4.36 Definición. Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \longrightarrow \quad f(x) > M \tag{4.20}$$

Simbólicamente, escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Se dice que f **es positivamente divergente por la izquierda** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a \\ x \in I \end{array}\right\} \longrightarrow \quad f(x) > M \tag{4.21}$$

Simbólicamente, escribimos $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$.

Se dice que f **es positivamente divergente por la derecha** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \left.\begin{array}{c} a < x < a+\delta \\ x \in I \end{array}\right\} \longrightarrow \quad f(x) > M \tag{4.22}$$

Simbólicamente, escribimos $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- "f **es negativamente divergente por la izquierda o por la derecha** en a". Simbólicamente $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$

Gráficamente, el hecho de que una función sea divergente en un punto a, se traduce en que la recta de ecuación $x = a$ es una *asíntota vertical* de su gráfica.

4.5.2.2. Límites en infinito

4.37 Definición. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, K \in \mathbb{R}^+ \; : \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{4.23}$$

Dicho número se llama límite de f en $+\infty$ y escribimos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Gráficamente, el hecho de que una función tenga límite igual a L en $+\infty$ o en $-\infty$, se traduce en que la recta de ecuación $y = L$ es una *asíntota horizontal* de su gráfica.

4.5.2.3. Funciones divergentes en infinito

4.38 Definición. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, K \in \mathbb{R}^+ \; : \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \longrightarrow \quad f(x) > M \tag{4.24}$$

En cuyo caso escribimos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Llegados aquí, no debes tener dificultad en precisar el significado de:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

4.6. Álgebra de límites

Es evidente que la existencia del límite de una función en un punto a depende solamente del comportamiento de la función en los puntos próximos al punto a, es decir, el concepto de límite, al igual que el de continuidad en un punto, es un concepto local. Para calcular un límite $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$, podemos restringir la función f a un intervalo *abierto* que contenga al punto a. Eso es lo que se afirma en el siguiente resultado que es de comprobación inmediata.

4.39 Proposición. *Sea J un intervalo abierto que contiene al punto a. Entonces se verifica que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L$ si, y sólo si, $\displaystyle\lim_{x\to a} f_{|J}(x) = L$.*

El siguiente resultado pone de manifiesto la compatibilidad de la "operación de paso al límite" con la estructura algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

4.40 Teorema. *Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:*

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

ii) Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}$.

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$.

iv) Supongamos que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$. Entonces se verifica que h tiene límite en a y $\displaystyle\lim_{x\to a} h(x) = L$.

En el siguiente resultado se establecen condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto.

4.41 Teorema. *Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.*

i) Supongamos que hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\displaystyle\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$.

ii) Supongamos que hay un número $M > 0$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\displaystyle\lim_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$.

Observa que la condición en *i)* se cumple si f tiene límite en a o diverge positivamente en a; y la condición *ii)* se cumple si f tiene límite *positivo* en a o diverge positivamente en a.

En el siguiente resultado se establece que *el producto de una función con límite* 0 *por una función acotada tiene límite cero.*

4.42 Teorema. *Supongamos que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*, y que hay un número* $M > 0$ *tal que* $|g(x)| \leqslant M$ *para todo* $x \in I$*,* $x \neq a$*. Entonces* $\lim_{x\to a} (fg)(x) = 0$*.*

Con frecuencia este resultado se aplica cuando la función g es alguna de las funciones seno, coseno, arcoseno, arcocoseno o arcotangente. Todas ellas son, como ya sabes, funciones acotadas.

El siguiente resultado establece que la continuidad permuta con el paso al límite. Es un resultado que se usará bastante cuando estudiemos técnicas de cálculo de límites.

4.43 Teorema. *Supongamos que* f *tiene límite en el punto* a *y sea* $L = \lim_{x\to a} f(x)$*. Sea* g *una función continua en* L*. Entonces se verifica que la función compuesta* $g \circ f$ *tiene límite en* a *igual a* $g(L)$*, esto es,* $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(L)$*. Simbólicamente:*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x\to a} f(x)) \tag{4.25}$$

Demostración. Apoyándonos en la proposición (4.33), podemos demostrar este resultado reduciéndolo a un resultado ya conocido de funciones continuas. Para ello basta con definir $f(a) = L$ con lo que, usando (4.33), resulta que f (seguimos llamando f a la función así modificada) es continua en a. Ahora aplicamos el teorema (4.6) de continuidad de una composición de funciones para obtener que $g \circ f$ es continua en a y de nuevo volvemos a usar (4.33), para obtener que

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(L) = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big)$$

□

4.44 Definición. Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x) (x \to a)$, cuando $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

El siguiente resultado, consecuencia inmediata de la definición dada y de las propiedades de los límites funcionales ya vistas, es muy útil para calcular límites funcionales. Nos dice que para calcular el límite de un producto o de un cociente de funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

4.45 Proposición. *Sean* f *y* g *funciones asintóticamente equivalentes en un punto* $a \in \mathbb{R}$ *o bien* $a = +\infty$ *o* $a = -\infty$*, y* $h : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *una función cualquiera. Se verifica que:*

a) $\lim_{x\to a} f(x)h(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} g(x)h(x) = L$*.*

b) $\lim_{x\to a} f(x)h(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} g(x)h(x) = +\infty$*.*

4.6.1. Límites y discontinuidades de funciones monótonas

El hecho de que una función sea discontinua en un punto puede deberse a causas diferentes que se consideran en la siguiente definición.

4.46 Definición (Clasificación de las discontinuidades). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$
se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

4.47 Definición (Continuidad por un lado). Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es continua por la izquierda en un punto $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$; y se dice que es continua por la derecha en un punto $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$.

Puedes comprobar fácilmente lo que afirma el siguiente resultado sin más que hacer la gráfica de una función creciente que tenga algunas discontinuidades. No obstante, se trata de un resultado importante que se usará más adelante para estudiar la convergencia de integrales.

4.48 Teorema (Límites de una función monótona). *Sea f una función creciente definida en un intervalo I.*

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup\{f(x) : x\in I,\ x<a\}, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \inf\{f(x) : x\in I,\ x>a\}$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el extremo derecho de I, entonces:

a) Si f está mayorada en I es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está mayorada en I es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Demostración. Supongamos que $a \in I$ no es el extremo izquierdo de I, es decir que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. Entonces, el conjunto $B = \{f(x) : x \in I,\ x < a\}$ tampoco es vacío y, por ser f creciente, el número $f(a)$ es un mayorante de B. Sea $\alpha = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}$. Dado $\varepsilon > 0$, el número $\alpha - \varepsilon$ no puede ser mayorante de B, es decir, tiene que haber algún punto $x_0 \in I$, $x_0 < a$ tal que $\alpha - \varepsilon < f(x_0)$. Sea $\delta = a - x_0 > 0$. Entonces para $a - \delta < x < a$, esto es, para $x_0 < x < a$, se verifica que $\alpha - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, lo que claramente implica que $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$, es decir, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}$.

Los demás casos se prueban de forma muy parecida y quedan como ejercicios. Igualmente, queda como ejercicio considerar el caso en que la función es decreciente. □

Como consecuencia inmediata de este resultado obtenemos el siguiente teorema.

4.49 Teorema (Discontinuidades de las funciones monótonas). *Sea f una función monótona en un intervalo. Entonces:*

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, f solamente puede tener discontinuidades de salto.

ii) Si el intervalo tiene máximo o mínimo, f puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.

4.6.2. Comportamientos asintóticos de las funciones elementales

4.6.2.1. Límites de exponenciales y logaritmos

Los resultados que siguen son de gran utilidad para calcular límites. Todos ellos son consecuencia de la continuidad y crecimiento de las funciones exponencial y logaritmo naturales.

4.50 Proposición. *Sea a un número real o $a = +\infty$ o $a = -\infty$. En los apartados b1), b2) y b3) se supone que $f(x) > 0$.*

a1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^L$.

a2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = +\infty$.

a3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = 0$.

b1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \log f(x) = \log L$.

b2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \log f(x) = +\infty$.

b3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \log f(x) = -\infty$.

El siguiente resultado, cuya justificación se verá más adelante, es de gran importancia. En él se comparan los “*órdenes de crecimiento*” de las funciones logaritmo, potencias y exponenciales, resultando lo siguiente.

- Para valores de $x > 0$ muy grandes, cualquier potencia del logaritmo $(\log x)^{\mu}$ (por muy grande que sea $\mu > 0$) es muy pequeña comparada con x^{α} para $\alpha > 0$ (por muy pequeña que sea $\alpha > 0$).
- Para valores de $x > 0$ muy grandes, cualquier potencia x^{α} (por muy grande que sea $\alpha > 0$) es muy pequeña comparada con $e^{\mu x}$ para $\mu > 0$ (por muy pequeño que sea $\mu > 0$).

4.51 Proposición. *a)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{|\log x|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ *para todos* $\alpha > 0$ *y* $\mu \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} |x|^{\alpha} \big|\log|x|\big|^{\mu} = 0$ *para todos* $\alpha > 0$ *y* $\mu \in \mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{\mu x}} = 0$ *para todos* $\alpha > 0$ *y* $\mu > 0$.

Observa que los apartados a) y b) se deducen uno de otro cambiando x por $1/x$.

4.7. Indeterminaciones en el cálculo de límites

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f+g$, fg, no está determinado por el de f y g. Por ejemplo, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto a de la función $f+g$? Respuesta: absolutamente nada. En consecuencia, para calcular un límite del tipo $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ donde $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ *se requiere un estudio particular en cada caso*. Suele decirse que estos límites son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Análogamente, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto. Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$"**. Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos funciones divergentes o de dos funciones con límite cero, es decir, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera. Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\log f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados anteriores, el límite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim_{x\to a} g(x)\log f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "1^∞")
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "∞^0")
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "0^0")

Ni que decir tiene que no hay técnicas generales que permitan "resolver las indeterminaciones", ¡no serían tales si las hubiera! Es por ello que, los límites indeterminados, requieren un estudio particular en cada caso. Es un hecho que la mayoría de los límites que tienen algún interés matemático son límites indeterminados. Cuando estudiemos las derivadas obtendremos técnicas que en muchos casos permitirán calcular con comodidad dichos límites.

4.7.1. Ejercicios propuestos

---

155. Sea $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|} = 0 \tag{4.26}$$

Particulariza este resultado para los casos en que f solamente toma valores positivos o negativos.

156. Sea $L\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = L \iff \lim_{x\to+\infty} f(1/x) = L \tag{4.27}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = L \iff \lim_{x\to-\infty} f(1/x) = L \tag{4.28}$$

157. Sea $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ la función dada para $x\in]0,1[$ por:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}.$$

Prueba que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

158. Calcula la imagen de la función $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x\,(1-x^2)^{-1/2}, \forall x\in]-1,1[.$$

159. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(0)=0$. Justifica que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcula la imagen de f.

160. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{x} & , \text{ si } x < 0 \\ x & , \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & , \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y g en todo punto de $\mathbb{R}$ y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y en $-\infty$.

161. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(1/x)$, para todo $x \neq 0$. Estudia la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

162. Sea $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ una función continua. Definamos $g(x) = f(x - E(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función g, así definida, es continua si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(0)$. Supuesto que esta condición se cumple, y que f no es constante, definamos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = g(1/x)$ si $x \neq 0$, y $h(0) = f(0)$. Justifica que h es continua y acotada en $\mathbb{R}^*$. Calcula la imagen por h de un intervalo de la forma $]0, r[$ donde $0 < r < 1$. Deduce que h no tiene límite por la izquierda ni por la derecha en 0 y que la imagen por h de todo intervalo es también un intervalo.

163. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^+_o \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$ y:

$$f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad (x > 0).$$

Estudia la continuidad de f según los valores de α.

164. Supongamos que $a < 0 < b$. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dadas para todo $x \neq 0$ por :

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}, \qquad g(x) = xf(x).$$

165. Determina la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \neq 0$ por $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\log|x|)$.

166. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \neq 1$ por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}.$$

Estudia la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f.

167. La ecuación $ax^2 + 2x - 1 = 0$ donde $a > -1$, $a \neq 0$ tiene dos soluciones que representaremos por $\lambda(a)$ y por $\mu(a)$. Calcula los límites de dichas funciones en $a = 0$ y en $a = -1$.

168. Estudia los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de:

a) Una función polinómica.

b) Una función racional.

169. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no nula tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Prueba que si f toma algún valor positivo entonces f alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

4.7.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 72 Sea $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=+\infty$$

Particulariza este resultado para los casos en que f solamente toma valores positivos o negativos.

Solución. Basta advertir que

$$|f(x)|<\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{|f(x)|}>\frac{1}{\varepsilon}$$

y notar que ε es positivo y muy pequeño equivale a que $1/\varepsilon$ sea positivo y muy grande. En particular, tenemos que

$$f(x)>0\wedge\lim_{x\to a}f(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=+\infty \tag{4.29}$$

$$f(x)<0\wedge\lim_{x\to a}f(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=-\infty \tag{4.30}$$

☺

Ejercicio resuelto 73 Sea $L\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=L \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}f(1/x)=L$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=L \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to-\infty}f(1/x)=L$$

Solución. Basta advertir que

$$0<x<\delta\Longleftrightarrow\frac{1}{x}>\frac{1}{\delta},\qquad -\delta<x<0\Longleftrightarrow\frac{1}{x}<-\frac{1}{\delta}$$

y notar que δ es positivo y muy pequeño equivale a que $1/\delta$ sea positivo y muy grande. ☺

Ejercicio resuelto 74 Sea $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ la función dada para $x\in]0,1[$ por:

$$f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x(x-1)}.$$

Prueba que $\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$ y que $\lim_{x\to 1}f(x)=-\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

Solución. Solamente debemos considerar valores de x en el intervalo $]0,1[$ que es donde está definida f. Teniendo en cuenta que por (4.29), y (4.30) es:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2}{x}=+\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty$$

Deducimos que $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ y que en $x = 0$ el límite pedido es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Pero eso se debe solamente a la forma en que está escrita f. Basta hacer la suma indicada:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2x-1}{x(x-1)}$$

para darse cuenta, por (4.29) pues $f(x) > 0$ para $0 < x < 1/2$, que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Finalmente, como f es continua en $]0,1[$, el teorema de Bolzano nos dice que la imagen de f, el conjunto $f(]0,1[)$, es un intervalo. Como f diverge positivamente en 0 y diverge negativamente en 1, deducimos que f no está mayorada ni minorada en $]0,1[$, concluimos que $f(]0,1[)$ es un intervalo no mayorado ni minorado, esto es, $f(]0,1[) = \mathbb{R}$.

Comentario. Observa que los límites que hemos calculado de f son realmente límites laterales pues nos dicen que f está definida en $]0,1[$. La cosa cambia mucho si consideramos que f está definida en su dominio natural que es el conjunto $A = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, que es una unión de tres intervalos. En ese caso f no tiene, por supuesto, límite en 0; ni tampoco diverge positivamente ni negativamente en 0 pues el límite de f por la izquierda en 0 es $-\infty$. Análogamente, el límite de f por la derecha en 1 es $+\infty$.

Ejercicio resuelto $\boxed{75}$ Sea $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ continua. Definamos $g(x) = f(x - E(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función g, así definida, es continua si, y sólo si, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(0)$. Supuesto que esta condición se cumple, y que f no es constante, definamos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = g(1/x)$ si $x \neq 0$, y $h(0) = f(0)$. Justifica que h es continua y acotada en $\mathbb{R}^*$. Calcula la imagen por h de un intervalo de la forma $]0,r[$ donde $0 < r < 1$. Deduce que h no tiene límite por la izquierda ni por la derecha en 0 y que la imagen por h de todo intervalo es también un intervalo.

Solución. La función g es periódica con período igual a 1 porque:

$$g(x+1) = f(x+1-E(x+1)) = f(x-E(x)) = g(x).$$

También es claro que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1[$. Por la propiedad local de la continuidad, como f es continua en $]0,1[$, deducimos que g es continua en $]0,1[$. Por la periodicidad de g, se sigue que g es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Para estudiar la continuidad de g en los enteros, es suficiente estudiarla en 0. Por la continuidad de f en 0, tenemos que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$. Ahora, por la periodicidad de g:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(1+x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x).$$

Deducimos que g es continua en 0 si, y sólo si, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = g(0) = f(0)$.

La continuidad de h en $\mathbb{R}^*$ es consecuencia de la propiedad local de la continuidad y de que la composición de funciones continuas es continua. Dado $r \in]0,1[$, sea $x \in [0,1[$. Podemos tomar un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $z = \dfrac{1}{n+x} \in]0,r[$. Tenemos que:

$$h(z) = f(n+x-E(n+x)) = f(x-E(x)) = g(x).$$

Por tanto $h(]0,r[) \supset g([0,1[) = g([0,1])$. Como g es continua, el conjunto $g([0,1])$ es un intervalo cerrado y acotado, en particular está acotado. Por la periodicidad de g es $g(\mathbb{R}) = g([0,1])$. Deducimos que $h(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = g([0,1])$ es un conjunto acotado, es decir, h es una función acotada. De lo anterior deducimos que $h(]0,r[) = g([0,1])$ para todo $r \in]0,1[$ (y, como g no es constante, $g[0,1]$ es un intervalo no reducido a un punto), es evidente que h no tiene límite por la derecha en 0. De forma parecida se justifica que h no tiene límite por la izquierda en 0.

Si I es un intervalo no reducido a un punto. Si I no contiene a 0, entonces debe ser $I \subset \mathbb{R}^+$ o bien $I \subset \mathbb{R}^-$ y, como h es continua en $\mathbb{R}^*$, se sigue que h es continua en I y, por tanto $h(I)$ es un intervalo. Si el intervalo I contiene a 0, entonces I debe contener un intervalo de la forma $]0,r[$ o un intervalo de la forma $]-r,0[$ para algún $r \in]0,1[$. En cualquier caso, se sigue por lo antes visto que $h(I) = g([0,1])$ y, por tanto, $h(I)$ es un intervalo. ☺

Ejercicio resuelto **76** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$ y:

$$f(x) = x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad (x > 0).$$

Estudia la continuidad de f según los valores de α.

Solución. Observa que la función solamente está definida para $x \geqslant 0$. La razón de esto es que para $x < 0$ la potencia x^α no siempre está definida.

Para hacer este ejercicio debes recordar que la función seno está acotada: $|\operatorname{sen} z| \leqslant 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Por tanto, cualquiera sea $x \neq 0$ se tiene que $|\operatorname{sen}(1/x)| \leqslant 1$.

Debes tener también en cuenta que la función seno toma todos los valores del intervalo $[-1,1]$ en cualquier intervalo de longitud mayor que 2π.

Si $\alpha > 0$, la función $h(x) = x^\alpha$, definida para $x \geqslant 0$, tiene límite en 0 igual a 0. Concluimos que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ porque $f(x) = h(x)\operatorname{sen}(1/x)$ es producto de una función acotada por otra con límite 0.Por tanto, f es continua en 0.

Consideremos que $\alpha = 0$, en cuyo caso, $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Esta función toma todos los valores del intervalo $[-1,1]$ en cualquier intervalo de la forma $]0,\delta[$ *cualquiera* sea $\delta > 0$. Pues tomando $a > 1/\delta$ tenemos que $\frac{1}{a} \in]0,\delta[$ y, en consecuencia $f(]0,\delta[) \supset \operatorname{sen}(]a,+\infty[) \supset [-1,1]$. Se deduce enseguida que $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite en 0, es decir, tiene una discontinuidad esencial en 0.

Es imposible representar gráficamente esta función porque su gráfica contiene infinitas ondas de amplitud cada vez más pequeña que se van aplastando sobre el eje de ordenadas. Observa que la imagen por la función $\operatorname{sen}(1/x)$ del intervalo $\left[\frac{1}{2n\pi-\pi/2}, \frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right]$ es el intervalo $[-1,1]$. La gráfica siguiente puede ser útil para que imagines cómo es la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para x cerca de 0.

Para valores de $\alpha < 0$ la cosa es todavía peor. Te lo dejo para que lo acabes tú. ☺

Ejercicio resuelto **77** Supongamos que $a < 0 < b$. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dadas para todo $x \neq 0$ por :

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x}, \qquad g(x) = x f(x).$$

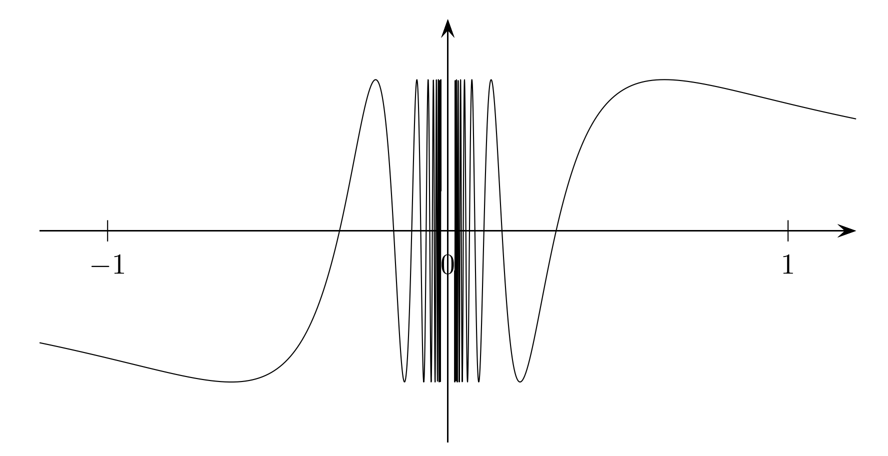


Figura 4.4. La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$

Solución. En este ejercicio (y en los siguientes) debes tener en cuenta que:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$$

Tenemos que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{a}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{b}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b}{x} = +\infty$$

Deducimos que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Observa que la función f está acotada:

$$|f(x)| \leqslant \left|\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x}\right| + \left|\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Por tanto $g(x)$ es el producto de un función con límite 0 por una función acotada. Se sigue que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Eso es todo lo que podemos decir del comportamiento de f y g en 0. No tiene sentido considerar su continuidad en 0 porque no están definidas en 0. Si se define $f(0) = \pi$ y $g(0) = 0$, entonces f tiene una discontinuidad de salto en 0 y es continua por la derecha en 0, y g es continua en 0.

Ejercicio resuelto **78** Estudia los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de:

a) Una función polinómica.

b) Una función racional.

Solución. a) Sea

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n$$

una función polinómica de grado par $n \geqslant 1$. Podemos suponer que $c_n > 0$. Usando la desigualdad (4.8) del corolario (4.22), sabemos que hay un número $K \geqslant 1$ tal que para $|x| \geqslant K$ es:

$$\frac{P(x)}{x^n} \geqslant \frac{c_n}{2} > 0 \qquad (1)$$

Pongamos en lo que sigue $\alpha = \frac{c_n}{2}$.

Supongamos que n es par. Entonces $x^n => 0$ y, por tanto $x^n = |x|^n$ para todo $x \neq 0$. Deducimos de (1) que para todo $x \neq 0$ es

$$P(x) \geqslant \alpha |x|^n.$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^n = \lim\limits_{x\to+\infty} |x|^n = +\infty$, deducimos, por la desigualdad anterior, que $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

Supongamos que n es impar. Entonces para $x < 0$ se tiene que $x^n < 0$. De la desigualdad (1) deducimos que

$$P(x) \geqslant \alpha x^n \quad (x > 0), \qquad P(x) \leqslant \alpha x^n \quad (x < 0).$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, deducimos, por las desigualdades anteriores, que $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

El caso en que $c_n < 0$ se deduce de lo anterior sin más que considerar el polinomio $-P(x)$.

Otra forma, quizás mejor, de obtener estos resultados es como sigue. De la igualdad

$$\frac{P(x)}{x^n} = c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \frac{c_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_0}{x^n}$$

obtenida dividiendo el polinomio $P(x)$ por x^n, se sigue enseguida que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x^n} = c_n$$

De aquí se sigue que las funciones $P(x)$ y $c_n x^n$ son asintóticamente equivalentes para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$, de donde se deducen de forma inmediata los mismos resultados antes obtenidos.

b) Supongamos ahora que $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ es otra función polinómica de grado m con $b_m > 0$. Para estudiar los límites en $\pm\infty$ de la función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ podemos sustituir P y Q por funciones asintóticamente equivalentes a ellas en $\pm\infty$. Por lo antes visto, tenemos que $P(x) \sim c_n x^n$ y $Q(x) \sim b_m x^m$ para $x \to \pm\infty$, por tanto:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{c_n x^n}{b_m x^m} = \frac{c_n}{b_m} x^{n-m} \quad (x \to \pm\infty)$$

Deducimos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \quad n-m \text{ par} \\ -\infty, & n > m \quad n-m \text{ impar} \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases}$$

Capítulo 5

Números y límites. El infinito matemático

Even as the finite encloses an infinite series
And in the unlimited limits appear,
So the soul of immensity dwells in minuta
And in the narrowest limits, no limits inhere
What joy to discern the minute in infinity!
The vast to perceive in the small, what Divinity!
Jakob Bernoulli

5.1. Introducción

Las confusas formulaciones iniciales, a finales del siglo XVII, de los conceptos principales del Cálculo, tienen un acentuado contenido geométrico o mecánico. Muy lentamente, a lo largo de los siglos XVIII y XIX, van evolucionando hasta que llegan finalmente a expresarse por medio del álgebra de desigualdades, ya totalmente desprovistas de referencias geométricas o mecánicas. Este largo proceso se conoce con el nombre de *Aritmetización del Análisis*, y alcanza su máximo empuje y desarrollo en el siglo XIX gracias a los trabajos de Bolzano, Cauchy, Dedekind, Weierstrass y Cantor. Bajo su influencia, el Cálculo, que durante el siglo XVIII no era más que una colección de técnicas para resolver los más variados problemas, se fue transformando a lo largo del siglo XIX en una teoría científica sólidamente fundamentada y rigurosa en sus métodos: el Análisis Matemático.

En el Capítulo anterior hemos estudiado dos conceptos fundamentales del Análisis Matemático: el de número real y el de límite funcional. Creo que es muy instructivo que conozcas algunas etapas del camino que condujo a su formulación actual, pues así podrás apreciarlos y entenderlos mejor.

Las ideas que siguen están ampliamente desarrolladas y expuestas con claridad en los libros

de Burton [3], Giovanni Ferraro [6] y Gert Schubring [14]. Así mismo las páginas de Wikipedia dedicadas al concepto de número y de número negativo y, muy especialmente, la página del profesor John L. Bell, contienen información muy interesante.

5.2. Evolución del concepto de número

Si te pregunto "¿qué es para ti el número 5?" Me dirás: está claro, es justamente aquello que tienen en común todos los grupos de objetos que pueden contarse con los dedos de una mano. Sabes que es una abstracción, un concepto. Si sales ahí afuera, puedes encontrar cinco bicicletas o cinco bancos en el parque, pero seguro que en ninguno de ellos está sentado el número 5. También sabes que $\frac{7}{10}$ es un número y te lo representas sin ninguna dificultad: son siete décimas partes. De qué sean las partes eso no importa, pueden ser de cualquier cosa. El número $\frac{7}{10}$ también es una abstracción. Los números negativos no te causan problemas, sabes que son útiles para hacer cálculos y muy convenientes para representar valores en una escala. Y ¿qué me dices de los números como $\sqrt{2}$? Pues que tienen una expresión decimal que no acaba ni se repite, que pueden aproximarse por fracciones decimales, que pueden expresar el resultado exacto de una medida o, simplemente, que es un número cuyo cuadrado es igual a 2. Del cero ya, ni te hablo, a estas alturas debe ser un viejo amigo tuyo. Pero debes tener bien claro que las cosas no siempre fueron así.

5.2.1. Números y cantidades en la antigua Grecia

Los griegos de la antigüedad distinguían entre *"número"* y *"cantidad"* o *"magnitud"*. Para ellos un número era un agregado de unidades. Podemos precisar más. Un número es una multiplicidad que se obtiene por repetición de un individuo – la unidad –, cuyas partes están separadas – son discontinuas – y tienen fronteras bien definidas. Por todo ello, una característica esencial de los números era su carácter *discreto*. Por otra parte, los números no tienen sentido si se separan de los objetos materiales o ideales a los que enumeran. Así, "tres árboles" tiene sentido, pero "tres" por sí mismo carece de significado. Es decir, un número es un atributo de un grupo de objetos y carece de autonomía propia.

Una "cantidad" puede ser, entre otras cosas, tiempo, longitud, volumen, velocidad o masa. La característica esencial de la cantidad es su *continuidad*. Una cantidad puede dividirse indefinidamente, pero no está formada por partes separadas que son réplicas de una unidad, sino que sus componentes están unidos entre sí por fronteras comunes: donde acaba uno empieza otro. Por ejemplo, un área plana puede dividirse en trozos que, al estar unidos unos con otros, pierden su singularidad quedando como partes indiferenciadas de un todo. Por otra parte, los matemáticos griegos no estudiaron la cantidad como algo abstracto, para ellos *las cantidades tienen siempre un carácter concreto*: son una cantidad de algo.

El concepto de cantidad estaba estrechamente ligado a la Geometría. Una proporción entre dos segmentos es una cantidad que a veces puede expresarse con ayuda de números. Cuando dichos segmentos admiten una unidad de medida común podemos decir que la razón de uno a otro es, por ejemplo, de $7 : 10$ pero, para los griegos, $7 : 10$ no es un número sino una forma de expresar una cantidad concreta, que podría leerse algo así como "siete partes de diez". Ellos *solamente consideraban como números los enteros positivos* y ni siquiera consideraban como número a la unidad. La unidad era, eso, "la unidad" de la que estaban formados los números, pero ella misma no era un número.



Figura 5.1. Euclides

En el Capítulo 1 nos ocupamos del descubrimiento de las cantidades inconmensurables, esto es, razones de segmentos que no admiten una unidad de medida común. El hallazgo de lo que nosotros llamamos "números irracionales", como $\sqrt{2}$, no tiene ningún significado aritmético para los griegos; su significado era geométrico: no puedes medir la diagonal de un cuadrado con su lado. Euclides, el matemático más famoso de la Escuela de Alejandría, en el Libro X de los *Elementos* (300 a.C.), clasifica las magnitudes inconmensurables en los tipos siguientes (uso, claro está, la notación actual):

$$a \pm \sqrt{b}, \quad \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \quad \sqrt{a \pm \sqrt{b}}, \quad \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

Donde se entiende que a y b son racionales.

La existencia de segmentos inconmensurables era un serio problema para el desarrollo de la geometría pues, como dichos segmentos no pueden compararse, no se sabía cómo interpretar su proporción. Por ejemplo, un resultado, sin duda conocido por los pitagóricos, afirma que *las áreas de dos triángulos con igual altura están en la misma proporción que sus bases*. ¿Qué sentido tiene esta afirmación si las bases no son segmentos conmensurables? El problema está en que no había una forma de comparar proporciones entre magnitudes inconmensurables. Un matemático, Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.), propuso una teoría axiomática de las magnitudes inconmensurables, que está recogida en el Libro V de los *Elementos*, en la que destacan los siguientes puntos.

E1 (*Propiedad arquimediana*) Dadas dos magnitudes siempre hay un múltiplo de una de ellas que excede a la otra. Es decir, si es $0 < a < b$ hay algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

E2 (*Criterio de igualdad*) Las proporciones $a : b$ y $c : d$ son iguales si cualesquiera sean los enteros positivos m, n se tiene que

$$ma < nb \longrightarrow mc < nd, \quad ma = nb \longrightarrow mc = nd, \quad ma > nb \longrightarrow mc > nd \qquad (5.1)$$

Volveremos a considerar más adelante este elaborado criterio de igualdad que, desde luego, no aclaraba nada sobre la naturaleza de las cantidades irracionales y ponía de manifiesto la dificultad de reducir a la aritmética el estudio de las mismas.

La carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables, hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, y dedicaran sus esfuerzos al estudio de la primera en detrimento de la última. La consecuencia fue que durante casi 2000 años, en Europa, casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.

Quizás el único matemático griego, después de los pitagóricos, que no hizo Geometría sino Aritmética fue Diofanto de Alejandría (c. 214 - 298). En su obra llamada *Aritmética*, de la que se han conservado seis libros de un total de trece, resuelve diversos tipos de ecuaciones algebraicas admitiendo como soluciones números enteros o números fraccionarios positivos, los cuales son considerados por Diofanto como auténticos números y no solamente como proporciones. Otra innovación de Diofanto fue la invención de una notación "sincopada" que constituye el primer ejemplo de simbolismo matemático.

5.2.2. De la antigua Grecia a la invención del Cálculo

Es sabido que la civilización Romana, tan excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las ciencias puras y, en particular, de las matemáticas. La prueba de ello es que no hay ningún matemático Romano digno de mención. No obstante, el sistema de numeración Romano se impuso extendiéndose por todo el Imperio.

Con el triunfo del Cristianismo a finales del siglo IV y la caída del Imperio Romano de Occidente en el año 476, se inicia una larga era de oscurantismo en Europa. La fe y los dogmas no son demostrables lógicamente; absurdas disputas teológicas ocupan el lugar de los estudios de la Naturaleza y la Biblia es la fuente de todo conocimiento. Según San Agustín "las palabras de las Escrituras tienen más autoridad que toda la inteligencia humana". El racionalismo científico es sospechoso de paganismo. Entonces... ¿Para qué pensar?

A diferencia que en Grecia, en la India se había desarrollado principalmente la Aritmética y se conocía el sistema de numeración posicional decimal desde el siglo VI. La primera vez que el cero es tratado como un número de pleno derecho es en la obra *Brahmasphutasiddhanta* del matemático y astrónomo indio Brahmagupta (598 - 670). Esta obra también contenía el principio de la numeración decimal posicional y los métodos de cálculo del álgebra india. En ella se tratan los números negativos en términos muy parecidos a los actuales.



Figura 5.2. al-Jwarizmi

La herencia matemática griega pasa a los árabes. La cultura árabe tiene una época de esplendor en los siglos VIII - XII. Al-Mamun (c. 786 - 833), sexto califa de la dinastía Abasida, fundó en Bagdad la Casa de la Sabiduría, una especie de academia con una biblioteca y un observatorio. Allí se tradujeron las obras de los matemáticos y filósofos griegos y tuvieron conocimiento de las matemáticas indias.

El más conocido matemático de la Escuela de Bagdad fue Muhammad ibn-Musa al-Jwarizmi de quien ya hemos hablado en el Capítulo 2. En su obra *Libro de la Adición y la Sustracción según el cálculo de los hindúes* se describe el sistema decimal posicional y se dan métodos para realizar cálculos aritméticos con dicho sistema.



Figura 5.3. Fibonacci

Leonardo de Pisa (c. 1170 - 1250), más conocido como Fibonacci, aprendió en sus viajes por los países árabes del Mediterráneo a usar los métodos de al-Jwarizmi. Al regresar a Italia, publicó en 1202 el *Liber abaci*, obra que contribuyó a extender el sistema de numeración indo-árabe en Occidente. Estudiando las soluciones de una ecuación de tercer grado, Fibonacci probó que había números irracionales diferentes de los considerados por Euclides. En consecuencia, las técnicas del álgebra geométrica griega no permitían construir todas las cantidades inconmensurables.

Fibonacci dio también una interpretación de los números negativos como pérdidas o deudas, que tuvo bastante buena acogida. Pero todavía deberá pasar mucho tiempo para que los números negativos y el cero sean totalmente aceptados como números.

En este apresurado repaso que estamos dando a la historia de los números, debemos avanzar ahora casi trescientos años para llegar a la siguiente etapa protagonizada por los matemáticos italianos del Renacimiento Niccoló Tartaglia (*c.* 1500 - 1557), Gerolamo Cardano (1501 - 1576), Rafael Bombelli (1526 - 1572) y Ludovico Ferrari (1522 - 1565). Los dos primeros resolvieron la ecuación general de tercer grado de la cual solamente se conocían las soluciones en algunos casos particulares. En la resolución de la cúbica, Cardano tuvo en cuenta las soluciones negativas aunque las llamó "ficticias", y comprobó que la cúbica podía tener tres soluciones. Así mismo, Cardano reconoció por primera vez la existencia de lo que ahora llamamos números complejos (a los que Napier llamó "los fantasmas de los números reales") aunque no los aceptó como posibles soluciones. Por su parte, Bombelli fue el primero en especificar las reglas para sumar y multiplicar números complejos. Usando dichas reglas, probó que podían obtenerse soluciones reales correctas para la cúbica, incluso cuando la fórmula de Tartaglia – Cardano requería el cálculo de raíces de números negativos.



Figura 5.4. Tartaglia

De esta época es también un opúsculo *De Thiende* (1585) ("El Décimo") – 36 páginas – de Simon Stevin (1548 - 1620), ingeniero y matemático nacido en Brujas, en el que se introducen las fracciones decimales y se explica su uso en las operaciones aritméticas. Así mismo, en su obra *L'Arithmetique* (1585) escribió que "no hay números inexplicables, irregulares, irracionales, surds[1] o absurdos", indicando con esto que todos los números debían ser tratados por igual y no hacer distinciones entre ellos como si fueran de distinta naturaleza. Después de Stevin, la idea de que 1 era un número ganó una amplia aceptación.

A pesar de estos avances, los conceptos de "número" y "cantidad" de la antigüedad permanecen sin cambios notables hasta el siglo XVII cuando se desarrolla el simbolismo algebraico.

Lo importante del simbolismo algebraico, no es tanto el uso de los símbolos por sí mismos, sino la elaboración de reglas formales para realizar operaciones de forma simbólica. Por ejemplo, a^2 puede entenderse como una forma simplificada de escribir "el área del cuadrado de lado a". Eso es muy distinto de escribir $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Esto último ya es una manipulación simbólica abstracta en la que las letras a, b no son más que símbolos sin una naturaleza concreta.

François Viéte en su *In artem analyticem isagoge* (1591) expone una "logistica speciosa" (*specis*: símbolo), o arte de calcular con símbolos, que fue un paso decisivo para el desarrollo del concepto de cantidad abstracta. No obstante, Viéte consideraba que solamente las cantidades homogéneas podían compararse entre sí. Para entender esto debes tener en cuenta que, desde la antigüedad, el producto de dos cantidades, por ejemplo ab, representaba el área de un rectángulo de lados a y b. De la misma forma, abc representaba el volumen de un ortoedro. Una expresión como $ab + c$ no tenía significado porque no se podía sumar una longitud y un área: no eran cantidades homogéneas.

El siguiente paso definitivo fue el invento de la *geometría analítica* en los años 1630 por

[1]La palabra griega "alogos", $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$, usada por los griegos para designar a los números irracionales, también significa "sin discurso" y los árabes la tradujeron por *asamm*, "sordo" o "mudo", que fue traducida al latín por *surdus*.



Figura 5.5. Viéte



Figura 5.6. Fermat



Figura 5.7. Descartes

Pierre Fermat y René Descartes. La introducción de coordenadas y la representación de curvas por medio de ecuaciones supuso un cambio de perspectiva revolucionario. Piensa que, en la Antigüedad, solamente podían estudiarse aquellas curvas para las que se conocía un método de construcción con regla y compás. Ahora, por primera vez, los objetos geométricos podían estudiarse por medio del simbolismo algebraico, cuando hasta entonces lo usual había sido que el simbolismo algebraico fuera un pálido reflejo de relaciones geométricas.

Una importante creación de Descartes fue el desarrollo de un "álgebra de segmentos". Para ello, tomando como unidad un segmento u, construyó un segmento (cantidad) c que verificaba la proporción $u : a = b : c$. Dicho segmento c representaba el producto de los dos segmentos (cantidades) a y b. También construyó segmentos que se correspondían con la suma, la diferencia y el cociente de segmentos. De esta manera, cualquier operación con cantidades se corresponde con un segmento, lo que hace que todas las cantidades sean homogéneas. Una expresión como $ab + c$ ya es correcta porque representa un segmento de línea. Esta homogeneización de todas las cantidades conduce al concepto de *cantidad abstracta* desconocido en la antigüedad.

Por esta época ya también los números eran objetos abstractos del pensamiento. Es decir, ya no eran simplemente un atributo del grupo al que contaban sino que se habían convertido en entidades autónomas.

Descartes introdujo el término "imaginario" para referirse a aquellas soluciones de una ecuación polinómica que solamente están en "nuestra imaginación". Como era costumbre, llamaba "soluciones falsas" a las soluciones negativas. Las "raíces verdaderas" eran las positivas.

A estos progresos en matemáticas hay que agregar los realizados en astronomía y en mecánica por Copérnico (1473-1543), Kepler (1571-1630) y Galileo(1564-1642). Todos ellos se apoyan en métodos experimentales y empíricos cuantitativos para formular sus resultados como Leyes de la Naturaleza de contenido matemático.

Al mismo tiempo, a lo largo de los dos primeros tercios del siglo XVII, se van desarrollando una gran variedad de "métodos infinitesimales", cuyos precedentes clásicos estaban en Eudoxo y Arquímedes, para resolver multitud de problemas de tipo geométrico y analítico, como cálculo de tangentes a curvas, cálculo de áreas y de valores máximos. Los trabajos de Cavalieri (1598 - 1647) , Wallis (1616 - 1703) y Barrow (1630 - 1677) entre otros muchos, establecieron las bases sobre las que dos grandes genios, Newton (1643 - 1727) y Leibniz (1646 -

1716) desarrollaron el Cálculo Infinitesimal. Más adelante veremos con algún detalle todo este proceso, pues ahora quiero considerar solamente aquellos aspectos del mismo relacionados con las ideas de número y de cantidad.

El Cálculo Infinitesimal son las matemáticas del cambio y del movimiento. Las ideas de magnitud variable y de dependencia entre magnitudes son fundamentales en estas nuevas matemáticas. Surge así el concepto de "variable" que se forma a partir de la idea de cantidad abstracta. En el libro de L'Hôpital *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (1696) se lee:

> *Se llaman cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen continuamente, y por contraste cantidades constantes aquellas que permanecen igual mientras las otras cambian.*

Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII usan el término "cantidad" para referirse a cantidades generales abstractas, así como a cantidades geométricas concretas, pero siempre se consideran dichas cantidades como continuas. La noción de cantidad continua no se discute, se trataba de un concepto basado en la realidad física. Según Leibniz "Natura non facit saltus".

La idea de cantidad es más general que la idea de número. Un segmento de línea, por ejemplo, representa una cantidad, pero él mismo no se reduce a números. La idea de número como elemento de un conjunto no existe en el siglo XVIII. Por la misma razón, un segmento no puede "separarse" de sus extremos y siempre los incluye. Los números eran interpretados como medidas. En *Arithmetica universalis* (1707) Newton escribe:

> *Por* número *entendemos no tanto una multitud de cantidades, como la razón abstracta de cualquier cantidad a otra cantidad de la misma clase que tomamos por unidad. Un entero es lo que es medido por la unidad, una fracción, aquello a lo que una parte submúltiplo de la unidad mide, y un surd, aquello que es inconmensurable con la unidad.*

Esta interpretación de los números se corresponde con la consideración de las Matemáticas en los siglos XVII y XVIII como una Ciencia de la Naturaleza y, en consecuencia, los objetos matemáticos deben estar vinculados, directa o indirectamente, con la realidad física. Por ello, solamente se consideran como "verdaderos números" los que representan el resultado de una medida: los enteros y los racionales positivos. Los demás números (negativos, el 0 y los imaginarios) son necesarios y útiles para los cálculos, pero no son considerados "verdaderos números" son "ficticios".

Los números irracionales positivos, aunque no son números en sentido estricto, tampoco son propiamente "ficticios", porque pueden representarse por un segmento y sirven para medir cantidades geométricamente especificadas. Los racionales e irracionales positivos son llamados "números reales" en oposición a los números imaginarios.

Los números empiezan a considerarse como entidades simbólicas sobre las que se opera con unas reglas establecidas (pero que no pueden ser libremente definidas). Por ejemplo, según Euler, $\sqrt{12}$ es un número que multiplicado por sí mismo es igual a 12, y esto es una definición simbólica de $\sqrt{12}$.

El desarrollo inicial del Cálculo, en el último tercio del siglo XVII, se basa en ideas vagas e imprecisas como "cantidad evanescente", "razón última" o "infinitamente pequeño". El uso

de los “infinitésimos”, considerados como cantidades que, sin ser nulas, son más pequeñas que cualquier cantidad positiva imaginable, es característico de las técnicas del Cálculo.

Después de la invención del Cálculo el objetivo era usarlo para descubrir nuevos resultados. Al principio, nadie se preocupó mucho por la corrección matemática de los procedimientos empleados. La confianza en dichas técnicas descansaba en su extraordinaria eficacia para resolver multitud de problemas. Sin embargo, a finales del siglo XVIII, el uso continuado de los infinitésimos, que nadie sabía explicar, unido a la incomprensión que se tenía de los números irracionales y de los procesos de convergencia, propiciaron estudios críticos de los conceptos básicos del Cálculo, que acabaron llevando a una nueva formulación de los mismos mucho más formal y rigurosa, según los criterios actuales, pero también mucho menos intuitiva.

5.2.3. Infinitésimos y el continuo numérico

Estás leyendo *ahora mismo* estas palabras. Tienes un sentido preciso del “ahora”, al igual que del “pasado” y del “futuro”. Tenemos una percepción muy clara del “flujo del tiempo”. Percibimos el tiempo como un continuo: lo que separa dos instantes de tiempo es . . . tiempo. Dado un pequeño intervalo de tiempo, digamos un segundo, siempre podemos concebir otro intervalo más pequeño todavía, medio segundo o una cienbillonésima parte de un segundo. ¿Has pensado alguna vez hasta dónde es posible *dividir el tiempo*? Si aceptamos que el “instante” es lo que no tiene duración, parece difícil aceptar que el tiempo esté formado por instantes. ¿Debemos considerar entonces que hay una *unidad mínima* de tiempo, todo lo pequeña que queramos, pero que no se reduce a un instante? Estarás de acuerdo en que esa unidad mínima de tiempo sería algo así como una unidad de tiempo “infinitesimal”. ¿Cuántas unidades infinitesimales de tiempo caben en un minuto? ¿Un número finito? ¿Una cantidad infinita?

En el párrafo anterior podemos cambiar la palabra “tiempo” por “espacio” e “instante” por “punto” y llegaremos a los problemas derivados de la “infinita divisibilidad” del espacio. Tiempo y espacio son ejemplos de “continuo”. Una entidad continua, un *continuo*, es lo que no está roto ni separado ni tiene huecos, lo que puede ser indefinidamente dividido sin que pierda su naturaleza. Por ejemplo, un volumen de líquido, un segmento, un movimiento o, los ejemplos más inmediatos, el espacio y el tiempo.

Lo que relaciona espacio y tiempo es el movimiento. El Cálculo es la matemática del movimiento, del cambio continuo. El Cálculo se apoya en la geometría analítica de Descartes y Fermat y en la Aritmética. La Geometría se ocupa de cantidades continuas; la Aritmética de lo discreto. El Cálculo es la síntesis de lo “discreto” y lo “continuo”. Los “infinitésimos”, las cantidades infinitesimales, son el puente entre lo discreto y lo continuo.

Los procedimientos del Cálculo, límites, convergencia, continuidad, pueden describirse como matemáticas del *continuo numérico*. La expresión “continuo numérico” puede parecer un oxímoron, esto es, una combinación de dos palabras con significados opuestos y, en cierto sentido, es así. Los números sirven para contar grupos de cosas de igual naturaleza; por ejemplo árboles, o lo que quiera que sea, pero cada una de ellas con su propia individualidad, separadas entre sí, cosas que no tiene sentido dividir porque al hacerlo pierden su naturaleza. Todo esto se resume diciendo que los números tienen un carácter *discreto*. Los números siempre fueron considerados como lo opuesto del continuo.

La oposición continuo – discreto ha ocupado a los filósofos desde hace 2500 años y tie-

ne como primeros representantes respectivos a Parménides (*c.* 510 - 450 a.C.) y a Demócrito (*c.* 460 - 370 a.C.).

Parménides, el filósofo más famoso de la Escuela Eleática, afirma en su hermoso poema *Sobre la Naturaleza*, que lo que Es, el Ser, es uno, ingénito, homogéneo, continuo, indivisible e inmutable. Este concepto del Ser excluye toda posibilidad de nueva generación de seres o sustancias y, por tanto, el cambio y el movimiento son mera ilusión, porque ambos presuponen que lo que no es pueda llegar a ser.

Demócrito es el representante más conocido de la Escuela Atomista cuyo materialismo se opone al idealismo de la Escuela Eleática. Demócrito mantiene que el universo está compuesto de pequeños corpúsculos invisibles, los “átomos”, que pueden poseer diferentes formas y extensiones y que por movimientos y combinaciones diversas en el vacío engendran la totalidad de lo existente.

Zenón de Elea, discípulo de Parménides, es famoso por sus *aporías*, en las que trata de probar que tanto si el espacio o el tiempo son infinitamente divisibles, como si no lo son, el movimiento no existe o es imposible. Las aporías de Zenón son un extraordinario desafío, al que filósofos y matemáticos han dado diversas respuestas, sin que aún hoy se tenga conciencia clara de haberlas podido explicar de forma totalmente convincente.

Según Aristóteles, los atomistas preguntaban, en el supuesto de que una magnitud sea infinitamente divisible, qué es lo que quedaba de ella después de haberla sometido a un proceso de división exhaustivo. Y decían, si queda algo como polvo, es porque todavía no se ha completado el proceso de división, y si lo que queda son puntos o algo sin extensión, ¿cómo es posible recomponer una magnitud extensa con algo que no tiene extensión? Según ellos, la respuesta eran los átomos. La palabra griega “átomos” significa “lo que no puede dividirse”, por tanto, la Escuela Atomista negaba la infinita divisibilidad de la materia y afirmaba que cualquier magnitud contiene elementos indivisibles.

De la oposición continuo – discreto siguieron ocupándose los filósofos de la Antigüedad, Platón (*c.* 427 - 347 a.C.), Aristóteles (384 - 322a.C.), Epicuro (341 - 270 a.C.); y de la Edad Media Duns Scoto (*c.* 1266 - 1308), Guillermo de Ockham (*c.* 1280 - 1349), Nicolás de Cusa (1401 - 1464), entre otros. Éste último, en una supuesta demostración de la cuadratura del círculo, consideró una circunferencia como un polígono regular de infinitos lados. La idea de considerar que una curva está formado por infinitos segmentos infinitesimales de línea recta fue usada, entre otros, por Kepler, Galileo y Leibniz y está recogida en el libro de Guillaume de L’Hôpital *Analyse des Infiniment Petits pour l’Intelligence des Lignes Courbes* (1696) al cual ya nos hemos referido anteriormente.

A finales del siglo XVII, con el invento del Cálculo, resurgió la oposición entre lo continuo y lo discreto, esta vez centrada en el concepto de cantidad infinitesimal. Algunos consideraban los infinitésimos como algo real, infinitamente pequeño, parecido a los átomos de Demócrito, salvo que ahora su número era infinito. La integración se consideraba como una suma infinita de estos infinitésimos. Una diferencial de una cantidad variable era un incremento infinitesimal de dicha variable, y un cociente o una razón de diferenciales “en el momento en que se anulan”, lo que Newton llamaba *cantidades evanescentes*, era lo que ahora llamamos una derivada, y Newton llamaba una *fluxión*.

El uso de los infinitésimos en el Cálculo demostraba ser muy eficaz y, aunque a algunos, como al mismo Newton, les hubiera gustado evitarlo, lo cierto es que no se sabía bien cómo

hacerlo. Lo peor de todo, no es que el mero concepto de infinitésimo sea de por sí difícilmente sostenible, sino la forma en que los infinitésimos se manejaban en los cálculos. Podemos destacar dos características.

- Con los infinitésimos podía operarse como con cantidades finitas no nulas y, en particular, podía dividirse por ellos.
- Los infinitésimos podían ser tratados como cantidades nulas. Así, si x es una cantidad positiva y o un infinitésimo, entonces $x + o = x$.

Dependiendo del tipo de cálculo eran tratados de una forma u otra. Además, había infinitésimos de primer orden despreciables frente a cantidades finitas; de segundo orden que eran despreciables frente a los de primer orden, y así sucesivamente. Para acabar de empeorar las cosas, los infinitésimos no respetaban la propiedad arquimediana, pues el producto de cualquier cantidad finita por un infinitésimo seguía siendo un infinitésimo.

5.1 Ejemplo. Un ejemplo típico es el cálculo de la diferencial de un producto de dos cantidades x e y. Se razonaba como sigue. Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que xy se transforma en

$$(x + \mathrm{d}x)(y + \mathrm{d}y) = xy + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

por lo que la diferencial de xy es $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pero como $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ es una cantidad infinitamente pequeña con respecto a los otros términos, se sigue que la diferencial de xy es $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$. ♦

5.2 Ejemplo. Veamos otro ejemplo típico. Consideremos dos cantidades x, y relacionadas por $y - x^3 = 0$. Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que

$$0 = y + \mathrm{d}y - (x + \mathrm{d}x)^3 = y + \mathrm{d}y - x^3 - 3x^2\,\mathrm{d}x - 3x(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}x)^3$$

Teniendo en cuenta que $y - x^3 = 0$, deducimos:

$$\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x + 3x(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3$$

Dividiendo por $\mathrm{d}x$ la igualdad obtenida resulta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 3x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$$

Y como $3x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$ es infinitamente pequeño respecto de $3x^2$, concluimos que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$.

En lenguaje actual, lo que hemos hecho es calcular la derivada de la función $f(x) = x^3$. Y... ¡el resultado es correcto! A pesar de que hemos dividido por una cantidad que después hemos hecho igual a cero. ♦

En 1734 el filósofo George Berkeley (1685 - 1753) publicó una obra cuyo título es *El analista, o discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o deducidos de manera más evidente, que los misterios de la religión y las cuestiones de la fe*. En dicha obra Berkeley, que fue obispo anglicano de Cloyne, hace una crítica de los fundamentos del Cálculo que tuvo una gran influencia. Afirmaba Berkeley que si se acepta que el Cálculo puede alcanzar soluciones exactas por medio de razonamientos erróneos, entonces debe admitirse que la fe puede alcanzar la verdad por vías místicas. Es famoso su comentario:

> *¿Qué son las fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. Y ¿qué son estos mismos incrementos evanescentes? Ellos no son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera son nada. ¿No las podríamos llamar los fantasmas de las cantidades desaparecidas?*

Los embrollos en que andaban metidos los matemáticos se reflejan en la novela de Jonathan Swift *Los viajes de Gulliver* (1726) donde aparecen los diminutos enanos de Lilliput y los enormes gigantes de Brobdingnag, y en la narración corta *Micromegas* (1752) de Voltaire.

La realidad es que los matemáticos del siglo XVIII, y hasta bien entrado el siglo XIX, estaban mucho más interesados en desarrollar y aplicar las técnicas del Cálculo, que en ocuparse de problemas de fundamentos. Entre los principales matemáticos de esta época hay que citar a Leonard Euler (1707 - 1783), Jean d'Alembert (1717 - 1783), Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), Joseph Fourier (1768 - 1830), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). El espíritu de los tiempos, el Siglo de las Luces, queda bien reflejado en la siguiente frase.

> *Todos los efectos de la naturaleza son tan sólo las consecuencias matemáticas de un pequeño número de leyes inmutables.* Laplace

En el primer tercio del siglo XIX, el ideal de Newton de "someter los fenómenos de la Naturaleza a las leyes matemáticas", podía considerarse esencialmente realizado.

5.2.4. El triunfo de Pitágoras

Llegamos así al siglo XIX que, en cuanto a matemáticas se refiere, ha sido llamado el Siglo del Rigor. Veamos cómo se entendían en los primeros años de dicho siglo los conceptos básicos del Cálculo.

- Concepto de función. No existía tal como lo entendemos en la actualidad. En vez de funciones, se consideraban relaciones entre variables, es decir, ecuaciones. Las correspondencias entre variables se interpretaban en términos geométricos. No existía la idea del dominio de una variable.

- Concepto de continuidad. El concepto de continuidad puntual no había sido siquiera formulado matemáticamente. La idea de Euler de función continua, como aquella que está definida por una única expresión analítica, era todo lo que había.

- Concepto de límite. Solamente se tenían algunas ideas confusas agravadas por el uso de los infinitésimos. Los infinitésimos empezaban a considerarse como variables con límite cero.

- Concepto de número. La idea de cantidad abstracta variable, a la que podían asignarse valores concretos, no había experimentado cambios notables en casi un siglo. Los números complejos ya eran aceptados, gracias a los trabajos de Euler y, sobre todo, de Gauss, pero seguía sin tenerse una idea clara de los números irracionales, y prevalecía una interpretación geométrica de los mismos.

Esta situación iba a cambiar gracias principalmente a los trabajos de Bernad Bolzano (1781 - 1848), Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) y Karl Weierstrass (1815 - 1897) de los que nos ocuparemos al estudiar la formalización del concepto de límite. Ahora quiero detenerme solamente en la evolución de la idea de número real. A los tres matemáticos citados hay que agregar los nombres de Richard Dedekind (1831 - 1916) y George Cantor (1845 - 1918), fueron ellos quienes desarrollaron la teoría de los números reales que hemos estudiado en los Capítulos 1 y 4. Es lógico preguntarse por qué esto no se hizo antes. Pueden darse varias razones para ello.

- En el siglo XVIII las matemáticas son consideradas una Ciencia de la Naturaleza. Las teorías matemáticas deben reflejar la realidad física. Las matemáticas son una herramienta para formular y descubrir las Leyes de la Naturaleza. Las teorías matemáticas no se inventan, se descubren.
- Los números reales estaban asociados con magnitudes y se interpretaban geométricamente. Eran algo dado en la realidad física. A los matemáticos del siglo XVIII no les pareció necesario dar una definición matemática de los mismos.
- Observa que para precisar un número como $\sqrt{2}$ debes dar todas sus cifras decimales en su orden, es decir, un vector de infinitas componentes. Fíjate también que la condición dada por Eudoxo (5.1) para comparar razones inconmensurables hace intervenir a *todos* los números naturales. Esto no es casual. La idea de número irracional lleva consigo asociada la de infinito. Hasta que no se elaboraron los fundamentos de una teoría matemática del infinito, no pudo desarrollarse una teoría satisfactoria de los números reales.

En el siglo XVIII las definiciones matemáticas eran descriptivas; no creaban objetos matemáticos sino que describían algo que se suponía debía imitar una realidad externa. Por la misma razón, no podían inventarse reglas para operar con los objetos matemáticos. Las reglas había que descubrirlas, pero no podían elegirse libremente. Se consideraba que la Naturaleza imponía unas normas que las Matemáticas de alguna manera debían imitar, no se era libre para inventar una teoría matemática. La idea de una Matemática como juego lógico formal era algo impensable en el siglo XVIII.

La idea que los matemáticos tenían de su Ciencia cambió de forma radical como consecuencia de la invención en el siglo XIX de las geometrías no euclídeas por Janos Bolyai (1802 - 1860) y Nikolai I. Lobachevsky (1792 - 1856). Quedó claro a partir de entonces que las matemáticas no son una Ciencia de la Naturaleza, que la definición usual de las matemáticas como la ciencia que estudia la cantidad y la forma es inadecuada, y pasó a considerarse que la matemática es la ciencia que obtiene conclusiones lógicas de sistemas axiomáticos. Las matemáticas son, pues, una ciencia puramente deductiva. Una teoría matemática es un conjunto de axiomas que contienen ciertos términos indefinidos, y un sistema de reglas de inferencia lógica. El papel que juegan las definiciones en una teoría matemática consiste en crear nuevos objetos matemáticos y precisar su significado en dicha teoría. Todos los objetos que se estudian en una teoría matemática, o bien son términos indefinidos de dicha teoría o son objetos creados por medio de definiciones que remiten a los axiomas. En el XVIII los números reales son algo dado y externo que las matemáticas deben explicar, al final del XIX los números serán algo completamente diferente.

La idea de número real es el soporte de otras ideas básicas del Cálculo como las de continuidad y límite. Los procesos de convergencia dependen de la propiedad de completitud de los números reales. Por todo ello, los matemáticos eran cada vez más conscientes de que los progresos del Cálculo dependían de un mejor conocimiento de los mismos.

5.2.4.1. Cortaduras de Dedekind

A mediados del siglo XIX no era posible demostrar algunos resultados básicos del cálculo; por ejemplo, que toda función creciente y acotada tiene límite, o el teorema del valor intermedio para funciones continuas. Ello se debía a que faltaba codificar matemáticamente una propiedad fundamental de los números reales, la que ahora llamamos *completitud* y entonces se llamaba *propiedad de continuidad*. En 1872 se publicaron dos trabajos, uno de Cantor y otro de Dedekind, en los que, tomando como punto de partida el sistema de los números racionales, cada autor desarrollaba una construcción matemática de los números reales. Nos vamos a ocupar aquí del trabajo de Dedekind, titulado *Continuidad y números irracionales*. En dicho trabajo, Dedekind manifiesta su propósito de reducir los números reales a la aritmética, eliminando así todo contenido geométrico en la idea de número real. Para explicar lo que él hizo vamos a partir de la intuición de una recta.


Figura 5.8. Dedekind

Una recta es un ejemplo claro de continuidad. Elegido un punto como origen y un segmento como unidad, podemos hacer corresponder a cada número racional un punto de esa recta. Ya hemos visto, al hablar de las magnitudes inconmensurables, que los números racionales no agotan todos los puntos de la recta; cualquier punto que corresponda con un segmento de longitud inconmensurable con la unidad elegida no puede ser representado por un número racional, es decir, en la recta racional hay "huecos". Por tanto, los números racionales no son suficientes para describir numéricamente "el continuo". Se pregunta Dedekind:

> *¿En qué consiste esta continuidad? Todo depende de la respuesta a esta pregunta, y solamente a través de ella obtendremos una base científica para la investigación de todos los dominios continuos. Con vagas observaciones sobre la unión sin rotura de las partes más pequeñas, obviamente nada se gana; el problema es indicar una característica precisa de la continuidad que pueda servir como base para deducciones válidas. Durante largo tiempo he meditado sobre esto en vano, pero finalmente he encontrado lo que pretendía.*

Dedekind se dispone a revelar el secreto, pero como su idea además de ser genial es muy sencilla, previene al lector con esta observación.

> *Muchos de mis lectores quedarán grandemente disgustados al saber que por esta vulgar observación se revela el secreto de la continuidad.*

¿Cuál es esa *vulgar* observación? Vamos a explicarla. Todo punto en una recta R la divide en dos partes disjuntas, la parte A, formada por los puntos de la recta que están a su izquierda, y la parte B, formada por los puntos de la recta que están a su derecha. El propio punto podemos incluirlo bien en A o en B. Dice Dedekind:

> *He encontrado la esencia de la continuidad en el recíproco, es decir, en el siguiente principio:*“Si todos los puntos de la recta se dividen en dos clases tales que todo punto de la primera clase queda a la izquierda de todo punto de la segunda clase, entonces existe un, y sólo un punto, que produce esta división de todos los puntos en dos clases, esta escisión de la línea recta en dos partes.”

Las ideas geniales, que además son sencillas, son doblemente geniales. Igual que el tiempo es continuo porque entre dos instantes de tiempo solamente hay tiempo, la recta es continua porque entre dos puntos de ella solamente hay puntos de la misma recta. Es esta la idea que Dedekind ha sabido expresar matemáticamente de una forma insuperable. Para entenderla un poco mejor, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como puntos de una recta en la que hemos elegido un origen y una unidad, la recta racional.

5.3 Definición. Una *cortadura* de $\mathbb{Q}$ es un par (A, B), donde A y B son conjuntos no vacíos de números racionales tales que $\mathbb{Q} = A \cup B$, y todo número de A es menor que todo número de B y A no tiene máximo.

Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ produce una cortadura dada por

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r \geqslant x\}$$

Pero en la recta racional hay muchas cortaduras que no están producidas por números racionales. En el ejercicio (70) hemos visto que los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0 \text{ o } x^2 < 2\}, \;\; B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 \geqslant 2\}$$

definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional. De hecho, si te imaginas la recta racional dentro de la recta real, y tomas un número α que sea irracional, los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r > \alpha\}$$

Definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional. Es decir, considerando $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, vemos que cada cortadura de $\mathbb{Q}$ está determinada por un punto que puede ser racional o irracional.

Pero claro, *está prohibido usar la recta real cuando lo que queremos es justamente construirla a partir de* $\mathbb{Q}$. ¿De dónde sacamos los números reales si todo lo que tenemos son los racionales? Esta es la idea genial de Dedekind.

5.4 Definición. Un número real es una cortadura de $\mathbb{Q}$.

El conjunto de todos los números reales se representa por $\mathbb{R}$. Observa el papel que desempeñan las definiciones en una teoría matemática: crean nuevos objetos de la teoría. La definición anterior dice lo que es un número real en términos exclusivamente de números racionales. Vuelve ahora a leer la definición de Eudoxo (5.1) para la igualdad de razones inconmensurables. ¡Lo que dice (5.1) es que dos razones inconmensurables son iguales si producen una misma cortadura en $\mathbb{Q}$! Salvo esto, ningún otro parecido hay entre Dedekind y Eudoxo.

Los números racionales se construyen a partir del conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, y éstos se obtienen fácilmente a partir de los naturales. Dedekind y Giuseppe Peano establecieron una base axiomática para el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Ya ves, al final, Pitágoras ha regresado: todo es número.

5.2.4.2. Métodos axiomáticos y métodos constructivos

Supongo lo que estás pensando: “¡Vaya definición extraña de número real! Ahora resulta que un número es una cortadura... ¡nada menos que dos conjuntos infinitos de números!”. Vayamos poco a poco.

- Es una definición operativa, es decir, permite definir la suma y el producto de números reales, así como la relación de orden y demostrar las propiedades **P1 - P7** del Capítulo 1, y también la propiedad del supremo **P8**. Además, todo esto se hace de forma sencilla aunque laboriosa. Si tienes curiosidad, puedes consultar el Capítulo 28 de [16].

- Lo importante de la definición es que define los números reales solamente usando los números racionales. Es decir, resuelve un problema de *existencia* en sentido matemático.

Las propiedades o axiomas **P1 - P7** del Capítulo 1, junto con la propiedad del supremo **P8**, definen una estructura que se llama *cuerpo ordenado completo*. Aunque en el Capítulo 1 dijimos que no era nuestro propósito decir qué son los números reales, podemos ahora responder a dicha pregunta: *los números reales son el único cuerpo ordenado completo*. La demostración de que *existe* un cuerpo ordenado completo y es *único* es larga, laboriosa y depende de las hipótesis de partida.

Lo más usual es dar por conocidos los números racionales y a partir de ellos *construir* $\mathbb{R}$. Esto puede parecer extraño a primera vista, porque si sólo conocemos los números racionales, ¿de dónde van a salir los demás? De eso precisamente se ocupan los *métodos constructivos* (Cantor, Dedekind). Por ejemplo, si partimos de la intuición de que con los números reales se pueden representar *todos* los puntos de una recta, es claro que un número real queda determinado de forma única por los números racionales menores que él. Esta idea conduce a la *definición* de número real dada por Dedekind. La definición de Cantor es mucho menos intuitiva pues, para Cantor, un número real es una clase de infinitas sucesiones de números racionales que cumplen una cierta propiedad.

Es posible probar, partiendo de estas definiciones, que el conjunto de los números reales así definidos puede dotarse de una estructura algebraica y de orden de manera que satisface los axiomas **P1 - P8**. Este proceso es bastante laborioso; además se corre el peligro de centrar la atención en el proceso en sí mismo olvidándose de lo que se persigue. Por otra parte, las definiciones de Dedekind o de Cantor no son las únicas, hay otras definiciones de número real. Pensarás que esto no es serio. ¿Qué está ocurriendo aquí? Ocurre, sencillamente, que cualquier definición de los números reales a partir de los racionales, esto es, cualquier método constructivo de $\mathbb{R}$, tiene su razón última de ser en el *problema de la existencia*: ¿puede ser construido un cuerpo ordenado completo a partir de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos? Pues bien, la respuesta es que sí; además, y esto es fundamental, matemáticamente, en un sentido preciso, dicho cuerpo *es único*.

Da igual, por tanto, cómo se interprete lo que es un número real, lo importante es que de cualquier forma que lo hagamos, los axiomas **P1 - P8** determinan totalmente sus propiedades matemáticas. Es decir, una vez que sabemos que hay un único cuerpo ordenado completo, lo mejor es olvidar cualquier posible interpretación de cómo sean sus elementos (ningún matemático cuando considera el número real $\sqrt{2}$ piensa que $\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ o } x^2 < 2\}$) y quedarnos exclusivamente con las propiedades de los mismos. Esto es precisamente lo que se

hace con el método axiomático que nosotros hemos elegido para presentar $\mathbb{R}$.

5.2.4.3. El regreso de los pequeñitos

Con la reducción del continuo a lo discreto, parece que finalmente ha triunfado la Aritmética. Pero la historia continua. Por una parte, los números naturales tuvieron un reinado efímero, pues fueron esencialmente reducidos a pura lógica como consecuencia del trabajo pionero de Gottlob Frege. Por otra parte en 1960, el lógico Abraham Robinson (1918 - 1974) construyó un sistema numérico, los *hiperreales*, un cuerpo totalmente ordenado no arquimediano, que contiene una copia de los números reales y en el que hay números infinitamente pequeños y números infinitamente grandes. Las técnicas desarrolladas por Robinson se conocen con el nombre de *Análisis No Estándar*. Con dichas técnicas pueden probarse los resultados fundamentales del Cálculo de forma intuitiva y directa al estilo de Newton y Leibniz. ¡Están aquí! ¡Los infinitésimos han regresado!

5.2.5. Ejercicios propuestos

---

170. Prueba que la propiedad del supremo es equivalente a la siguiente propiedad.

Propiedad del continuo. Dados subconjuntos no vacíos A y B de números reales cuya unión es igual a $\mathbb{R}$, y tales que todo elemento de A es menor que todo elemento de B, se verifica que existe un número real $z \in \mathbb{R}$, tal que todo número real menor que z está en A y todo número real mayor que z está en B.

5.3. Evolución del concepto de límite funcional

Lo más específico del Análisis Matemático son los procesos de convergencia, o procesos "de paso al límite", que en él se consideran. Aquí nos vamos a ocupar solamente del concepto de límite funcional. Dicho concepto está estrechamente relacionado con los de función y de número real; y los tres juntos constituyen el núcleo del Análisis. Por ello, la historia de su evolución es también la del desarrollo del Cálculo, de los sucesivos intentos para fundamentarlo sobre bases lógicas rigurosas. Aislar en este proceso aquellos aspectos directamente relacionados con el concepto de límite funcional, conlleva una pérdida de perspectiva que, espero, quedará compensada en capítulos siguientes al estudiar la evolución de los conceptos de derivada, integral y convergencia de series.

5.3.1. La teoría de las "razones últimas" de Newton

En las matemáticas de la Antigüedad no existía una idea de "límite" que pueda ser considerada como un precedente lejano de la actual. Lo más parecido era el método de exhausción (496), empleado con maestría por Arquímedes para realizar diversas cuadraturas (8.8.1). Pero

dicho método no consistía en un límite, sino que, precisamente, lo que hacía era evitarlo y sustituirlo por un esquema de razonamiento de doble reducción al absurdo, típico de las matemáticas griegas. La matemática Griega abomina del infinito y la idea de límite connota la de infinito. Es notable, sin embargo, que cuando los matemáticos Griegos tienen que enfrentarse al infinito como, por ejemplo, Eudoxo al definir la igualdad de razones de magnitudes inconmensurables (5.1), lo que hace es basar su definición de *igualdad* en un álgebra de *desigualdades*.

Tenemos que llegar al siglo XVII, con la invención de las técnicas infinitesimales que preludian el descubrimiento del Cálculo, para encontrar las primeras referencias confusas de procesos de convergencia. El primer indicio del concepto de límite funcional aparece en estrecha relación con el cálculo de fluxiones (velocidades instantáneas) (6.8.4) de Newton. En su teoría de las "razones últimas" expuesta en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) se lee:

> It can also be contended, that if the ultimate ratios of vanishing quantities are given, their ultimate magnitudes will also be given; and thus every quantity will consist of indivisibles, contrary to what Euclid has proved.... But this objection is based on a false hypothesis. Those ultimate ratios with which quantities vanish are not actually ratios of ultimate quantities, but limits which ... they can approach so closely that their difference is less than any given quantity... This matter will be understood more clearly in the case of quantities indefinitely great. If two quantities whose difference is given are increased indefinitely, their ultimate ratio will be given, namely the ratio of equality, and yet the ultimate or maximal quantities of which this is the ratio will not on this account be given.

Traduzco lo mejor que puedo:

> También puede alegarse que si las razones últimas de cantidades evanescentes son dadas, sus últimas magnitudes también serán dadas; y por tanto toda cantidad consistirá de indivisibles, en contra de lo que Euclides ha probado. . . Pero esta objeción está basada sobre una hipótesis falsa. Aquellas razones últimas con las que tales cantidades desaparecen no son en realidad razones de cantidades últimas, sino límites. . . a los que ellas pueden aproximarse tanto que su diferencia es menor que cualquier cantidad dada. . . Este asunto será entendido más claramente en el caso de cantidades indefinidamente grandes. Si dos cantidades cuya diferencia es dada son indefinidamente aumentadas, su última razón será dada, a saber, la razón de igualdad y, no obstante, las cantidades últimas o máximas de las cuales esta es la razón no serán por eso dadas.

Lo que yo entiendo que quiere decir Newton es lo que sigue. La expresión "razones últimas de cantidades evanescentes" puede interpretarse como el límite de un cociente cuyo numerador y denominador tienen límite cero: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$, donde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. En el primer párrafo, Newton dice que el hecho de que la razón última sea dada igual a L, no quiere decir que el cociente de las últimas magnitudes, $\frac{f(a)}{g(a)}$, sea igual a L. De manera muy interesante, Newton relaciona esto con la estructura del continuo, pues la idea que expresa es que si el valor de todo límite se alcanza, entonces el continuo estaría formado por últimas partes indivisibles. En el segundo párrafo, además de insistir en la idea anterior, queda claro que por "razones últimas" Newton entendía algo muy parecido a nuestra idea actual de límite. Finalmente, Newton propone un ejemplo excelente; consideremos, dice, dos cantidades $f(x)$ y $g(x)$ cuya diferencia está dada, $f(x) - g(x) = \alpha \neq 0$, y tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, en tal caso tendremos que su razón última será de igualdad, esto es, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y está claro que para ningún valor de x es $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y que tampoco las magnitudes $f(x)$ y $g(x)$ tienen un último valor.

Siempre es arriesgado hacer interpretaciones de esta naturaleza, pero creo que lo dicho es esencialmente correcto y, por tanto, manifiesto mi desacuerdo con quienes afirman que Newton

tenía ideas muy confusas con respecto al límite. Lo que no tenía (no podía tener) era el concepto de función (por eso habla de cantidades o magnitudes), ni el simbolismo apropiado, ni el concepto de variable real continua. . . pero la idea de límite la tenía bien clara.

Además, Newton considera que los infinitésimos no son cantidades fijas y, en los *Principia*, advierte a sus lectores que cuando hable de cantidades mínimas, o evanescentes, o de cantidades últimas, éstas no debieran entenderse como cantidades fijas que tienen un determinado valor, sino como cantidades que fueran indefinidamente disminuidas:

> Therefore in what follows, for the sake of being more easily understood, I should happen to mention quantities at least, or evanescent, or ultimate, you are not to suppose that quantities of any determinate magnitude, but such as are conceived to be always diminished without end.

Estas ideas de Newton fueron desarrolladas por el matemático escocés Colin MacLaurin (1698 - 1746) que, en su gran obra *A Treatise of Fluxions* (1742), establece el cálculo sobre la base de una teoría geométrico – cinemática de límites. MacLaurin rechazaba los infinitésimos, afirmaba que los antiguos nunca reemplazaron curvas por polígonos y que la base de la geometría de Arquímedes era el concepto de límite. Lo sorprendente es que MacLaurin usa el concepto de límite como algo evidente que no precisa ser explícitamente presentado ni analizado. Esto se debe a que el cálculo de MacLaurin se sustenta sobre las ideas de espacio, tiempo y movimiento lo que le lleva a aceptar como evidentes la continuidad y la diferenciabilidad.

5.3.2. La *metafísica del Cálculo* en D'Alembert y Lagrange

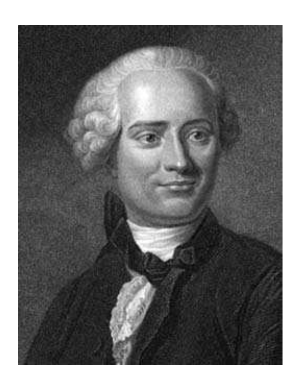


Figura 5.9. D'Alembert

Durante el siglo XVIII, por una parte, el uso permanente de los infinitesimales dificultaba la comprensión de los procesos de paso al límite y, por otra parte, el recién inventado Cálculo era una herramienta maravillosa para estudiar y formular matemáticamente multitud de fenómenos naturales. Además, los resultados obtenidos eran correctos, por tanto no había por qué preocuparse mucho de la coherencia lógica de los fundamentos, ya habría tiempo para ello más adelante.

Debemos destacar, no obstante, la propuesta de Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783) de fundamentar el Cálculo sobre el concepto de límite: *"La théorie des limites est la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel"*.

D'Alembert redactó la mayoría de los artículos de matemáticas y ciencias para la obra inmortal del Siglo de las Luces la *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751 - 65). En el artículo Différentiele (1754), después de criticar la "metafísica del infinito" de Leibniz, escribe:

> Newton partía de otro principio; y se puede decir que la metafísica de este gran geómetra sobre el cálculo de fluxiones es muy exacta y luminosa, aunque solamente la ha dejado entrever. Él no ha considerado nunca el cálculo diferencial como el cálculo de cantidades infinitamente pequeñas, sino como el método de las primeras y últimas razones, es decir, el método para hallar los límites de las razones.
>
> [. . .] La suposición que se hace de las cantidades infinitamente pequeñas sólo sirve para acortar y simplificar los razonamientos; pero en el fondo el cálculo diferencial no precisa suponer la existencia de tales cantidades; y más aún, este cálculo consiste meramente en la determinación algebraica del límite de una razón.

D'Alembert fue el primer matemático que afirmó haber probado que los infinitamente pequeños *"n'existent réellement ni dans la nature, ni dans les suppositions des Géomètres"*. Según d'Alembert:

> Una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si no es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera.

En el artículo *Limite* (1765), también escrito para la *Encyclopédie* junto con Jean-Baptiste de La Chapelle (1710 - 1792), se da la siguiente definición de límite:

> Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera, sin llegar nunca a excederla, en menos que cualquier cantidad dada tan pequeña como se quiera suponer.

Este artículo también contiene los resultados sobre la unicidad del límite y sobre el límite del producto de dos magnitudes, por supuesto, enunciados retóricamente sin ningún tipo de símbolo para representar los límites. Dichos resultados habían aparecido en el libro de La Chapelle *Institutions de Géométrie* (1757). Tanto d'Alembert como La Chapelle tenían una idea esencialmente geométrica del concepto de límite, así el ejemplo que ponen en el citado artículo es el de la aproximación de un círculo por polígonos.

El punto de vista de d'Alembert, esencialmente correcto, no era compartido por otros matemáticos, de forma destacada, por Joseph-Louis de Lagrange (1736 - 1813) quien en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), cuyo subtítulo era nada menos que *Les Principes du Calcul Différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*, pretendió establecer una fundamentación algebraica del Cálculo, eliminando toda referencia a los infinitesimales y a los límites. Lagrange criticaba la teoría de las "últimas razones" de Newton y afirmaba:

> Ese método tiene el gran inconveniente de considerar cantidades en el momento en que ellas cesan, por así decir, de ser cantidades; pues aunque siempre podemos concebir adecuadamente las razones de dos cantidades en tanto en cuanto ellas permanecen finitas, esa razón no ofrece a la mente ninguna idea clara y precisa tan pronto como sus términos ambos llegan a ser nada a la vez.

Esta severa crítica va realmente dirigida contra Euler, quien concebía las cantidades infinitesimales como ceros exactos y, por tanto, un cociente de diferenciales lo interpretaba como $\frac{0}{0}$, expresión de la cual había que hallar en cada caso "su verdadero valor". Lo llamativo es que la propuesta de Lagrange se basaba en los desarrollos en series de Taylor, considerados como una generalización del álgebra de polinomios, con lo que, de hecho, estaba usando la idea de límite que quería evitar. Por otra parte, es conocida la jactancia de Lagrange de que en su monumental *Mécanique analytique*(1772 - 88) no había usado ni necesitado ninguna figura. Lagrange seguía así la tendencia, cada vez mayor, de separar el cálculo y la geometría. De hecho, Lagrange puede considerarse un "matemático puro"; su rechazo a la teoría de fluxiones se debe a que está basada en la idea de movimiento, que no es matemática, y su rechazo de los límites es debido a la confusa formulación de dicho concepto en su tiempo.

5.3.3. El premio de la Academia de Berlín y otras propuestas en el último tercio del siglo XVIII

Jacques-Antoine-Joseph Cousin (1739 - 1800) escribió un libro de texto *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* (1777), en el que, siguiendo la idea de d'Alembert, afirmaba fundamentar el cálculo sobre el concepto de límite, el cual, para Cousin, es el mismo que el expresado por La Chapelle en el artículo *Limite* de la *Encyclopédie* antes reseñado. En particular, no hace distinción entre cantidades variables y constantes. Desde un punto de vista operativo, Cousin introduce, sin justificación, un principio de conservación de las razones entre dos variables por paso al límite. Una novedad importante es que Cousin reconoce la necesidad de un símbolo para expresar el límite, pero no hace nada al respecto.

Roger Martin (1741 - 1811) publicó un libro de texto *Éléments de Mathématiques* (1781) con igual propósito que Cousin. La definición de límite de Martin es más precisa:

> Por el límite de una cantidad variable se entiende el valor o estado hacia el cual ella siempre tiende conforme varía, sin alcanzarlo nunca; pero al cual, no obstante, puede aproximarse de manera que difiera de él por una cantidad menor que cualquier cantidad dada.

La condición de pequeñez de la diferencia está formulada en la forma que después sería la usual, además, distingue entre variable y valor constante.

En 1784 la Academia de Berlin, cuyo director era Lagrange, anunció la convocatoria de un premio para "una teoría clara y precisa de lo que se llama el infinito en matemáticas". El propósito de la Academia era eliminar el uso de los infinitesimales:

> Es bien sabido que la geometría superior emplea regularmente lo *infinitamente grande* y lo *infinitamente pequeño*... La Academia, en consecuencia, desea una explicación de cómo es posible que se hayan conseguido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios, así como... un principio verdaderamente matemático que pueda sustituir correctamente al del infinito.

El premio fue concedido en 1786 a Simon-Antoine-Jean L'Huilier (1750 - 1840) por su ensayo *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* en el cual L'Huilier desarrollaba una teoría de límites. Su definición de límite es:

> Sea una cantidad variable, siempre menor o siempre mayor que una propuesta cantidad constante; pero de la cual puede diferir menos que cualquier propuesta cantidad menor que ella misma: esta cantidad constante se dice que es el límite por exceso o por defecto de la cantidad variable.

La novedad aquí está en los conceptos de "límite por exceso" y "límite por defecto". Al introducir esta distinción, L'Huilier observaba que hasta entonces no se había tenido en cuenta el hecho de que la aproximación al límite puede realizarse tanto desde una variable con valores crecientes como desde una variable con valores decrecientes. Por ello, L'Huilier introduce los conceptos de *límite por la derecha* y de *límite por la izquierda*.

En esta obra es donde, por primera, se usa el símbolo "$\lim$." (con el punto, como si fuera una abreviación de "límite") para representar el límite, aunque L'Huilier no lo hace de una forma regular.

El principal logro de L'Huilier fue extender la aplicabilidad del concepto de límite. Mientras que sus predecesores habían dado solamente un par de reglas básicas, él realizó un desarrollo

más sistemático, probando las reglas del producto y del cociente para límites, y obteniendo la regla de la derivada de un producto por medio de límites.

En esta exposición estoy siguiendo muy de cerca el excelente libro de Schubring [14]. Este autor hace un notable descubrimiento. Se trata de un ensayo de 100 páginas, titulado *Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducçaõ ao Methodo das Fluxões*, que fue publicado por la Academia de Ciencias de Lisboa en 1794, aunque su autor Francisco de Borja Garção Stockler (1759 - 1829) lo había presentado ya en 1791. Stockler nació en Lisboa, su padre era alemán y su madre portuguesa. Estudió la carrera militar y también matemáticas en la Universidad de Coimbra. Desarrolló una gran actividad tanto política como científica. La importancia del citado libro de Stockler es que contiene el primer intento de una presentación algebraica del concepto de límite. Stockler tenía un excelente conocimiento de la literatura matemática de su época, y en su libro se apoya precisamente en los autores que hemos citado anteriormente. Pero Stockler aventaja ampliamente a sus fuentes al separar el concepto de límite del concepto geométrico, algebraizándolo tanto para variables como para funciones. Además, es un pionero en el uso de desigualdades. Su definición de límite es la siguiente:

> Una cantidad constante es llamada "Límite" de una variable si la última puede ir aumentando o disminuyendo – aunque sus valores nunca lleguen a ser igual al de la constante – da tal forma que puede aproximar la constante tanto que la diferencia llega a ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que esta pueda haber sido escogida.

La definición es parecida a la de Martin, aunque hay un mayor énfasis en que el límite es un valor constante. Stockler también usa los conceptos de límites por la derecha y por la izquierda de L'Huilier.

Debemos notar que todas estas definiciones de límite que estamos dando se refieren a variables y que dichas variables suelen interpretarse como cantidades geométricas (áreas, longitudes de arco, medidas de ángulos, etc.). Además, una "cantidad constante" es interpretada generalmente como una cantidad positiva. Con frecuencia se considera que el cero tiene un carácter especial y se dan definiciones específicas para tenerlo en cuenta. Precisamente, eso es lo que hace Stockler introduciendo el concepto de *"variable sin límite de disminución"* con el significado de una variable con límite cero. De esta forma, también evita usar infinitésimos. Stockler establece como un resultado fundamental que

> Toda cantidad capaz de un límite, tiene necesariamente que ser igual a su límite, más o menos una cantidad variable sin límite de disminución.

Stockler desarrolla todo un álgebra de límites y no se limita a las operaciones de suma, producto y cociente. He aquí una muestra:

> Una potencia a^x, donde $a < 1$ es una constante y x una variable con valores positivos y sin límite de aumento, forma una sucesión nula.

Stockler explica el uso del símbolo "Lim." para representar límites y lo emplea de forma operativa para permutar límites. Por ejemplo, si $b = \text{Lim. } x$ y a es constante, Lim. $(a^x) = a^b$.

Stockler no considera solamente límites de variables sino también de funciones. De forma explícita establece la permutabilidad del límite con una función:

> El límite de cualquier función Fx de una variable x que es capaz de (tiene) límite, es igual al valor homólogo por la función de su límite.

Simbólicamente, Stockler expresa el teorema como sigue: Para $a = \text{Lim.}\, x$, se sigue que $\text{Lim.}\, Fx = Fa$.

5.3.4. Cauchy y su *Cours D'Analyse* de 1821

A principios del siglo XIX, parecía cada vez más necesario consolidar la enorme cantidad de resultados que ya se habían obtenido usando las técnicas precariamente fundamentadas del cálculo. Había llegado el momento en que se disponía de las herramientas necesarias para desvelar las sutilezas del concepto de límite, cuya lenta y trabajosa evolución a lo largo del siglo XVIII acabamos de ver. Lo que se necesitaba era dar definiciones precisas, simbólicas y operativas, que no estuvieran basadas en intuiciones geométricas ni cinemáticas. Para ello, había que precisar las expresiones vagas que solían usarse, al estilo de "aproximarse más que una cantidad dada, por pequeña que ésta sea", y dotarlas de un significado matemático preciso que pudiera ser usado para dar demostraciones. Lo que se necesitaba era traducir las definiciones verbales de límite mediante el álgebra de desigualdades que en esa época ya se había desarrollado. Esto puede parecer fácil visto desde nuestra perspectiva actual, pero no lo era en absoluto.



Figura 5.10. Cauchy

Si vuelves a leer la definición de límite (4.32), puedes comprobar lo abstracta que es: no queda nada en ella de la intuición inicial con la que Newton imaginaba sus "razones últimas". Es una definición "estática" y todo en ella es aritmética: valor absoluto, desigualdades... ¡no contiene ninguna igualdad! Ganamos rigor a costa de la intuición. Quien realizó la hazaña de fundamentar con rigor el cálculo sobre el concepto de límite fue Augustin - Louis Cauchy (1789 - 1857). Nos vamos a centrar aquí exclusivamente en este aspecto de su obra, de la que nos ocuparemos con más detalle en un capítulo posterior. Conviene, no obstante decir, que hay interpretaciones muy distintas de la obra de Cauchy. En particular, se ha escrito mucho sobre el uso que Cauchy hace de los infinitésimos. Creo que la documentada exposición que hace Schubring en [14] es muy convincente. Su tesis es que Cauchy, por su propia voluntad, nunca hubiera dejado entrar a los infinitésimos en sus libros, pero que se vio en la necesidad de hacerlo por la presión del entorno de l'École Polytechnique donde desempeñaba su labor docente. De todas formas, su concepto de infinitésimo, como veremos enseguida, no es el de una cantidad no nula pero infinitamente pequeña. En su *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821), Cauchy empieza exponiendo su concepto de número, de cantidad y seguidamente, en la página 19, aparecen las siguientes definiciones:

> Se llama cantidad *variable* aquella que se considera debe recibir sucesivamente varios valores diferentes unos de otros.[...] Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que acaban por diferir de él tan poco como se quiera, éste último es llamado el *límite* de todos los otros.
>
> [...] Cuando los valores numéricos (valores absolutos) sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que quedan por debajo de todo número dado, esta variable recibe el nombre de *infinitésimo* o de cantidad *infinitamente pequeña*. Una variable de esta naturaleza tiene por límite a cero.

> Cuando los valores numéricos (valores absolutos) sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que permanecen por encima de todo número dado, se dice que esta variable tiene por límite el *infinito positivo*, indicado por el signo ∞, cuando se trata de una variable positiva, y el *infinito negativo*, indicado por la notación $-\infty$, cuando se trata de una variable negativa.

Llama la atención en esta definición la idea repetida de "sucesivos valores" que algunos autores interpretan como si Cauchy considerara a las cantidades variables como sucesiones. Aunque sigue siendo una definición verbal, es mucho más precisa que las anteriores y lo importante es la forma en que Cauchy la interpreta por medio del álgebra de desigualdades. Podemos hacernos una idea de la forma de trabajar de Cauchy considerando el siguiente resultado que aparece en la página 54 del *Cours d'Analyse*. Traduzco y hago algunos comentarios que van en cursiva y entre paréntesis.

Teorema I (Cauchy - Cours d'Analyse, p.54). Si para valores crecientes de x, la diferencia

$$f(x+1)-f(x)$$

converge hacia un cierto límite k, la fracción

$$\frac{f(x)}{x}$$

convergerá al mismo tiempo hacia el mismo límite.

Demostración. Supongamos para empezar que la cantidad k tenga un valor finito, y designemos por ε un número tan pequeño como se quiera. Puesto que los valores crecientes de x hacen converger la diferencia

$$f(x+1)-f(x)$$

hacia el límite k, se podrá dar al número h un valor suficientemente grande para que, siendo x igual o mayor que h, la diferencia correspondiente esté constantemente comprendida entre los límites

$$k-\varepsilon, \qquad k+\varepsilon.$$

(*Este comienzo es impecable y nosotros lo haríamos exactamente igual. Con nuestras notaciones actuales, la hipótesis es que*

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=k.$$

Por tanto, dado $\varepsilon>0$, *existe* $h>0$ *tal que para todo* $x\geqslant h$ *se verifica que* $|f(x+1)-f(x)-k|<\varepsilon$. *Eso es exactamente lo que escribe Cauchy.*)

Supuesto esto, si se designa por n un número entero cualquiera, cada una de las cantidades

$$\begin{array}{l} f(h+1)-f(h)\\ f(h+2)-f(h+1)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f(h+n)-f(h+n-1) \end{array}$$

y, en consecuencia, su media aritmética, a saber

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$$

se encontrará comprendida entre los límites $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$. Se tendrá pues

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\alpha$$

siendo α una cantidad comprendida entre los límites $-\varepsilon$, $+\varepsilon$. Sea ahora

$$h + n = x$$

La ecuación precedente se convertirá en

$$\frac{f(x) - f(h)}{x - h} = k + \alpha, \tag{5.2}$$

y se concluirá

$$\begin{aligned} f(x) &= f(h) + (x - h)(k + \alpha) \\ \frac{f(x)}{x} &= \frac{f(h)}{x} + \left(1 - \frac{h}{x}\right)(k + \alpha) \end{aligned} \tag{5.3}$$

(*Hasta aquí, nada que objetar. Todo es correcto.*)



Además, para hacer crecer indefinidamente el valor de x, será suficiente hacer crecer indefinidamente el número entero n sin cambiar el valor de h. Supongamos, en consecuencia, que en la ecuación (5.3) se considera h como una cantidad constante, y x como una cantidad variable que converge hacia el límite ∞. Las cantidades

$$\frac{f(h)}{x}, \qquad \frac{h}{x},$$

encerradas en el segundo miembro, convergerán hacia el límite cero, y el propio segundo miembro hacia un límite de la forma

$$k + \alpha,$$

α estando siempre comprendida entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$. Por consiguiente, la razón

$$\frac{f(x)}{x}$$

tendrá por límite una cantidad comprendida entre $k - \varepsilon$ y $k + \varepsilon$. Debiendo subsistir esta conclusión, cualquiera que sea la pequeñez del número ε, resulta que el límite en cuestión será precisamente igual a la cantidad k. En otras palabras, se tendrá

$$\lim \frac{f(x)}{x} = k = \lim[f(x + 1) - f(x)]. \tag{5.4}$$

(*Seguidamente, Cauchy pasa a considerar los casos en que $k = \infty$ y $k = -\infty$.*) □

Esta demostración es notable, por su rigor y también porque *no es correcta*. Te daré un contraejemplo en un ejercicio. ¿Serías capaz de explicar a Cauchy dónde está el error en su razonamiento? Por supuesto, lo que interesa aquí es la forma en que Cauchy traduce los conceptos de límite por medio de desigualdades. El error es anecdótico, además, cuando Cauchy emplea este resultado lo hace siempre en casos en que la tesis es correcta; por ejemplo, para la función $\log x$,se tiene que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\log(x+1) - \log(x)\big) = 0$ y, por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ lo cual es correcto. Si hasta el mismo Cauchy se equivocaba en cosas aparentemente fáciles, no te extrañes si a ti te cuesta trabajo entender bien la definición de límite, esa experiencia la hemos tenido todos los que hemos estudiado Análisis.

Durante el siglo XVIII, el concepto de continuidad no había merecido nada más que una esporádica atención, y siempre había sido considerado desde un punto de vista filosófico, más como una ley de la naturaleza que como un concepto propiamente matemático. Generalmente la continuidad de una función se entendía en el sentido de Euler, y significaba que dicha función

estaba definida por una única expresión analítica. En su *Cours d'Analyse*, Cauchy define el concepto de función continua y, lo que es notable, de función discontinua; y su definición es realmente muy minuciosa. Dice así:

> Sea $f(x)$ una función de la variable x, y supongamos que, para cada valor de x comprendido entre ciertos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor de x comprendido entre estos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá por incremento la diferencia
>
> $$f(x+\alpha)-f(x)$$
>
> que dependerá a la vez de la nueva variable α y del valor de x. Dicho esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, función *continua* de esta variable, si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico (valor absoluto) de la diferencia
>
> $$f(x+\alpha)-f(x)$$
>
> decrece indefinidamente con el de α. En otras palabras, *la función $f(x)$ permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre estos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función.*
>
> Se dice también que la función $f(x)$ es, en un entorno de un valor particular atribuido a la variable x, función continua de esta variable, siempre que ella sea continua entre dos límites de x, por cercanos que estén, que encierren al valor considerado. Finalmente, cuando una función deja de ser continua en el entorno de un valor particular de la variable x, se dice entonces que ella se hace *discontinua* y que para este valor particular de x hay una *solución de continuidad*.

Cauchy da realmente dos definiciones; primero define lo que nosotros llamaríamos "continuidad en un intervalo" y, después, la continuidad puntual. La primera definición ha sido interpretada en el sentido de que lo que Cauchy entiende por continuidad es lo que ahora llamamos "continuidad uniforme".

Seguidamente a esta definición, Cauchy pasa a estudiar la continuidad de las funciones elementales, considerando en cada caso, los límites entre los que cada función es continua. Después demuestra el teorema de los valores intermedios (teorema de Bolzano) del cual da dos demostraciones. Una que se apoya de forma decisiva en la intuición geométrica y, en una nota al final del texto, otra, que él califica de "puramente analítica", que consiste en el método de bisección, en la que Cauchy usa, sin demostración ni comentario, que una sucesión monótona acotada es convergente, propiedad que equivale a la completitud del sistema de los números reales.

El citado texto de Cauchy, así como los libros *Résumé des leçons sur le Calcul Infinitésimal* (1823) y *Leçons sur le Calcul Différentiel* (1829), en los que se recogen los cursos impartidos por Cauchy en la École Polytechnique durante los años precedentes, tuvieron una gran influencia y establecieron nuevas exigencias de rigor. En el cálculo de Cauchy los conceptos de función y de límite son los conceptos fundamentales.

5.3.5. El innovador trabajo de Bolzano



Figura 5.11. Bolzano

Es obligado citar a Bernhard Bolzano (1781 - 1848), matemático, lógico y filósofo, profesor en la Universidad de su ciudad natal, Praga, desde 1805 a 1820. Bolzano, cuyas obras completas comprenderán, cuando terminen de editarse, alrededor de 140 volúmenes, fue un innovador en todos los campos que trabajó. En sus trabajos matemáticos anticipó muchos de los conceptos que posteriormente redescubrieron y desarrollaron matemáticos como Cauchy, Weierstrass o Cantor. Debido a su relativo aislamiento en la ciudad de Praga, en una época en la que el centro de toda la producción matemática estaba en París, la obra matemática de Bolzano fue poco conocida y no tuvo la influencia que merecía por su rigor y profundidad.

Por lo que a la continuidad de una función se refiere, Bolzano publicó en 1817 un pequeño libro de 60 páginas *Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign there lies at least one real root of the equation* [13], en el que, entre otras cosas, demuestra el teorema que ahora lleva su nombre. Bolzano empieza razonando que las demostraciones conocidas de ese teorema eran inapropiadas. La claridad de ideas con que se expresa es muy llamativa (traduzco de [13]):

> No obstante, un examen más cuidadoso muestra muy pronto que ninguna de estas pruebas puede considerarse adecuada.
>
> I. El tipo de demostración más usual depende de una verdad pedida en préstamo a la geometría, a saber, que toda línea continua de curvatura simple cuyas ordenadas son primero positivas y después negativas (o recíprocamente) necesariamente debe intersecar en algún lugar al eje de abscisas en un punto comprendido entre aquellas ordenadas. Ciertamente, nada hay que objetar respecto a la corrección, ni tampoco a la obviedad, de esta proposición geométrica. Pero está claro que es una intolerable ofensa contra el método correcto, deducir verdades de las matemáticas puras (o generales, i.e. aritmética, álgebra, análisis) a partir de consideraciones que pertenecen simplemente a una parte aplicada (o especial), a saber, la geometría.
>
> [. . .] Consideremos ahora la razón objetiva por la que una línea en las circunstancias antes mencionadas interseca el eje de abscisas. Sin duda, todo el mundo verá enseguida que esta razón descansa en nada más que en el asentimiento general, como consecuencia del cual toda función continua de x que sea positiva para algún valor de x, y negativa para otro, debe ser cero para algún valor intermedio de x. Y ésta es, precisamente, la verdad que debe ser probada.
>
> II. No menos reprobable es la demostración que algunos han construido a partir del concepto de la continuidad de una función con la inclusión de los conceptos de tiempo y movimiento. [. . .] Esto es adicionalmente ilustrado por el ejemplo del movimiento de dos cuerpos, uno de los cuales está inicialmente detrás del otro y posteriormente delante del otro. Necesariamente se deduce que en un tiempo debe haber estado al lado del otro. Nadie negará que los conceptos de tiempo y movimiento son tan extraños a la matemática general como el concepto de espacio. No obstante, si estos conceptos fueran introducidos solamente por motivos de claridad, no tendríamos nada en contra de ello. [. . .] Por tanto, debe observarse que no consideramos que los ejemplos y aplicaciones disminuyan en lo más mínimo la perfección de una exposición científica. De otra manera, estrictamente exigimos sólo esto: que los ejemplos nunca sean empleados como argumentos en lugar de las demostraciones, y que la esencia de una deducción nunca esté basada sobre el uso meramente metafórico de frases o sobre sus ideas relacionadas, de forma que la deducción misma quedaría vacía tan pronto como éstas fueran cambiadas.

Es difícil expresarse con más claridad que como lo hace Bolzano. Su definición de continuidad, en el citado trabajo, es como sigue:

> Una función $f(x)$ varía según la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites, significa exactamente que: si x es algún tal valor, la diferencia $f(x+\omega) - f(x)$ puede ser hecha más pequeña que cualquier cantidad dada, supuesto que ω puede ser tomado tan pequeño como queramos.

Seguidamente, Bolzano establece un teorema previo cuyo asombroso enunciado es como sigue:

> Si una propiedad M no pertenece a todos los valores de una variable x, pero sí pertenecen todos los valores que son menores que un cierto u, entonces existe siempre una cantidad U que es la mayor de aquellas de las cuales puede afirmarse que toda más pequeña x tiene la propiedad M.

Comprendes por qué califico de "asombroso" ese enunciado, ¿verdad? ¡Es la propiedad de extremo inferior!¡En el año 1817, 55 años antes de que Dedekind y Cantor publicaran sus teorías de los números reales!

El conocido historiador de las matemáticas Ivor Grattan - Guinness, en un polémico trabajo titulado *Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of Early Nineteenth Century* [9], expresa su opinión de que Cauchy conocía el trabajo de Bolzano pero nunca lo reconoció. Desde luego, ni en las numerosas obras de Cauchy, ni en su correspondencia particular, se ha encontrado ninguna referencia a Bolzano, por lo que la afirmación de Grattan - Guinness, como él mismo reconoce, no está sustentada en pruebas documentales.

5.3.6. Weierstrass nos dio los $\varepsilon - \delta$



Figura 5.12. Weierstrass

Una característica de los textos citados de Cauchy es que en ellos no hay ni una sola figura. Cauchy liberó al cálculo de sus ataduras geométricas, aunque todavía sus definiciones contenían términos imprecisos como "tan pequeño como queramos" y "disminuir indefinidamente hasta converger al límite cero", o ideas de movimiento como "variable que se acerca a un límite" por no hablar de sus "infinitamente pequeños". Para seguir avanzando era necesario acabar de una vez con las distinciones entre número y cantidad. Los números reales todavía eran considerados geométricamente y no se habían establecido sus propiedades de forma explícita. El cero y los números negativos eran vistos aún por muchos matemáticos como algo de naturaleza diferente a los números positivos.

En definitiva, debía concretarse el significado de expresiones como "cantidad variable" y "variable continua". También era preciso separar la idea de función de su representación analítica concreta, lo cual, como ya vimos en el Capítulo 2, fue hecho por Dirichlet en 1837 con su definición general de función como correspondencia arbitraria. Finalmente, pero no menos importante, estaban las cuestiones referentes a la convergencia de sucesiones y series numéricas y funcionales, aún mal comprendidas en la época de Cauchy, de las que nos ocuparemos en otro lugar.

En los cincuenta años que van de 1830 a 1880 se lograron desentrañar todas estas cuestiones fundamentales gracias, principalmente, a los trabajos de Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Dedekind y Cantor. Ya conocemos una parte de este complejo proceso, la que culmina en 1872 con la fundamentación del sistema de los números reales por Dedekind y Cantor.

Fue Karl Weierstrass (1815 - 1897) quien llevó a sus últimas consecuencias el proceso de "aritmetización del Análisis". Weierstrass era un desconocido profesor de instituto, cuando en 1854 publicó un trabajo sobre las funciones abelianas que causó sensación en la comunidad matemática. Poco después, en 1856, Weierstrass ya era profesor de la Universidad de Berlín. Los cursos que Weierstrass impartió en Berlín durante más de treinta años atrajeron a numerosos matemáticos de toda europa. Discípulos suyos fueron, entre muchos otros menos conocidos, George Cantor (1845 - 1918), Sonya Kovalevsky (1850 - 1891), Max Planck (1858 - 1947) y David Hilbert (1862 - 1943).

Weierstrass estaba convencido de que el Análisis debía ser liberado de los razonamientos geométricos y de los conceptos intuitivos de espacio, tiempo y movimiento y debía ser fundamentado sobre los enteros positivos. Acometió la tarea de revisar radicalmente los conceptos fundamentales del Análisis y a este fin dedicó algunos de sus cursos. Entre otras cosas, desarrolló en ellos una teoría aritmética de los números reales parecida a la de Cantor. Aunque Weierstrass no publicó mucho, su influencia fue enorme y sus conferencias magistrales fueron difundidas por toda Europa por sus numerosos alumnos. Weierstrass es considerado como el más grande analista del último tercio del siglo XIX y se le ha llamado "el padre del análisis moderno". Más adelante tendremos ocasión de exponer algunas de sus contribuciones.

Por lo que al concepto de límite funcional se refiere, Weierstrass tradujo por medio de desigualdades y de valores absolutos las definiciones verbales de límite y de continuidad dadas por Cauchy y Bolzano. Para Weierstrass, una variable solamente es un símbolo que sirve para designar cualquier elemento del conjunto de valores que se le pueden atribuir. Una variable continua es aquella cuyo conjunto de valores no tiene puntos aislados. La definición de límite dada por Weierstrass, tal como la recogió en sus notas el matemático H.E. Heine (1821 - 1881) es la siguiente:

> Se dice que L es el límite de una función $f(x)$ para $x = x_0$ si, dado cualquier ε, existe un δ_0 tal que para $0 < \delta < \delta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \delta) - L$ es menor en valor absoluto que ε.

Cuando una teoría ha sido desarrollada, llega el momento del rigor. Así el concepto de límite, fundamental en cálculo porque en él se basan los de continuidad, derivada, integral y los distintos tipos de convergencia, y es el concepto que confiere al cálculo su característica distintiva, solamente pudo ser expresado de forma rigurosa (según nuestros criterios actuales) en el último tercio del siglo XIX, después de haberse estado usando, de forma más o menos disfrazada por los infinitésimos y otros conceptos afines como el movimiento, durante doscientos años. Curiosamente, la letra griega ε, que usaba Cauchy con un significado de "error", se ha convertido en el paradigma de la precisión en nuestras actuales definiciones heredadas de Weierstrass.

La flechita en la notación para límites, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, fue introducida por G.H. Hardy (1877 - 1947) en su notable libro *A Course of Pure Mathematics* (1908).

5.3.7. Ejercicios propuestos

171. Considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 - x + E(x)}$$

Donde, como de costumbre, $E(x)$ es la parte entera de x. Estudia los límites en $+\infty$ de las funciones $f(x+1) - f(x)$ y $\dfrac{f(x)}{x}$.

5.4. Breve historia del infinito

Es conocida la exclamación de David Hilbert *¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre*. Es verdad, el infinito atrae poderosamente nuestra imaginación. ¿Quién no ha gritado en su infancia para devolver un agravio "*...y tú diez veces más... ¡infinitas veces más que yo!*"? Es difícil imaginar que el tiempo tuviera un comienzo y también que el espacio sea finito, porque no podemos pensar en una frontera para el espacio tras de la cual no exista más espacio, ni un origen para el tiempo antes del cual no hubiera tiempo. Cualquier respuesta a estas preguntas conduce siempre a nuevas preguntas. Un error típico consiste en creer que si algo fuera infinito debería contener todas las cosas, algo así como el Aleph borgiano. Matemáticamente, es claro que no tiene por qué ser así: los números pares son infinitos y no son todos los números. Algo infinito tampoco tiene por qué ser necesariamente muy grande. El Aleph de la narración de Borges es una pequeña esfera, un conjunto fractal contiene infinitas copias de sí mismo, el veloz Aquiles permanece corriendo sin alcanzar jamás a la tortuga que le lleva unos pocos metros de ventaja....

5.4.1. La idea de infinito en la filosofía y la matemática Griegas

5.4.1.1. Las aporías de Zenón de Elea

¡Zenón, cruel Zenón, Zenón de Elea!
Me has traspasado con la flecha alada.
Que, cuando vibra volando, no vuela.
Me crea el son y la flecha me mata.
¡Oh sol, oh sol! ¡Qué sombra de tortuga
Para el alma: si en marcha Aquiles, quieto!
Paul Valery

Un griego llamado Zenón, del que se sabe muy poco y de forma indirecta a través del *Parménides* de Platón, cuyo nacimiento se fecha hacia el año 490 a.C en la ciudad de Elea en el sur de Italia, y que fue discípulo de Parménides, sigue manteniendo desde hace 2300 años su permanente desafío a la razón.

Te recuerdo que, según Parménides, el ser es necesariamente uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable. Los cambios, transformaciones y multiplicación de los seres, son meras

apariencias a las cuales no responde realidad alguna. La filosofía de Parménides fue muy criticada porque choca con nuestras creencias más básicas sobre la realidad.

Zenón ideó sus paradojas o aporías (proposiciones sin salida lógica) para desacreditar a quienes negaban las ideas de Parménides, y afirmaban la realidad del cambio y la pluralidad de los seres. Aristóteles califica a Zenón de "inventor de la dialéctica", una elaborada forma de razonamiento que consiste en probar al oponente que de sus ideas se deducen consecuencias inaceptables. Los argumentos de Zenón son realmente del tipo "reducción al absurdo": se acepta provisionalmente una hipótesis y, razonando correctamente a partir de ella, se llega a una conclusión inaceptable, lo que obliga a rechazar la hipótesis inicial.

Vamos a exponer, en lenguaje actual, tres de las paradojas de Zenón que van dirigidas contra las dos teorías del movimiento sostenidas en la antigüedad, las cuales dependen, claro está, de la supuesta naturaleza del tiempo y del espacio. Debes tener en cuenta que Zenón no niega el movimiento sino su inteligibilidad; la afirmación de que "el movimiento se demuestra andando" no refuta a Zenón, su desafío no es a la experiencia sensible sino a la razón.

Las dos primeras paradojas parten del supuesto de que el espacio y el tiempo son *infinitamente divisibles* y el movimiento continuo y uniforme.

La dicotomía.

> Para que un móvil pueda llegar a un punto dado, debe recorrer primero la mitad de la distancia; pero antes de alcanzar esa mitad debe recorrer la mitad de la mitad. Y así sucesivamente, "ad infinitum". De este modo para alcanzar completamente cualquier distancia tendría que recorrer un número infinito de divisiones, lo cual es imposible en un tiempo finito.

Aquiles y la tortuga.

> Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . . . De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Ambos argumentos están relacionados. Según la Dicotomía, para que haya movimiento debe haber un comienzo, pero no hay una distancia mínima con la que empezar; por tanto el movimiento no puede empezar, luego no hay movimiento. Según Aquiles, un móvil para alcanzar su destino debe cubrir primero la mitad de la distancia que lo separa, pero antes deberá recorrer la mitad de esa mitad, y así sucesivamente; luego debe recorrer infinitas divisiones lo cual es imposible en tiempo finito, por tanto nunca alcanzará su destino. Es decir, una vez empezado, el movimiento no puede parar.

La tercera paradoja, que se refiere a una flecha lanzada al aire, supone que el espacio y el tiempo están formados por *unidades mínimas indivisibles* y el movimiento es una sucesión de diminutos saltos consecutivos.

La flecha.

> En un instante indivisible de tiempo la flecha debe permanecer quieta, pues si se moviera el instante contendría unidades de tiempo más pequeñas en las que dicho movimiento tendría lugar en contra de lo supuesto. Por tanto, en cada instante la flecha está quieta y, como el tiempo se compone de instantes, la flecha está siempre quieta y el movimiento no tiene lugar.

La influencia de las aporías de Zenón en filosofía, lógica y matemáticas ha sido notable y se ha escrito y se sigue escribiendo mucho sobre ellas ([12] es una de las referencias más interesantes). Más adelante veremos algunos intentos, bastante ingenuos, de resolver las dos primeras por medio de la teoría de series. Despidamos a Zenón con una cita de Borges.

> *Zenón es incontestable, salvo que confesemos la idealidad del espacio y del tiempo. Aceptemos el idealismo, aceptemos el crecimiento concreto de lo percibido, y eludiremos la pululación de abismos de la paradoja. ¿Tocar a nuestro concepto del universo, por ese pedacito de tiniebla griega?, interrogará mi lector.*
>
> J.L. Borges, "La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga".

5.4.1.2. Atomismo y divisibilidad infinita

El filósofo Anaximandro (*ca.*610 - 546 a.C.) introdujo el infinito en la filosofía Griega. Afirmó que el principio de todas las cosas existentes es el *ápeiron*. Etimológicamente *ápeiron* significa *lo sin límites*. Según Anaximandro, el *ápeiron* es infinito, porque provee la energía para que en el mundo no cese la generación y corrupción, e indeterminado, porque no es concreto y no se identifica con ninguno de los elementos agua, aire, tierra, fuego. Podemos interpretarlo como la fuente de energía primordial que garantiza la transformación y la unidad del cosmos.

En el período que separa a Zenón de Elea de Aristóteles surgió la filosofía del atomismo, iniciada por Leucipo (*ca.* 450 - 420 a.C.) y desarrollada por Demócrito (*ca.* 460 - 370 a.C.). El atomismo es una filosofía materialista que se ha interpretado como una respuesta al idealismo de la Escuela Eleática (Parménides, Zenón). Los atomistas mantienen que hay dos principios fundamentales: los átomos y el vacío. Los átomos son indivisibles e invisibles, infinitos en número y de diversas formas y tamaños, perfectamente sólidos, indestructibles y permanentes. Las substancias materiales son producidas por la unión y separación de esos átomos moviéndose en el vacío. El movimiento se produce por la reordenación de los átomos entre sí; según Aristóteles, los atomistas reducen todo cambio a un mero cambio de lugar. Los atomistas admiten la pluralidad y el movimiento y niegan la infinita divisibilidad del espacio y la materia.

El atomismo fue cuestionado por Aristóteles (384 - 322 a.C.), que realizó un análisis sistemático del continuo. Aristóteles divide las cantidades en discretas y continuas. Los números y el lenguaje hablado son discretas y las líneas, superficies, sólidos, tiempo y espacio son continuas. La respuesta a la pregunta de si una magnitud continua (un *continuo*) es permanentemente divisible en partes cada vez más pequeñas, o hay un límite más allá del cual no puede proseguirse el proceso de división, depende de la naturaleza del infinito. Aristóteles dedica el Libro III de su *Física* a un estudio sistemático del infinito. Considera que el estudio del infinito forma parte del estudio de la naturaleza, pues lo característico de ésta es el movimiento y el cambio, y el movimiento es pensado como algo continuo, y lo que es continuo es definido con frecuencia como algo infinitamente divisible.

Primero, dice Aristóteles, *"hay que examinar en general si es o no es posible que haya un cuerpo sensible infinito"*. Después del correspondiente estudio, llega a la conclusión de que *"no existe un cuerpo que sea actualmente infinito"*. Pero *"la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles"*.

Aristóteles expone algunas razones que apoyan la creencia en la realidad del infinito y considera los distintos sentidos de dicho término. Entre las primeras: la infinitud del tiempo,

la divisibilidad de las magnitudes y la infinitud de los números; entre los segundos: lo que no puede ser recorrido o se puede recorrer pero sin llegar a un término.

> Es también evidente que no es posible que lo infinito exista como un ser en acto o como una substancia y un principio. Luego lo infinito existe como un atributo.

Lo infinito es un atributo que puede predicarse de la cantidad o de determinados procesos; especialmente, los procesos de adición y de división. Aristóteles, habla en ese sentido del infinito por adición y el infinito por división o la divisibilidad infinita de un continuo.

> Ahora bien, el ser se dice o de lo que es en potencia o de lo que es en acto, mientras que el infinito es o por adición o por división. Y ya se ha dicho que la magnitud no es actualmente infinita [...] Nos queda, entonces, por mostrar que el infinito existe potencialmente.
>
> Pero la expresión "existencia potencial" no se debe tomar en el sentido en que se dice, por ejemplo, "esto es potencialmente una estatua, y después será una estatua", pues no hay un infinito tal que después sea en acto. Y puesto que el ser se dice en muchos sentidos, decimos que el infinito "es" en el sentido en que decimos "el día es".

Aristóteles distingue, pues, dos clases de infinito: el infinito como una totalidad completa, que llama el infinito actual y cuya existencia niega; y el infinito potencial, que concibe como un proceso secuencial de adición o de subdivisión sin final. Lo metáfora del día es muy apropiada, pues el *ser* de un día es un *estar siendo* de forma sucesiva, de manera que en ningún momento el día queda realizado plenamente como un todo. Análogamente, el infinito potencial nunca será plenamente realizado *pues no hay un infinito tal que después sea en acto*. La infinitud potencial es la forma usual en que concebimos el tiempo como una línea recta indefinidamente prolongable o la sucesión de los números que podemos ir formando por adición consecutiva de la unidad.

Esta concepción aristotélica del infinito se aceptó sin mayores cambios hasta el siglo XIX. Es una teoría que plantea bastantes dificultades, algunas de ellas consecuencia de las ideas sobre el espacio y el tiempo del propio Aristóteles, y otras internas a la propia teoría. La forma en que la existencia potencial del infinito se relaciona con su existencia como un proceso no es fácil de interpretar, pues si el infinito actual nunca es posible, es preciso que haya un sentido en el cual un proceso que está ocurriendo en el presente mantenga su existencia potencial. Por otra parte, Aristóteles mantiene que el tiempo es infinito lo que, aparentemente, contradice la no existencia de infinitos actuales. Respecto al espacio, afirma que es finito y *"resulta entonces razonable pensar que no hay un infinito por adición que sea tal que pueda superar toda magnitud"*. Esto puede interpretarse como que Aristóteles niega la posibilidad, incluso potencial, de un infinito por adición de magnitudes. De todas formas, Aristóteles cree que la negación del infinito actual no afecta a los matemáticos:

> Esta argumentación no priva a los matemáticos de sus especulaciones por el hecho de excluir que el infinito por adición pueda recorrerse en acto. Porque no tienen necesidad de este infinito ya que no hacen uso de él, sino sólo, por ejemplo, de una línea finita que se prolongue tanto como ellos quieran.

Sobre todo esto se ha escrito y se sigue escribiendo mucho. Más interesante para nosotros es la relación del infinito con la divisibilidad infinita del continuo.

Los atomistas negaban la divisibilidad infinita. Su argumento era que si una magnitud continua fuera dividida en todo punto, entonces no quedaría nada o solamente quedarían puntos

sin extensión, porque en caso contrario el proceso de división podría proseguir. Pero, decían, si quedan puntos sin extensión, entonces no es posible recomponer la magnitud original a partir de ellos, pues por la agregación de puntos sin extensión no puede lograrse nunca una magnitud finita. Concluían que en cualquier caso la magnitud inicial se ha convertido en algo incorpóreo y, por tanto, algo que tenía existencia ha dejado de ser, lo cual, evidentemente, es un imposible.

Aristóteles defendía la divisibilidad infinita pero debía refutar el argumento atomista. Su solución es muy original, pues afirma que aunque una magnitud continua puede ser dividida en cualquier punto, no puede ser dividida en todo punto. Para Aristóteles, dividir un continuo en todos sus puntos es reducirlo a lo discreto. Mientras que un continuo tiene la propiedad de densidad, es decir, entre dos cualesquiera de sus puntos siempre hay otro punto del continuo, los puntos obtenidos, después de una división infinita actual de un continuo, serían adyacentes unos con otros, y esto implica que la propiedad de densidad se habría perdido. Pero si dividimos un continuo, lo que obtenemos son dos continuos cada uno de ellos con la propiedad de densidad. Por tanto, es imposible llegar, por divisiones sucesivas, a reducir un continuo a puntos. Así, Aristóteles afirma la divisibilidad infinita pero niega la divisibilidad en todo punto, con lo que el argumento atomista deja de tener valor.

Esta es una posible interpretación de los argumentos de Aristóteles sobre la divisibilidad infinita, que a veces son bastante oscuros y confusos. Además, como veremos más adelante, puede darse una interpretación matemática rigurosa de la misma.

Las matemáticas griegas evitan el infinito actual. Así, Euclides, considera rectas que pueden ser prolongadas cuanto se quiera, pero no “rectas infinitas”. Igualmente, al enunciar que los números primos son infinitos, lo expresa diciendo que *“Hay más números primos que cualquier cantidad de números primos propuesta”*. De esta forma evita considerar el infinito actual de los números primos.

En *Los Elementos* Euclides expone el *método de exhausción* (8.8.1) de Eudoxo de Cnido, que se utilizaba para calcular áreas (cuadraturas) de regiones planas. Es frecuente afirmar que este método consiste en una aproximación al área seguida de un proceso límite. No es así. Aunque su nombre sugiere “agotamiento” de una figura plana por polígonos inscritos, el método estaba basado en un razonamiento muy cuidadoso de doble reducción al absurdo (llamado razonamiento *apagógico*), precisamente para evitar la consideración de un infinito actual.

Mención aparte merece Arquímedes. Por una parte, probó en su obra *El arenario* que si el Universo estuviera completamente lleno de granos de arena, su número sería finito. Para lo cual desarrolla un sistema de numeración apropiado para manejar grandes números (para los griegos el número mayor era la miríada de miríadas, equivalente a 10^8) que le permite describir un número que, en base diez, tendría unos 80000 millones de millones de cifras. Pero también Arquímedes ideó métodos heurísticos[2] que están expuestos en su obra *El Método* (ver 8.8.1.2), descubierta en 1906, en la que explica cómo anticipó algunos de sus descubrimientos por medio de técnicas de equilibrio usando la ley de la palanca. En estas técnicas, Arquímedes hace un uso muy libre del infinito; por ejemplo, descompone áreas planas como sumas infinitas de segmentos, es decir, reduce un continuo a elementos indivisibles, con lo cual podrían estar de acuerdo los atomistas, pero no Aristóteles.

[2]Por *método heurístico* se entiende cualquier proceso que facilite anticipar un resultado. Son métodos que se apoyan en alguna forma de intuición que conduce a la formulación de conjeturas razonables, que después deben ser probadas con métodos científicos rigurosos

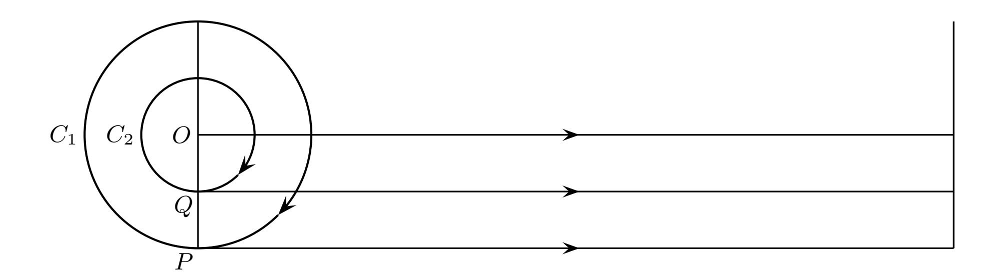


Figura 5.13. Rueda de Aristóteles

5.4.1.3. La rueda de Aristóteles

Así se conoce un interesante problema propuesto por Aristóteles en su *Mechanica*. Si un círculo de radio r gira sin deslizar sobre su tangente horizontal, al completar un ciclo habrá avanzado una distancia igual a $2\pi r$. Consideremos dos círculos C_1 y C_2, de radios r_1 y r_2, concéntricos, rígidamente unidos entre sí. Cada uno de dichos círculos puede avanzar girando sin deslizar sobre su tangente horizontal. Al estar rígidamente unidos, el movimiento de giro de un círculo obliga al otro círculo a girar de igual manera y, además, ambos círculos avanzarán la misma distancia, que será igual a la distancia recorrida por su centro común. Supongamos que el círculo C_1 gira sin deslizar un ciclo completo, en cuyo caso también C_2 gira un ciclo completo. El camino recorrido por C_1 es igual a $2\pi r_1$ que es la longitud de su circunferencia; y el camino recorrido por C_2 también es $2\pi r_1$, aunque la longitud de su circunferencia es $2\pi r_2 < 2\pi r_1$. Aristóteles vio en esto algo paradójico.

Desde un punto de vista cinemático no hay dificultad en explicar lo que sucede. Al girar C_1, con velocidad angular ω, hace girar igualmente a C_2 con igual velocidad angular. Pero también C_1, al avanzar, comunica a C_2 un movimiento de traslación de magnitud ωr_1. El movimiento de cada punto de la circunferencia de C_2 es por tanto la resultante de un movimiento circular simple de velocidad angular ω y de un movimiento de traslación horizontal de magnitud ωr_1. Es la magnitud mayor, $\omega r_1 > \omega r_2$, de esta componente de traslación la que hace posible que el círculo pequeño, aunque realiza el mismo número de ciclos que el grande, recorra igual camino que el grande.

Pero es ahora donde se plantea el problema. Es claro que ambos círculos giran continuamente, por lo que el punto de tangencia de la circunferencia de cada uno de ellos con la tangente horizontal, cambia también de manera continua. Por tanto, el hecho de que ambos círculos mantengan igual ritmo de avance no puede explicarse porque el círculo menor se deslice sobre su tangente pues tal cosa no sucede. Aquí tenemos la paradoja: ¿cómo es posible que los dos caminos sean iguales sin que se produzcan deslizamientos del círculo menor que compensen la diferencia?

Naturalmente, podemos suponer que el círculo que gira es el pequeño y obtenemos una situación similar a la antes descrita, en la que ahora los dos círculos recorren un camino que es igual a la longitud de la circunferencia del círculo pequeño, a pesar de que ambos realizan un ciclo completo.

Se trata de un problema entre cuyos diversos aspectos, todos ellos relacionados con la idea de infinito, podemos destacar:

- El problema del movimiento y la idea de continuidad.
- La estructura del continuo y la divisibilidad infinita.
- La correspondencia uno a uno entre los puntos de dos caminos de diferente longitud.

Aristóteles solamente consideró el problema como un ejemplo de un cuerpo que mueve a otro. Observó que era indiferente que los círculos fueran concéntricos y que podían suponerse tangentes exteriores, de forma que uno se mueve apoyándose contra el otro, en cuyo caso, dijo, es claro que el camino recorrido debe ser el del círculo que se mueve.

5.4.2. El infinito desde la Edad Media hasta el siglo XIX

5.4.2.1. El infinito en la Escolástica

Es sabido que las religiones lo contaminan todo de irrealidad. Después del triunfo de la Iglesia Católica, las discusiones sobre el infinito adquieren una orientación marcadamente teológica.

San Agustín (354 - 430), filósofo cristiano, admite el infinito actual como atributo de Dios, pero niega que Dios creara nada infinito. En su obra *La Ciudad de Dios* escribe refiriéndose a los números:

> Así que son desiguales entre sí y diferentes; cada uno es finito y todos son infinitos. ¿Y que sea posible que Dios todopoderoso no sepa los números por su infinidad, y que la ciencia de Dios llegue hasta cierta suma de números, y que ignore los demás, quién habrá que pueda decirlo, por más ignorante y necio que sea? [. . .] Y así que la infinidad de los números para la ciencia de Dios, que la comprende, no puede ser infinita.

En esa insólita cuadratura del círculo que fue la Escolástica, en su intento de conciliar la filosofía de Platón y Aristóteles con la revelación cristiana, destaca Santo Tomás de Aquino (*ca.* 1225 - 1274). La infinitud actual de Dios en todos los sentidos es un dogma Católico y Tomás de Aquino es una autoridad en tan delicada cuestión teológica. En su obra *Summa Contra Gentiles*, Capítulo 43, proporciona catorce argumentos breves para demostrar la infinitud de Dios, cada uno de ellos termina con la letanía *“Por tanto Dios es infinito”*.

5.4.2.2. Galileo y el infinito

Para encontrar ideas más interesantes sobre el infinito debemos referirnos a Galileo Galilei (1564 - 1642). En su obra pionera sobre la dinámica y estática de sólidos *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove science attenenti alla meccanica e i movimenti locali* (1638), Galileo expone sus ideas sobre el infinito.

Desde los tiempos de Aristóteles, la paradoja de los dos círculos había sido considerada por diversos estudiosos aunque sin avances destacables. Galileo, en la citada obra, realiza un detallado estudio de la misma y propone soluciones originales. Galileo observa que la circunferencia del círculo pequeño debe tocar con cada uno de sus puntos una sola vez la tangente horizontal y avanzar sobre ella una distancia mayor que su longitud. Galileo se pregunta cómo es posible que el círculo más pequeño recorra una distancia mayor que su circunferencia sin dar saltos. Antes de exponer el estudio de Galileo, debemos comentar las opiniones de su casi exacto contemporáneo Giovanni di Guevara (1561 - 1641). Sin duda, Guevara conoce las ideas

matemáticas de cantidades infinitesimales y de indivisibles que se estaban desarrollando en esta época. Guevara escribe en su obra *In Aristotelis Mechanicas commentarii* (1627)[3]:

> Ambos, el círculo conductor y el que es movido tocan sucesivamente todas las partes individuales indivisibles de la línea del plano con un número igual de sus propias partes indivisibles, pero con la diferencia de que cuando el círculo conductor las toca, las partes en contacto son iguales entre sí, mientras que cuando el círculo movido las toca, las partes correspondientes son diferentes. Pues el contacto igual de dos cantidades depende del ajuste exacto conjuntamente de iguales partes de ambas, de forma que puedan coexistir en el mismo lugar. Pero no puede darse este ajuste exacto conjunto cuando los caminos son desiguales, pues esta desigualdad de los caminos también está presente en los lugares de contacto...

Guevara indica que cuando el círculo menor es movido por el mayor, una parte más pequeña del círculo menor siempre está en contacto con una parte mayor de la horizontal, esto hace que dicho círculo avance más rápidamente y de esta forma se compensa la menor longitud del arco de circunferencia girado.

Galileo se pregunta, en la citada obra, por la constitución básica de la materia y si la cohesión de los sólidos puede explicarse por la existencia de diminutos vacíos entre partículas materiales y, más concretamente, si puede haber un número infinito de vacíos en una extensión finita. La Rueda de Aristóteles le parece un modelo matemático adecuado para estudiar este asunto.

Galileo empieza su estudio considerando, en vez de círculos, polígonos regulares concéntricos rígidamente unidos. Primero considera exágonos.

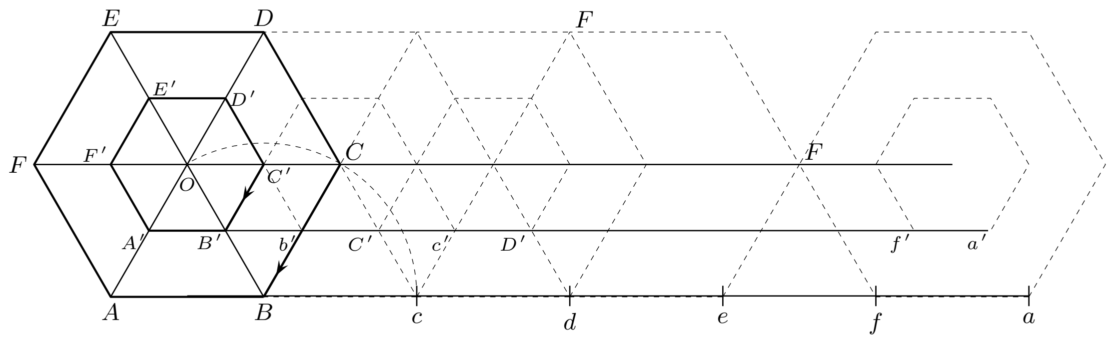


Figura 5.14. Exágonos de Galileo

Sometemos el exágono mayor a un giro de 60 grados con centro en el vértice B. Este giro lleva el vértice C al punto del mismo nombre, c, sobre la línea de base, y el centro O lo lleva a donde estaba el vértice C. Este giro lleva el lado $B'C'$ del exágono menor al segmento del mismo nombre $b'C'$ de la línea de base de dicho exágono, y al hacerlo deja en medio un segmento $B'b'$. Este proceso se repite con sucesivos giros de 60 grados con centros respectivos en los puntos c, d, e, f hasta completar un ciclo. El exágono mayor ha recorrido sobre su línea de base una distancia igual a su perímetro. El exágono menor avanza a saltos, pues en cada giro deja en medio un segmento de su línea de base con el que no entra en contacto ($B'b'$, $C'c'$...). El camino que dicho exágono recorre es su perímetro más los saltos correspondientes que, en

[3]Traduzco libremente una cita de Guevara recogida en el trabajo más completo que conozco sobre la rueda de Aristóteles [4], el cual estoy siguiendo muy de cerca en esta exposición

el caso considerado en la figura, sería igual a 5 veces y media el lado del exágono mayor. Por su parte, el centro recorre una distancia igual a 5 veces el lado del exágono mayor.

Es claro que conforme aumenta el número de lados, la longitud del lado del polígono mayor es cada vez más pequeña y las longitudes recorridas son cada vez más parecidas. En este punto, Galileo considera los círculos como polígonos con un número infinito de lados (un infinito actual, no potencial) y escribe:

> La distancia recorrida por el infinito número de lados continuamente distribuidos del círculo mayor es igualado por la distancia recorrida por el infinito número de lados del menor, pero, en el último caso, por la interposición de igual número de vacíos entre los lados. Y al igual que los lados no son finitos en número sino infinitos, igualmente los vacíos interpuestos no son finitos sino infinitos. Es decir, el número infinito de puntos sobre la línea recorrida por el círculo mayor son todos ellos ocupados (esto es, en el transcurso de la revolución de ese círculo han sido ocupados por un “lado” del círculo), pero sobre la recorrida por el círculo menor son parcialmente ocupados y parcialmente vacíos.

Otra paradoja estudiada por Galileo es la de la “equivalencia entre una circunferencia y un punto”. Para explicarla, consideremos un rectángulo formado por dos cuadrados iguales unidos por un lado común. Recortemos en este rectángulo una semicircunferencia de centro en la mitad del lado superior del rectángulo e igual radio. La figura que resulta de quitar dicha semicircunferencia al rectángulo se gira alrededor de su eje de simetría y se obtiene un sólido de revolución parecido a un cuenco. Supongamos ahora inscrito en dicho sólido un como circular recto cuya base coincide con la del cuenco y de altura igual a la del cuenco.

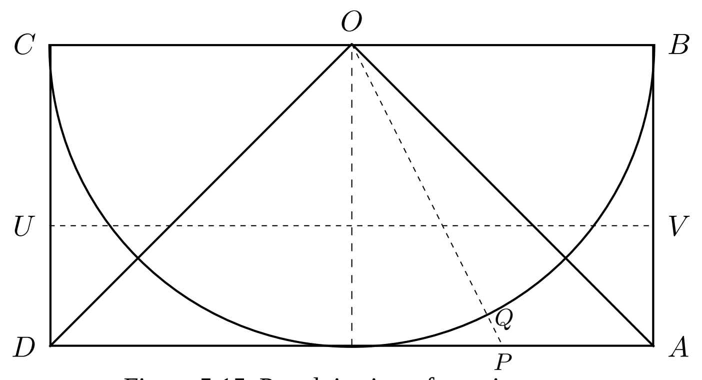


Figura 5.15. Paradoja circunferencia-punto

Cada plano paralelo a la base del cuenco determina en su intersección con el cono un círculo, y en su intersección con el cuenco una corona circular. Es muy fácil comprobar que dichos círculo y corona circular tienen igual área. Si ahora consideramos planos paralelos a la base del cuenco que se van acercando al borde superior del mismo, las áreas de las intersecciones de dichos planos con el cono y el cuenco son siempre iguales. El último de dichos planos da como intersección con el cuenco una circunferencia (el borde del cuenco) y con el cono un punto (el vértice del cono). Como los límites de cantidades iguales entre sí deben también ser iguales entre sí, Galileo se pregunta por qué no podemos considerar la circunferencia como igual a su centro. Si lo hacemos, llegaremos a la conclusión de que todas las circunferencias son iguales entre sí e iguales a un punto.

La misma figura anterior pone de manifiesto que la semicircunferencia está formada por

tantos puntos como los que forman la poligonal $CDAB$. Pues cada semirrecta con origen en O corta a la semicircunferencia en un único punto Q y a la poligonal en otro único punto P. Así podemos emparejar los puntos de la semicircunferencia con los de la poligonal y de esta forma los agotamos todos. Por tanto ambas líneas tienen igual número infinito de puntos. Si llamamos ℓ a la longitud de AB, la semicircunferencia tiene longitud $\pi\ell$, menor que la longitud de la poligonal $CDAB$ que es igual a 4ℓ. Galileo escribe al respecto:

> Estas dificultades son reales; y no son las únicas. Pero recordemos que estamos tratando con infinitos e indivisibles, los cuales trascienden nuestra comprensión finita, los primeros a causa de su magnitud, los últimos debido a su pequeñez.
>
> [. . .] intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Otra paradoja considerada por Galileo, es la que se deduce de la observación de que para cada número natural n podemos construir un cuadrado de lado n, cuya área es igual a n^2, de donde se deduce que hay tantos números naturales como cuadrados perfectos. Sin embargo la mayoría de los números no son cuadrados perfectos. A la vista de ello, Galileo escribe:

> [. . .] el total de los números es infinito, y el número de cuadrados es infinito; ni es menor el número de cuadrados que el de la totalidad de números, ni el otro mayor que el anterior; y, finalmente, los atributos “igual”, “mayor” y “menor” no son aplicables al infinito, sino solo a cantidades finitas.

5.4.2.3. El Cálculo y el infinito

Una característica de las matemáticas del siglo XVII es el libre uso del infinito. En los dos primeros tercios del siglo XVII se desarrollan una variedad de métodos infinitesimales que preludian el cálculo diferencial, así como técnicas de cuadraturas basadas en la descomposición de recintos planos o de sólidos en infinitos *elementos indivisibles*. El matemático inglés John Wallis introdujo en 1655 en su obra *De Sectionibus Conicis*, el símbolo del “lazo del amor”, ∞, con el significado de “infinito”.

La invención del Cálculo, en el último tercio del siglo XVII, ordena y sistematiza estos procedimientos, y proporciona algoritmos generales para resolver multitud de problemas que antes se abordaban con técnicas específicas para cada caso. Las cantidades infinitesimales, los casi imprescindibles infinitésimos, que ya son viejos amigos nuestros, son otra forma del infinito, en este caso, de lo infinitamente pequeño. Durante el siglo XVIII y parte del XIX, los infinitésimos se usaron de forma casi generalizada porque, a pesar de los problemas de todo tipo que planteaban, eran útiles y eficaces para resolver problemas y una herramienta heurística muy apreciada. Es preferible diferir, hasta que estudiemos el nacimiento del Cálculo, el estudio de algunos aspectos de este proceso cuya consideración ahora nos apartaría del tema que estamos viendo.

5.4.3. El infinito matemático y el nacimiento de la teoría de conjuntos

A principios del siglo XIX, la actitud de los matemáticos ante el infinito no era diferente a la mantenida por Galileo doscientos años antes. La consideración del infinito actual conducía a paradojas; en particular, la llamada *paradoja de la reflexividad*, es decir, la posibilidad de

establecer una biyección entre un conjunto infinito y una parte del mismo, indicaba que la consideración del infinito actual contradecía el principio lógico de que “el todo es mayor que las partes”. Para los principales matemáticos de la época, como Gauss y Cauchy, el infinito seguía siendo un infinito potencial, un concepto sin contenido matemático, una palabra que servía para designar un proceso sin punto final. Gauss lo expresó claramente en una carta a su amigo Schumacher en 1831:

> Debo protestar vehementemente contra el uso del infinito como algo completado, pues esto nunca está permitido en matemáticas. El infinito es simplemente una forma de hablar; una forma resumida para la afirmación de que existen los límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse tanto como se desee, mientras otras son permitidas crecer ilimitadamente.

La consideración del infinito actual como objeto matemático exige disponer de objetos matemáticos que puedan ser llamados “infinitos”. Que los números naturales son potencialmente infinitos quiere decir que son una sucesión a la que podemos agregar términos indefinidamente, muy diferente es la consideración del infinito actual de todos los números naturales (a lo que estamos ya acostumbrados y no nos causa mayor problema), que equivale a considerarlos como un todo acabado, como un conjunto formado por todos ellos. Esto indica que una teoría matemática del infinito supone la consideración de conjuntos infinitos. Es imposible separar la teoría de conjuntos y la teoría del infinito.

En esto, como en otras cosas, Bernahrd Bolzano fue un adelantado a su tiempo. En su libro *Las Paradojas del Infinito*, publicado en 1851, tres años después de su muerte, Bolzano se propone estudiar las paradojas conocidas y mostrar que, debido a la falta de precisión en el uso del término *infinito*, daban lugar a *aparentes* contradicciones. Es necesario, afirma, definir el término *infinito* y las matemáticas son el contexto apropiado para ello. Naturalmente, Bolzano, está refiriéndose al infinito actual. Con la idea de fundamentar matemáticamente la noción de infinito actual, Bolzano introduce los términos de *agregado*, *conjunto* y *multitud*, siendo en esta obra la primera vez que la palabra “conjunto” es usada con un significado matemático preciso. Un agregado es una totalidad compuesta de objetos bien definidos; un conjunto es un agregado donde el orden de sus partes es irrelevante y donde nada esencial se cambia si solo se cambia el orden (es decir, un agregado sin estructura alguna); una multitud es un conjunto cuyos miembros son individuos de una misma especie.

Bolzano considera un conjunto como un todo, sin necesidad de considerar separadamente cada uno de sus elementos. El ejemplo que propone es muy significativo a este respecto:

> ... puedo pensar en el conjunto, o agregado, o si se prefiere, en la totalidad de los habitantes de Praga o de Pekín sin formar una representación separada de cada habitante individual.

Bolzano abandona así el punto de vista constructivo, la idea de que un conjunto se va formando a partir de sus elementos mediante alguna clase de algoritmo.

Bolzano define una multitud infinita como aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte de la misma. Debemos observar que esta definición no es la tradicional en la que infinito es definido como la negación de lo finito. Con respecto a la existencia de conjuntos infinitos, Bolzano afirmó que “el conjunto de todas las verdades absolutas es un conjunto infinito”. Su idea es partir de una proposición que se sabe verdadera a la que podemos llamar A; a partir de ella podemos formar otra “A es verdadera” que, claramente, es diferente de la proposición A y este proceso puede proseguirse indefinidamente. Esta idea parece muy

ingenua pero, más de treinta años después, Dedekind se inspiró en ella para probar el mismo resultado.

Bolzano mantiene que el criterio de validez para la existencia de conjuntos infinitos debe basarse en su naturaleza no contradictoria.

> Tan pronto como disponemos de un concepto, A, el cual representa los objetos $a, b, c, d, \ldots$ y no otros, es extremadamente fácil llegar a un concepto que represente el agregado de todos estos objetos tomados juntos. Solamente se necesita combinar la idea expresada por la palabra "agregado" y el concepto A, en la manera expresada por las palabras "el agregado de todo A". Esta simple observación, cuya corrección confío que será evidente para todos, elimina todas las dificultades planteadas contra la idea de un conjunto que comprende infinitos miembros.

En términos actuales, lo que Bolzano afirma es que dada una proposición $P(x)$, relativa a los elementos de un conjunto X, podemos formar el conjunto $Y = \{x \in X : P(x) \text{ es verdadera}\}$.

Bolzano se propone establecer un criterio de comparación para conjuntos infinitos. La paradoja de la reflexividad no le preocupa tanto como a Galileo; al contrario, el hecho de que pueda establecerse una biyección entre un conjunto y una parte de él le parece "una de las más notables característica de los conjuntos infinitos". Pero en este punto crucial Bolzano no eligió el criterio adecuado.

> …el conjunto de todas las cantidades entre 0 y 5 (o menores que 5) es claramente infinito, al igual que lo es el conjunto de todas las cantidades menores que 12. Con no menos seguridad es el último conjunto mayor que el primero, pues el primero constituye solamente una parte del último […] Pero no menos cierto que todo esto es lo siguiente: si x representa una cantidad arbitraria entre 0 y 5, y si fijamos la razón entre x e y por la ecuación $5y = 12x$, entonces y es una cantidad entre 0 y 12; y recíprocamente, siempre que y esté entre 0 y 12, x está entre 0 y 5.

Es decir, Bolzano afirma que la aplicación dada por $y = \dfrac{12}{5}x$ para $x \in [0, 5]$ establece una biyección entre dicho intervalo y el intervalo $[0, 12]$. Pero, cuando se trata de conjuntos infinitos, a Bolzano no le parece que la existencia de una biyección sea criterio suficiente para afirmar que ambos conjuntos son "equinumerosos" y elige como criterio de comparación la relación de inclusión entre conjuntos. De esta forma puede comparar conjuntos infinitos pero no puede *cuantificar* el infinito y, por tanto, no logra desarrollar, pese a su intento, una aritmética del infinito.

Le estaba reservada a Georg Cantor (1845 - 1918) la gloria de ser el primer matemático que domesticara el infinito. Cantor se vio obligado a defender constantemente sus innovadoras ideas en contra de las opiniones de influyentes matemáticos de su tiempo, alguno de los cuales, como Leopold Kronecker, pasó incluso del ataque científico al ataque personal, si bien otros destacados matemáticos como Weierstrass, Dedekind o Hilbert estuvieron de su parte. El interés de Cantor por los conjuntos infinitos de puntos y la naturaleza del continuo procede de sus tempranos trabajos en series trigonométricas. En un notable trabajo de 1872, Cantor desarrolló una teoría de los números reales basada en sucesiones de números racionales. Ese mismo año, un poco antes, Dedekind había publicado su teoría de las cortaduras.

No es ésta la única ocasión en que coinciden los intereses de Cantor y Dedekind. De hecho, la contribución de Dedekind a la creación de la teoría de conjuntos es mucho más importante de lo que suele reconocerse. En su famoso trabajo *Was sind und was sollen die Zahlen* (*¿Qué son y para qué sirven los números?*) publicado en 1888, Dedekind precisa el significado de las operaciones elementales de la teoría de conjuntos *ingenua*, y da la definición general de función entre conjuntos abstractos, generalizando así la anteriormente dada por Dirichlet para funciones reales. Así mismo Dedekind da la siguiente definición:

> Un sistema S se llama *infinito* cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario, se dice que S es un sistema finito.

En términos actuales: un conjunto S es infinito, si hay un subconjunto propio, $\emptyset \subsetneqq A \subsetneqq S$, y una biyección de A sobre S. En una nota a pie de página, Dedekind, afirma haber comunicado esa definición a Cantor ya en 1882 y varios años antes a otros colegas. También fue Dedekind un precursor de las técnicas conjuntistas en Álgebra, introduciendo, entre otros, los conceptos de *cuerpo, ideal* y *módulo*.



Figura 5.16. Cantor

En una carta a Dedekind, de fecha 29 de noviembre de 1873, Cantor afirmaba, sin incluir prueba alguna, que los racionales positivos y, más generalmente, el conjunto de las sucesiones finitas de enteros positivos, podía ponerse en correspondencia biyectiva con los enteros positivos, y preguntaba si eso mismo se podía hacer con los números reales. Dedekind le respondió, a vuelta de correo, que en su opinión nada se oponía a ello, y añadió, con demostración incluida, que el conjunto de los números algebraicos sí es biyectivo con el de los enteros positivos.

5.5 Definición. Los *números algebraicos* son números, reales o complejos, que son raíces de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. Por tanto, un número real o complejo x es algebraico si hay números enteros $c_k \in \mathbb{Z}$, $(k = 01, 2, \dots n)$ tal que x satisface la ecuación polinómica

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n = 0$$

Los números que no son algebraicos se llaman *trascendentes*.

Todo número racional es evidentemente algebraico, pero también lo son las raíces de cualquier orden de números racionales positivos y muchos más. Intuitivamente, los números algebraicos son los que pueden obtenerse a partir de los enteros por procedimientos algebraicos: suma, producto, cociente, división, raíces, iterados un número finito cualquiera de veces. En ese sentido podemos decir que los números algebraicos no están "muy alejados" de los enteros. Los números trascendentes son justamente lo contrario: son números irracionales "muy alejados" de los enteros.

Para facilitar la exposición que sigue voy a dar algunas definiciones de conceptos introducidos por Cantor años más tarde.

5.6 Definición. Se dice que dos conjuntos A y B son *equipotentes* si existe una aplicación biyectiva de uno de ellos sobre el otro. Los conjuntos equipotentes al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales se llaman conjuntos *numerables*.

Los conjuntos numerables son aquellos conjuntos cuyos elementos se pueden contar ¡aunque sean infinitos! El resultado, citado por Cantor, de que $\mathbb{Q}$ es numerable, no deja de ser muy sorprendente y contrario a la intuición, pues si $r < s$ son números racionales cualesquiera,

entre ellos dos hay siempre infinitos números racionales. Pese a ello, no hay más números racionales que números naturales.

Poco después de las cartas citadas, Cantor logró demostrar que el conjunto de los números reales no es numerable. De aquí se deduce enseguida que en todo intervalo de $\mathbb{R}$, hay infinitos números trascendentes. Cantor publicó estos resultados, el suyo y el de Dedekind, en un trabajo de tres páginas titulado *Uber eine Eigenshaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (*Sobre una propiedad del sistema de todos los números algebraicos reales*) (1874). Es muy llamativo que el título de este trabajo, considerado como el nacimiento oficial de la teoría de conjuntos, no haga referencia alguna al resultado que hoy consideramos como el principal: la no numerabilidad de $\mathbb{R}$. Además la propia presentación del trabajo elude destacar estos resultados. Posiblemente, Cantor temía la reacción que pudiera provocar un trabajo tan radicalmente innovador. Porque lo que él hacía era probar que en cualquier intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$ hay, en un sentido matemático preciso, más números que todos los números algebraicos juntos, de donde se deducía que en $[a,b]$ tenía que haber números trascendentes. Esta es una demostración de *existencia pura*, algo nuevo en las matemáticas.

Demostrar que un número concreto es trascendente es muy difícil. Era conocida la trascendencia del número e, demostrada por Charles Hermite en 1873, y Ferdinand Lindemann logró probar la trascendencia de π en 1882 (demostrando así que el problema de la cuadratura del círculo no tenía solución).

Naturalmente, Cantor sabía muy bien que había descubierto una propiedad específica del continuo: su no numerabilidad. Disponía ya de dos tipos de conjuntos infinitos: $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, claramente $\mathbb{N}$ tenía un tamaño más pequeño que $\mathbb{R}$. Precisar esa idea de tamaño y elaborar una teoría de comparación de conjuntos infinitos es lo que hizo Cantor en los siguientes veinte años y, casi contra su voluntad, se vio llevado a desarrollar la teoría de números transfinitos y la teoría de conjuntos como una disciplina matemática independiente.

En 1877, Cantor probó, para su propia sorpresa, que los puntos del plano podían ponerse en correspondencia biyectiva con $\mathbb{R}$, y, más general, que los espacios $\mathbb{R}^n$ son todos ellos biyectivos a la recta real. Este resultado fue de los que más desconcierto provocó entre los matemáticos contemporáneos.

Cantor siguió desarrollando sus ideas en una serie de seis trabajos publicados en los años 1878 a 1884. En 1883, en su trabajo *Fundamentos de una teoría general de conjuntos*, escribe:

> La presentación de mis investigaciones hasta la fecha en teoría de conjuntos, ha alcanzado un punto donde su progreso depende de una extensión del concepto de número entero más allá de sus límites actuales. Esta extensión señala en una dirección que, por lo que yo sé, no ha sido investigada por nadie todavía.
>
> [...] Por atrevido que esto pueda parecer, tengo que expresar, no sólo la esperanza, sino también la firme convicción de que esta extensión tendrá que ser considerada con el tiempo como absolutamente simple, adecuada y natural. Pero no se me oculta de ninguna manera el hecho de que en esta empresa me encuentro situado en una cierta oposición a concepciones muy extendidas acerca del infinito matemático, y a opiniones formuladas frecuentemente sobre la naturaleza del número.

En este trabajo Cantor introduce los *números transfinitos* o *cardinales transfinitos*. Por el mismo proceso que podemos abstraer la idea de número 5 como la clase de todos los conjuntos equipotentes a un conjunto cualquiera con cinco elementos, a, b, c, d, e, de la misma forma este proceso permite, dado un conjunto M, por doble abstracción de la naturaleza de sus elementos y del posible orden en que estén dados, asociar a M un objeto matemático, representado

por $\sharp M$, que se llama *su número cardinal* o *potencia*, que es el mismo para todos los conjuntos equipotentes a M. Cuando M es finito, $\sharp M$ es el número de elementos de M; la potencia de los conjuntos numerables (infinitos) la representó Cantor por $\aleph_0$ ($\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo, se pronuncia "alef"); la potencia de la recta real y de cualquier intervalo de la misma, no vacío y no reducido a un punto, se representa por $\mathfrak{c}$ y se llama la *potencia del continuo*.

Cantor define una relación de orden entre números cardinales: si M, N son dos conjuntos, diremos que $\sharp M \preccurlyeq \sharp N$ si existe una biyección de M sobre *una parte* de N. Si, además, no existe ninguna biyección entre ninguna parte de M y la totalidad de N, se escribe $\sharp M \prec \sharp N$. Con esta definición se tiene que $\aleph_0 \prec \mathfrak{c}$. Para números cardinales finitos esta relación de orden es la usual. La demostración de que $\preccurlyeq$ es una relación de orden entre números cardinales está muy lejos de ser fácil. La dificultad estaba en probar la propiedad reflexiva, es decir, si $\sharp M \preccurlyeq \sharp N$ y también $\sharp N \preccurlyeq \sharp M$, entonces es $\sharp M = \sharp N$. Este resultado fue probado en 1898, y se conoce como teorema de Cantor - Bernstein. Se verifica, además, que $\preccurlyeq$ es una relación de orden total, es decir, dados conjuntos M y N se verifica alguna de las relaciones $\sharp M \preccurlyeq \sharp N$ o $\sharp N \preccurlyeq \sharp M$. La demostración de este resultado exige usar el llamado axioma de Zermelo.

Todos esto está muy bien, pero ¿cuántos números cardinales infinitos hay? Hasta ahora solamente conocemos dos. Cantor ideó un procedimiento por el cual, dado un conjunto M, se puede construir un conjunto cuyo cardinal es estrictamente mayor. Para ello, definió el conjunto $\mathcal{P}(M)$ como el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de M

$$\mathcal{P}(M) = \{A : A \subset M\}$$

Es fácil probar que $\sharp M \prec \sharp\mathcal{P}(M)$. Suele escribirse $\sharp\mathcal{P}(M) = 2^{\sharp M}$, igualdad que, para el caso de conjuntos finitos, es cierta.

Por tanto, los conjuntos

$$\mathcal{P}(M), \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(M)\big), \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(M)\big)\right) \dots$$

tienen todos ellos distinto número cardinal.

Las operaciones con números transfinitos se definen con facilidad por medio de las correspondientes operaciones conjuntistas. Por ejemplo, el producto $\sharp M \cdot \sharp N$ es, por definición, igual a $\sharp(M \times N)$ donde $M \times N$ es el conjunto producto cartesiano de M y N. Análogamente se define la suma $\sharp M + \sharp N$ como el número cardinal de la unión disjunta de M y N. Estas operaciones son asociativas, conmutativas y distributivas pero, para cardinales transfinitos se cumple que

$$\sharp M + \sharp N = \sharp M \cdot \sharp N = \text{máx}\,\{\sharp M, \sharp N\}$$

Esto es, la aritmética transfinita no responde a las reglas usuales de la aritmética finita. Pero esto no quiere decir que sea contradictoria, simplemente, es diferente.

El desarrollo de la teoría de conjuntos condujo a algunas contradicciones, las llamadas *paradojas de la teoría de conjuntos*. Ello era debido al punto de vista ingenuo adoptado respecto a los conjuntos. Se pensaba que cualquier propiedad matemática, $P(x)$, definía su correspondiente conjunto, a saber, el formado por los elementos para los cuales dicha propiedad es verdadera. El propio Bolzano tenía esta idea. Consideremos la siguiente propiedad $P(x) = x \notin x$ y definamos el conjunto $A = \{x : P(x) \text{ es verdadera}\}$. Entonces resulta que si $A \in A$ es porque $A \notin A$ y si $A \notin A$ debe ser $A \in A$. Una contradicción insalvable, conocida como la *paradoja de*

Russell. La solución fue axiomatizar la teoría de conjuntos para evitar que pudieran formularse paradojas como la anterior y, además, restringir de alguna forma la existencia de conjuntos “demasiado grandes”.

Considero que lo dicho hasta aquí es suficiente para que tengas una idea del trabajo de Cantor. Este trabajo cambió la forma de ver las matemáticas y acabó por ser ampliamente aceptado. La visión que Cantor tenía de las matemáticas puras es muy hermosa; para él, las matemáticas puras son el reino de la libertad y las llamaba “matemáticas libres”, porque son una creación de la libertad del espíritu humano cuyas únicas limitaciones son la coherencia y la no contradicción.

5.4.3.1. La no numerabilidad del continuo

En esta sección final, vamos a probar la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ y la no numerabilidad de $\mathbb{R}$. Así mismo, estudiaremos algunos tipos de conjuntos densos y te propondré algunos ejercicios interesantes.

Empezaremos demostrando un resultado que, por su aparente evidencia, parece que no precisa demostración. Se trata de un resultado muy importante y muy útil y cuya demostración me parece instructiva.

5.7 Teorema. *a) Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.*

b) Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.

Demostración. La estrategia de la demostración es obligada; para probar que un conjunto de números reales no vacío y mayorado tiene máximo, debemos probar que su supremo está en el conjunto. Sea $E \subset \mathbb{R}$ no vacío y mayorado. En virtud del principio del supremo, hay un número $\beta \in \mathbb{R}$ que es el mínimo mayorante de E. Puesto que $\beta - 1 < \beta$, debe haber algún $z \in E$ tal que $\beta - 1 < z$ y, claro está, $z \leqslant \beta$. Supongamos que los elementos de E son números enteros, $E \subset \mathbb{Z}$, y probemos que, en tal caso, debe ser $z = \beta$. Si fuera $z < \beta$ tendría que haber algún $w \in E$ tal que $z < w \leqslant \beta$ pero entonces el número $w - z$ es un entero positivo tal que $w - z < 1$ lo cual es contradictorio. En consecuencia $z = \beta \in E$ y β es el máximo de E.

Análogamente se prueba que un conjunto no vacío y minorado de enteros tiene mínimo. □

Del teorema anterior se deducen dos importantes consecuencias.

5.8 Teorema (Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$)**.** *Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.*

La siguiente propiedad, también consecuencia del teorema, nos dice que $\mathbb{N}$ no está mayorado en $\mathbb{R}$. Observa que es evidente que $\mathbb{N}$ está mayorado en $\mathbb{Q}$. Pero $\mathbb{R}$ tiene muchos más elementos (muchísimos más, como enseguida veremos) que $\mathbb{Q}$; ¿quién te asegura que, en la ampliación de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, no se han colado números irracionales más grandes que cualquier natural? De eso se trata.

5.9 Teorema (Propiedad arquimediana)**.** *Dado cualquier número real se verifica que hay números naturales mayores que él.*

Demostración. Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo, el teorema (5.7) implica que $\mathbb{N}$ no puede estar mayorado en $\mathbb{R}$, por tanto, dado $x\in\mathbb{R}$, tiene que haber algún $n\in\mathbb{N}$ tal que $n > x$. □

La propiedad arquimediana del orden de $\mathbb{R}$ prohíbe la existencia de cantidades infinitesimales, es decir, de números positivos pero "tan pequeños" que al multiplicarlos por cualquier número natural el producto seguía siendo "muy pequeño". Convenzámonos de que tales "infinitésimos", si es que los hay, no pueden ser números reales. En efecto, si x, y son números reales positivos, la propiedad arquimediana del orden de $\mathbb{R}$ nos dice que tiene haber algún $n\in\mathbb{N}$ tal que $n > y/x$ y, por tanto, $nx > y$. En consecuencia, por "pequeño" que sea el número real $x > 0$ y por "muy grande" que sea el número real $y > 0$, siempre hay múltiplos naturales de x mayores que y.

5.10 Definición. Se dice que un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, si en todo intervalo abierto no vacío hay puntos de E. Equivalentemente, si dados $x, y\in\mathbb{R}$ con $x < y$ hay algún $z\in E$ tal que $x < z < y$.

5.11 Proposición. *a) El conjunto de los números racionales es denso en* $\mathbb{R}$.

b) El conjunto de los números irracionales es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. *a)* Supongamos que $x, y\in\mathbb{R}$ con $x < y$. La idea es tomar una unidad racional de medida, u, en la recta que sea menor que $y - x$, pues entonces es claro que un múltiplo apropiado, mu, de u estará comprendido entre x e y. Hay muchas posibilidades, se trata de elegir u y m con algún criterio que nos permita probar que $x < mu < y$. Los números más sencillos que podemos tomar para u son los de la forma $1/n$, donde $n \in \mathbb{N}$, con la condición $1/n < y - x$, esto es, $n > 1/(y - x)$. Parece razonable tomar el menor n que cumpla dicha desigualdad. Sea, pues:

$$q = \text{mín}\,\{n\in\mathbb{N} : n > 1/(y - x)\}$$

Ahora se trata de tomar un múltiplo de $u = 1/q$ que exceda a x, pero no demasiado. Se impone la elección:

$$p = \text{mín}\,\{m\in\mathbb{Z} : m > qx\}$$

Tenemos que:

$$x < \frac{p}{q} = \frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y$$

Lo que concluye la demostración. Observa que en las definiciones de q y de p se usan los resultados que acabamos de ver.

b) Supongamos que $x, y\in\mathbb{R}$ con $x < y$. Por lo ya probado, existe $r\in\mathbb{Q}$ tal que

$$x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2},$$

lo que implica que $x < r + \sqrt{2} < y$. Puesto que, $\sqrt{2}$ es irracional y $r \in \mathbb{Q}$, se sigue que $r + \sqrt{2}$ es irracional y concluimos que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. □

Este resultado nos dice que los números racionales y los irracionales están repartidos de manera que entre dos racionales o entre dos irracionales siempre hay infinitos racionales e

infinitos irracionales. Son dos conjuntos muy grandes, pero uno de ellos es muchísimo más grande que el otro.

Hemos definido antes un conjunto numerable como aquél que es equipotente a $\mathbb{N}$; es conveniente incluir también entre los conjuntos numerables a los conjuntos finitos pues los elementos de un conjunto finito se pueden contar. Estas dos posibilidades pueden resumirse en el hecho de que exista una aplicación *inyectiva* del conjunto en $\mathbb{N}$. Por convenio, se admite que el conjunto vacío es numerable.

5.12 Definición. Un conjunto se llama numerable si es vacío o si existe una aplicación inyectiva de él en el conjunto de los enteros positivos.

Realmente esta definición lo que nos da es cierta libertad para probar que un conjunto es numerable; de hecho, se verifica el siguiente resultado.

5.13 Proposición. *Un conjunto no vacío es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a* $\mathbb{N}$.

El siguiente resultado es muy útil y fácil de entender.

5.14 Proposición. *Un conjunto no vacío* A *es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de* $\mathbb{N}$ *sobre* A.

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \to A$ una aplicación sobreyectiva. Para cada elemento $a \in A$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\}$ no es vacío por lo que podemos definir, haciendo uso del principio de buena ordenación, una aplicación $g : A \to \mathbb{N}$ por:

$$g(a) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\} \qquad \text{para todo } a \in A$$

Con ello se tiene que $f(g(a)) = a$ para todo $a \in A$ lo que implica que g es inyectiva y por tanto que A es numerable.

La afirmación recíproca es consecuencia de la proposición anterior. □

Aunque el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ parece mucho más grande que $\mathbb{N}$; de hecho no es así. Podemos contar con facilidad los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ siguiendo el camino que se sugiere (habría que prolongarlo hacia arriba y hacia la derecha) en la figura (5.17).

5.15 Proposición. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es equipotente a* $\mathbb{N}$.

Demostración. [4] La aplicación $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\varphi(p, q) = 2^p 3^q$ para todo $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es inyectiva. En consecuencia $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable y como es infinito concluimos que es equipotente a $\mathbb{N}$. □

El siguiente resultado nos dice que si hacemos la unión de una "cantidad numerable" de conjuntos numerables obtenemos un conjunto que sigue siendo numerable. El enunciado del teorema precisa estas ideas.

[4] En el ejercicio (172) se define una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$

5.16 Teorema. *Sea B un conjunto numerable no vacío. Supongamos que para cada $x\in B$ tenemos un conjunto numerable no vacío A_x. Se verifica entonces que el conjunto $\mathcal{A}=\bigcup\limits_{x\in B}A_x$ es numerable.*

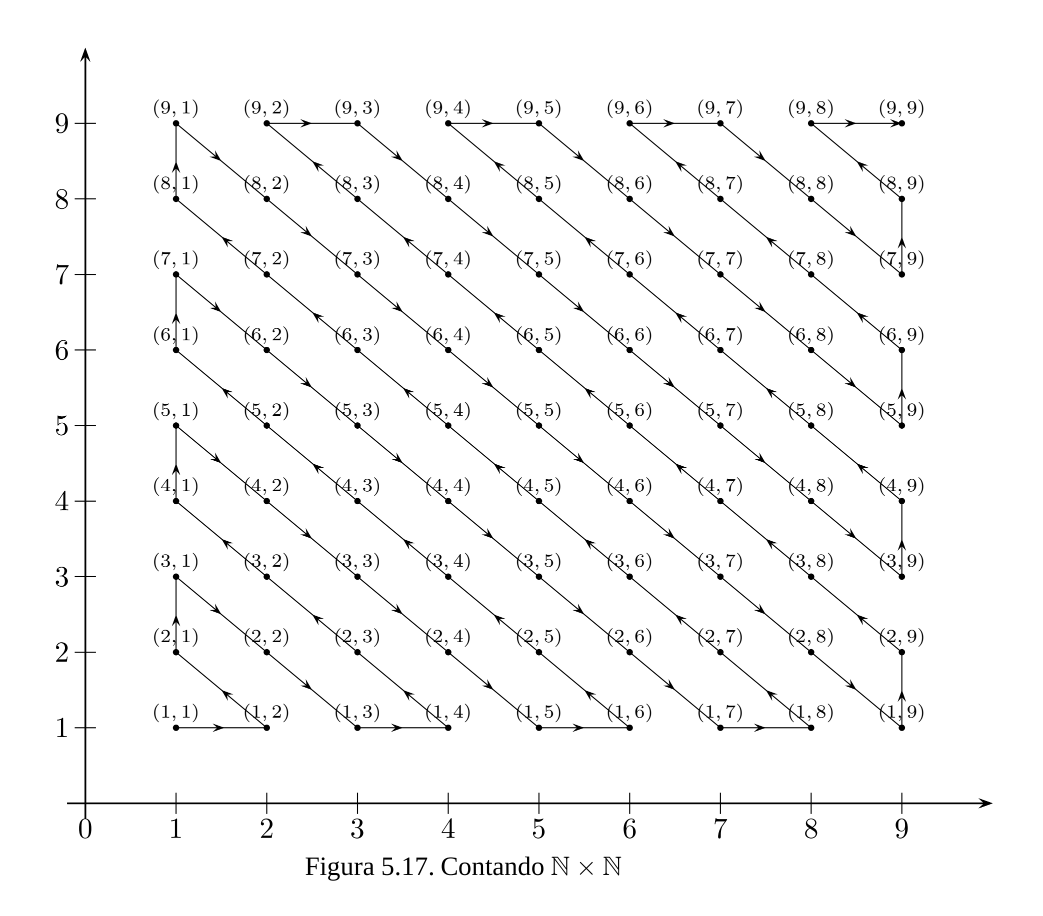


Figura 5.17. Contando $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Demostración. Es suficiente probar que hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sobre $\mathcal{A}$. Por ser B numerable hay una aplicación sobreyectiva $\phi:\mathbb{N}\to B$. Para cada $x\in B$, por ser A_x numerable, hay una aplicación sobreyectiva $F_x:\mathbb{N}\to A_x$. Es muy fácil comprobar ahora que la aplicación $G:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ definida por $G(m,n)=F_{\phi(m)}(n)$ para todo $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, es sobreyectiva. □

Puede que el siguiente diagrama sea más claro y directo que la demostración anterior. Podemos suponer que $B=\mathbb{N}$, con lo que $\mathcal{A}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$. Como A_n es numerable, podemos escribir sus elementos como una sucesión:

$$A_n=\{a_{mn}:m\in\mathbb{N}\}=\{a_{1n},a_{2n},a_{3n},\dots,a_{mn},\dots\}$$

El conjunto $\mathcal{A}$ podemos representarlo como una matriz (ver figura (5.18)), y contar sus elementos de forma parecida a como lo hemos hecho antes con $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

5.17 Teorema. *El conjunto de los números racionales es numerable.*

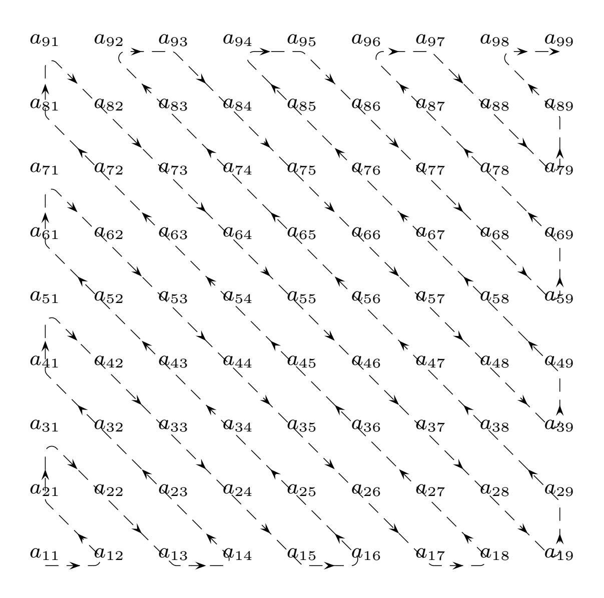


Figura 5.18. Unión numerable

Demostración. Puesto que la aplicación $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$\varphi(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0 \\ 1 - 2n & \text{si } n \leqslant 0 \end{cases}$$

es una biyección, y para cada $m \in \mathbb{Z}$ el conjunto:

$$A_m = \left\{ \frac{m}{p} \, : \, p \in \mathbb{N} \right\}$$

es numerable, se sigue del resultado anterior que $\mathbb{Q} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} A_m$ es numerable. □

Por ser $\mathbb{Q}$ numerable infinito se verifica que $\mathbb{Q}$ es equipotente a $\mathbb{N}$, es decir, existen biyecciones de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$. Hemos respondido en parte a nuestra pregunta inicial: hay tantos números racionales como números naturales. Nos falta todavía dar alguna información del tamaño de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5.18 Teorema (Principio de los intervalos encajados)**.** *Para cada número natural* n *sea* $I_n = [a_n, b_n]$ *un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es* $I_{n+1} \subset I_n$*. Se verifica entonces que:*

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \text{ínf}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ii) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ *no es vacío.*

Demostración. *i)* Las hipótesis $\emptyset \neq I_{n+1} \subset I_n$, implican que $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deducimos que las aplicaciones $n \mapsto a_n$ y $n \mapsto -b_n$, son crecientes, esto es, $a_n \leqslant a_m,\ b_m \leqslant b_n$ siempre que $n < m$. Ahora, dados $p, q \in \mathbb{N}$ y poniendo $k = \max\{p, q\}$, tenemos que $a_p \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant b_q$. Hemos obtenido así que cualesquiera sean los números naturales p, q es $a_p \leqslant b_q$. Luego todo elemento de $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ es mayorante de $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y por tanto $\alpha = \sup A \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo cual, a su vez, nos dice que α es un minorante de B y por tanto concluimos que $\alpha \leqslant \beta = \inf B$.

ii) Es consecuencia de que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ equivale a que $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que equivale a que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, es decir $x \in [\alpha, \beta]$. □

5.19 Teorema. *Dados dos números reales $a < b$ se verifica que el intervalo $[a, b]$ no es numerable.*

Demostración. Si $[a, b]$ fuera numerable tendría que ser equipotente a $\mathbb{N}$. Veamos que esto no puede ocurrir. Supongamos que $\varphi : \mathbb{N} \to [a, b]$ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $[a, b]$. En particular φ es sobreyectiva por lo que deberá ser $[a, b] = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Obtendremos una contradicción probando que tiene que existir algún elemento $z \in [a, b]$ tal que $z \notin \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Para ello se procede de la siguiente forma. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en tres intervalos cerrados de igual longitud:

$$\left[a, a+\frac{b-a}{3}\right], \quad \left[a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3}\right], \quad \left[b-\frac{b-a}{3}, b\right]$$

y llamamos I_1 al primero de ellos (es decir el que está más a la izquierda) que no contiene a $\varphi(1)$. Dividamos ahora el intervalo I_1 en tres intervalos cerrados de igual longitud y llamemos I_2 al primero de ellos que no contiene a $\varphi(2)$.

Este proceso puede "continuarse indefinidamente" pues, supuesto que $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, y que tenemos intervalos cerrados de longitud *positiva* $I_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, tales que $I_{k+1} \subset I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, y $\varphi(k) \notin I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, dividimos el intervalo I_n en tres intervalos cerrados de igual longitud y llamamos I_{n+1} al primero de ellos que no contiene a $\varphi(n+1)$. De esta forma para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado I_n no vacío verificándose que $I_{n+1} \subset I_n$ y $\varphi(n) \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El principio de los intervalos encajados nos dice que hay algún número real z que está en *todos* los I_n. Por tanto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, por ser $z \in I_n$ y $\varphi(n) \notin I_n$, se tiene necesariamente que $z \neq \varphi(n)$, esto es, $z \notin \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ pero, evidentemente, $z \in [a, b]$. □

¿Te recuerda algo la demostración anterior? ¿Quizás a la divisibilidad infinita del continuo? Pues claro, lo que estamos haciendo es dividir infinitas veces un segmento (el prototipo de *continuo*). Lo que nos dice este resultado es que, aunque lo dividamos en un infinito actual de partes, siempre nos quedarán puntos que no habremos tocado. Aristóteles afirmaba que un continuo puede dividirse en cualquier parte pero no en todas partes: hay que darle la razón en este punto.

5.20 Teorema. $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *son conjuntos no numerables.*

Demostración. Evidentemente todo subconjunto de un conjunto numerable también es numerable. Como acabamos de ver que hay subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son numerables deducimos que $\mathbb{R}$ no es numerable. Puesto que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ y sabemos que $\mathbb{Q}$ es numerable y $\mathbb{R}$ no lo es, deducimos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no es numerable. □

El teorema anterior demuestra no solamente que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no es vacío sino que "hay muchos más números irracionales que racionales" pues mientras que podemos enumerar los racionales no podemos hacer lo mismo con los irracionales ya que no hay biyecciones de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Deducimos también la siguiente estrategia *para probar que un conjunto* $A\subset\mathbb{R}$ *no es vacío es suficiente probar que su complemento* $\mathbb{R}\backslash A$ *es numerable* (!con lo cual, de hecho, estamos probando que A es infinito no numerable!).

5.4.4. Ejercicios propuestos

172. Prueba que la aplicación $F : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$f(m,n) = n + \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} \quad \text{para todo } (m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

es una biyección.

Sugerencias: para cada $p\in\mathbb{N}$ definamos:

$$\varphi(p) = \text{máx}\left\{q\in\mathbb{N} : q < \sqrt{2p+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right\}$$

Observa que $\varphi(p)$ es un número natural mayor o igual que 2. Prueba que para todo $p\in\mathbb{N}$ se verifica:

$$\frac{(\varphi(p)-2)(\varphi(p)-1)}{2} < p \leqslant \frac{(\varphi(p)-1)\varphi(p)}{2} \qquad (*)$$

Definamos ahora:

$$h(p) = p - \frac{(\varphi(p)-2)(\varphi(p)-1)}{4}, \quad \text{para todo } p\in\mathbb{N}$$

Justifica, teniendo en cuenta $(*)$, que $h(p)\in\mathbb{N}$ y $\varphi(p)-h(p)\geqslant 1$.

Comprueba finalmente que, $p = F(\varphi(p)-h(p), h(p))$, para cada $p\in\mathbb{N}$.

173. Sea $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ creciente. Para cada $\alpha\in]a,b[$ definamos:

$$\omega(f,\alpha) = \text{ínf}\{f(t) : \alpha < t \leqslant b\} - \sup\{f(s) : a\leqslant s<\alpha\}$$

Prueba que:

i) $\omega(f,\alpha)\geqslant 0$ y $\omega(f,\alpha)=0$ si, y sólo si, f es continua en α.

ii) Si $a<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p<b$, entonces:

$$\omega(f,\alpha_1)+\omega(f,\alpha_2)+\cdots+\omega(f,\alpha_p)\leqslant f(b)-f(a)$$

iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $S_n = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) \geqslant 1/n\}$ es finito.

iv) El conjunto $S = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) > 0\}$ de las discontinuidades de f es numerable.

Muestra con un ejemplo que el conjunto S puede ser infinito.

174. Prueba que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

Para terminar, recordemos que los poetas también se interesan por el infinito y lo llaman *amor* y también *deseo*.

This is the monstruosity in love, lady,
that the will is infinite
and the execution confined,
that the desire is boundless
and the act a slave to limit.
Shakespeare - Troilus and Cressida

Capítulo 6

Derivadas

El arte de nombrar y de medir con exactitud aquello
de lo que ni siquiera puede concebirse su existencia.
Voltaire

6.1. Introducción

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Simplificando, podemos destacar dos problemas principales:

- Determinar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes).
- Determinar el área encerrada por una curva (el problema de las cuadraturas).

Son los conceptos de derivada e integral, respectivamente, los que permiten resolver satisfactoriamente dichos problemas. Mientras que el concepto de integral tiene sus raíces en la antigüedad clásica, la otra idea fundamental del Cálculo, la derivada, no se formuló hasta el siglo XVII. Fue el descubrimiento efectuado por Sir Isaac Newton (1642 - 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) de la relación entre estas dos ideas, tan dispares en apariencia, lo que inició el magnífico desarrollo del Cálculo. Si bien los trabajos de Newton y Leibniz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571 - 1630), René Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665), John Wallis (1616 -1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) entre otros.

6.2. Concepto de derivada. Interpretación física y geométrica

Para entender los resultados del Cálculo diferencial es necesario, antes que nada, comprender la idea básica del mismo: el concepto de derivada. La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón “instantánea” de cambio.

6.2.1. Tangente a una curva

En la primera mitad del siglo XVII no se conocían métodos generales para calcular la tangente a una curva en un punto de la misma. Este problema se presentaba con frecuencia en mecánica, en óptica y en geometría, y generalmente se resolvía, de forma geométrica, con técnicas adaptadas a cada caso particular. La dificultad está en que, siendo la tangente una recta, se precisa conocer dos puntos de la misma, o bien un punto y su pendiente, para poderla determinar.

Supongamos que queremos hallar la tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La estrategia, usada primero por Pierre de Fermat y más tarde por Newton, consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente. En particular, consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dicho número suele llamarse *cociente incremental de* f *en* a.

Observa que una secante es una buena aproximación de la tangente, siempre que el punto $(x, f(x))$ esté próximo a $(a, f(a))$. Estas consideraciones llevan a *definir la tangente a la gráfica de* f *en el punto* $(a, f(a))$ *como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es igual al límite*:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

supuesto, claro está, que dicho límite exista.

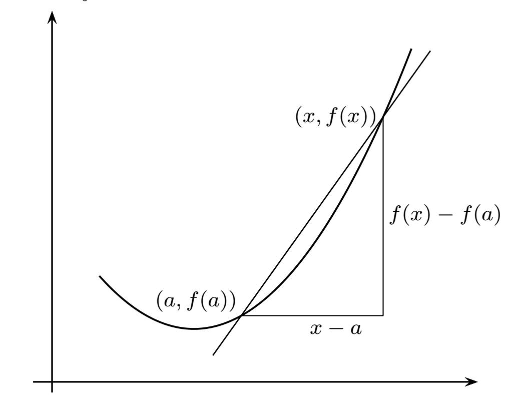


Figura 6.1. Secante

6.2.2. Razón de cambio puntual y velocidad instantánea

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable “dependiente” y con otra variable “independiente” x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la

variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo* $[a, x]$ es:

$$\text{Razón de cambio promedio } = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "*razón de cambio puntual de $y = f(x)$ con respecto a x en el punto a*" como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El ejemplo más conocido de esto que decimos es el de un móvil que se mueve a lo largo de una recta sobre la cual hemos elegido un origen. Sea $s(t)$ la posición del móvil en el tiempo t, es decir, la distancia con signo del móvil al origen en el tiempo t. La razón de cambio promedio tiene en este caso una interpretación física natural:

$$\frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

Es la *velocidad media* del móvil en el intervalo de tiempo comprendido entre a y $a+h$. Parece intuitivo que, en cada instante, el móvil se mueve con una determinada *velocidad instantánea*. Pero no hay manera de medir directamente una velocidad instantánea; un instante quiere decir una posición en la recta: la velocidad instantánea del móvil para $t = a$ es la velocidad que tiene cuando está en la posición $s(a)$. La velocidad instantánea es una abstracción de un característica física del movimiento, pero no es una magnitud que podamos observar directamente. La única definición razonable de velocidad instantánea es como la razón de cambio puntual:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

Notación. En lo que sigue usaremos las letras I, J para representar intervalos no vacíos de números reales.

6.1 Definición. Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Explícitamente, f es derivable en a si hay un número $L \in \mathbb{R}$ verificando que para cada número $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ y $| x - a | < \delta$ se tiene que:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leqslant \varepsilon.$$

Dicho número L se llama **derivada de f en a** y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange).

La notación de Lagrange tiene la gran ventaja de poner de manifiesto que al aplicar la operación de derivación a una función obtenemos una nueva función, que está definida en todos los puntos donde la función dada sea derivable. Es usual considerar funciones derivadas definidas en intervalos.

6.2 Definición. Dada una función $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f': I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

6.3 Observaciones. i) El límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se puede escribir también de la forma $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

ii) La derivabilidad de f en un punto $a \in I$ es una *propiedad local*, depende solamente del comportamiento de f en los puntos de I próximos al punto a. Concretamente, si J es cualquier *intervalo abierto* que contiene el punto a, se verifica que f es derivable en a si, y sólo si, la función restricción $f_{|I\cap J}$ es derivable en a y, por supuesto, en tal caso ambas funciones tienen la misma derivada en a.

La notación diferencial de Leibniz. La notación $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ para representar la derivada de f en x es debida a Leibniz.

Leibniz interpretaba ese símbolo como un "cociente diferencial" pues él lo entendía así: como un cociente de cantidades infinitesimales, y lo manejaba como un cociente; por ejemplo, se puede multiplicar o dividir, según convenga, por $\mathrm{d}x$ o $\mathrm{d}f(x)$. En el capítulo 5 hemos visto los problemas que planteaba el uso de cantidades infinitesimales, y cómo, finalmente, a partir del último tercio del siglo XIX, fueron totalmente abandonadas. Por eso, la interpretación de Leibniz de la derivada, aunque intuitiva, no es la que se sigue en la gran mayoría de los cursos de cálculo[1].

A pesar de lo dicho, es frecuente, sobre todo en libros de ingeniería, usar la notación de Leibniz y manejarla como él lo hacía. Creo que esto es útil porque la notación de Leibniz tiene una gran fuerza heurística, y no debe presentar ningún problema, siempre que no acabes creyendo que una derivada, tal como la hemos definido, es un cociente de infinitésimos. Y siempre que dicha notación se use como un mero simbolismo y no se hagan demostraciones apoyadas en su supuesta significación.

Una dificultad de la notación de Leibniz es que no es cómoda para representar la derivada en un punto concreto. Podemos entender que $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ es la función derivada $f'(x)$, pero ¿cómo indicamos la derivada en punto concreto a? Las notaciones $\dfrac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}$ y $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(a)$ son confusas. Lo que suele hacerse es escribir:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$$

que, realmente, es una notación incómoda. Una posible mejora sería escribir $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ para representar $f'(x)$, en cuyo caso $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ indicaría $f'(a)$.

La verdad es que la mayoría de los libros de ingeniería que usan estas notaciones lo hacen sin preocuparse mucho por su significado, y esa es una causa importante de que muchas veces no se entienda bien lo que escriben. Las notaciones son importantes y hay que manejarlas cuidadosamente. Y todavía más, cuando una notación se supone que tiene un significado casi

[1]Aunque sí en los cursos de Análisis No Estándar basados en los hiperreales de A. Robinson.

mágico, y que por su fuerza simbólica ella sola, por sí misma, proporciona demostraciones. Volveremos a considerar este asunto más adelante.

6.4 Definición. Supuesto que f es derivable en a, la recta de ecuación cartesiana:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta tangente a f en $x = a$.

Cuando $f'(a) \neq 0$, la recta de ecuación:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

es la **recta normal** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta normal a f en $x = a$

6.2.2.1. Elementos de una curva relacionados con la derivada

En la figura 6.2 se han representado algunos elementos de una curva que se expresan por medio de la derivada.

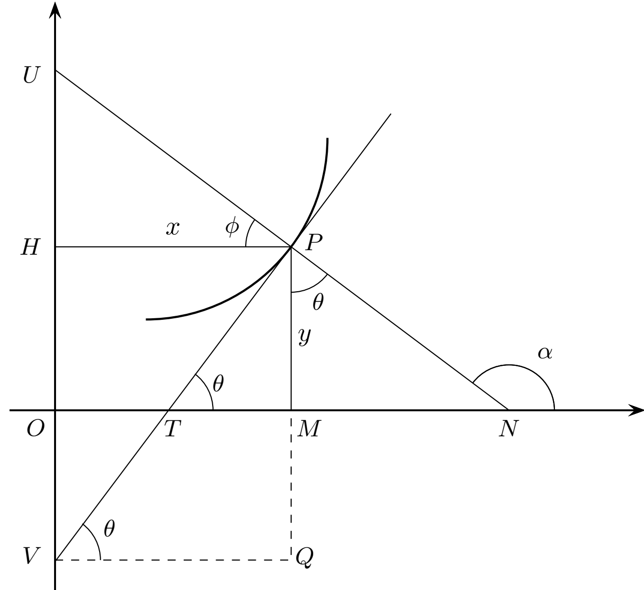


Figura 6.2. Elementos de una curva relacionados con la derivada

- La pendiente de la tangente es $\operatorname{tg}(\theta) = y'$.
- La pendiente de la normal es $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\pi/2 + \theta) = -1/y'$.
- El segmento $\overline{TM}$ es la **subtangente**. Su longitud viene dada por $\overline{TM} = y \operatorname{cotg}(\theta) = y/y'$.
- El segmento $\overline{MN}$ es la **subnormal**. Su longitud viene dada por $\overline{MN} = y \operatorname{tg}(\theta) = yy'$.

- Los segmentos interceptados en los ejes OX y OY por la tangente son

$$\begin{cases} \overline{OT} = \overline{OM} - \overline{TM} = x - y/y' \\ \overline{OV} = \overline{PM} - \overline{PQ} = y - x\,\mathrm{tg}(\theta) = y - xy' \end{cases}$$

- Los segmentos interceptados en los ejes OX y OY por la normal son

$$\begin{cases} \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = x + y\,\mathrm{tg}(\theta) = x + yy' \\ \overline{OU} = \overline{OH} + \overline{HU} = y + x\,\mathrm{tg}(\phi) = y + x\,\mathrm{tg}(\pi/2 - \theta) = y + x/y' \end{cases}$$

6.2.3. Derivadas laterales

6.5 Definición. Se dice que f es **derivable por la izquierda en** a si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la izquierda** de f en a.

Análogamente se dice que f es **derivable por la derecha en** a, si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la derecha** de f en a.

Teniendo en cuenta la relación que hay entre el límite de una función en un punto y los límites laterales, es claro que:

i) Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.

ii) Si $a = \min I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

  a) f es derivable en a.

  b) Las derivadas por la izquierda y por la derecha de f en a existen y coinciden.

6.2.4. Propiedades de las funciones derivables. Reglas de derivación

El siguiente resultado nos dice que la derivabilidad es una propiedad más fuerte que la continuidad.

6.6 Proposición. *Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.*

Demostración. En efecto, si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en a, de la igualdad:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (x \in I,\ x \neq a)$$

se sigue que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, es decir, f es continua en a. □

6.7 Teorema (Reglas de derivación). *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

i) La funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

ii) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, la función cociente f/g es derivable en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Demostración. Las reglas de derivación se prueban muy fácilmente haciendo uso de las propiedades algebraicas de los límites y la definición de derivada. Es suficiente que tengas en cuenta las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
\frac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)}{x-a} &= -\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\frac{1}{g(x)g(a)}
\end{aligned}$$

De la primera y segunda igualdades se deduce, tomando límites para $x \to a$, las reglas para la derivada de una suma y de un producto. Igualmente, de la tercera igualdad, se deduce la derivada de $\frac{1}{g}$, de donde, se obtiene la derivada de $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ haciendo uso de la regla para derivar un producto. □

Como las funciones constantes tienen derivada nula en todo punto y la función identidad, $f(x) = x$, tiene derivada igual a 1 en todo punto, aplicando las reglas de derivación anteriores se obtiene el siguiente corolario.

6.8 Corolario. *Las funciones polinómicas son derivables en todo punto y las funciones racionales son derivables en todo punto de su conjunto natural de definición. Además la derivada de la función polinómica $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ en cada punto $x \in \mathbb{R}$ viene dada por:*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$$

6.9 Teorema (Derivación de una función compuesta o regla de la cadena). *Sean* $f : I \to \mathbb{R}$ *y* $g : J \to \mathbb{R}$ *con* $f(I) \subset J$, *y sea* $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ *la función compuesta. Supongamos que* f *es derivable en* $a \in I$ *y que* g *es derivable en* $f(a)$. *Entonces* h *es derivable en* a *y* $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

En particular, si g *es derivable en* J, *la función compuesta* $h = g \circ f$ *es derivable en todo punto de* I *donde* f *sea derivable.*

Demostración. Pongamos $b = f(a)$. Tenemos que probar que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b)f'(a)$. Por hipótesis se cumple que :

$$\lim_{y\to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(b)f'(a)$$

La idea de la demostración es hacer en esta igualdad la sustitución $y = f(x)$. Como no está garantizado por las hipótesis hechas que para $x \neq a$ se tenga $f(x) \neq b$, no está justificado hacer directamente la sustitución indicada (dividir por cero está prohibido). Podemos evitar esta dificultad como sigue. Definamos la función $\varphi : J \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \ (y \neq b), \ \varphi(b) = g'(b)$$

Con ello la función φ es continua en b. Es inmediato ahora comprobar que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ se verifica que:

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \varphi(f(x))\frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6.1}$$

Ahora, como f es continua en a (porque es derivable en a) y φ es continua en $b = f(a)$, se sigue que $\varphi \circ f$ es continua en a, por lo que:

$$\lim_{x\to a} \varphi(f(x)) = \varphi(f(a)) = \varphi(b) = g'(b).$$

La igualdad (6.1) nos dice ahora que:

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b)f'(a)$$

como queríamos probar. □

Regla de la cadena al estilo Leibniz. Una demostración de la regla de la cadena al "estilo Leibniz" podría ser como sigue. Por una parte, tenemos que y es función de x a través de g, es decir, $y = g(x)$. También tenemos que x es función de t a través de f, $x = f(t)$. Entonces la variación de y respecto a t se hace por intermedio de x:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{6.2}$$

Hemos acabado. Todo lo que hemos hecho ha sido multiplicar y dividir por $\mathrm{d}x$.

No sé lo que pensará tú de esto, pero a mí me parecería una broma que alguien pretendiera que lo que hemos hecho es una demostración. Primero: ¿qué es $\mathrm{d}x$? Porque si es un símbolo,

no tiene sentido multiplicar y dividir por él (salvo que a esta operación se le hubiera asignado previamente un significado preciso) y si es un número ¿cómo está definido? ¿qué relación tiene ese número con la derivada? Preguntas sin respuesta. A esto me refería al decir que una notación, por sí sola, no sirve para demostrar nada.

Además, el simbolismo empleado en la igualdad (6.2) no indica dónde se evalúa cada una de las derivadas, y eso es fundamental para entender la regla de la cadena. Fíjate que la regla de la cadena nos dice que la derivada de una función compuesta de dos funciones derivables, $h(x) = (g \circ f)(x)$, viene dada por

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x) \tag{6.3}$$

que es un producto de dos funciones, $g'(f(x))$ y $f'(x)$, pero la primera de ellas $g'(f(x)) = (g' \circ f)(x)$ es una *función compuesta*. Por eso si queremos volver a derivar en la igualdad (6.3), debemos aplicar la regla para derivar un producto y, para derivar el primer factor, debemos aplicar la regla de la cadena. Es por eso que, en la regla de la cadena, es fundamental indicar los puntos donde se evalúan las derivadas.

La notación en la igualdad (6.2) es mala porque no indica dónde se evalúa cada una de las derivadas. Pero también es mala por las razones siguientes.

- Una misma letra representa dos funciones distintas. En (6.2) la letra y aparece a la izquierda y a la derecha. A la izquierda representa la función compuesta $y = g(f(t))$, a la derecha representa la función $y = g(x)$.

- Una misma letra representa una función y una variable. La letra x en la parte derecha representa la variable en $y = g(x)$, y también representa la función $x = f(t)$.

Demasiado confuso ¿verdad? A pesar de lo dicho, la igualdad (6.2) aparece en muchos textos de matemáticas para ingenieros y en textos de física, sin ningún comentario, sin explicar lo que significa y pretendiendo que constituye por sí misma una demostración. Lo peor de todo, es que si te la enseñan así puedes creer que la entiendes, y entonces una de dos: o la entiendes de verdad, como acabo de explicarlo, o te engañas y realmente no sabes lo que crees saber. Lamentablemente, de estas dos posibilidades la más frecuente es la segunda.

Y... sin embargo, la igualdad (6.2) es muy simple y fácil de recordar, y permite conjeturar la regla de la cadena sin necesidad de demostrarla (por eso decimos que la notación de Leibniz tiene un gran valor heurístico). Mi consejo es el siguiente: puedes usar la notación de Leibniz siempre que te ayude en lo cálculos, pero no debes dejarte llevar por la notación sino que debes entender lo que estás haciendo en cada momento.

6.10 Ejemplo. Sabiendo que $y = \operatorname{sen} x$ y $x = \cos t$, se pide calcular la derivada de y con respecto a t.

Lo que nos piden es calcular la derivada de la función compuesta $h(t) = \operatorname{sen}(\cos t)$. Aquí $g(x) = \operatorname{sen} x$, $f(t) = \cos t$. Tenemos que

$$h'(t) = g'(f(t))f'(t) = -\cos(\cos t)\operatorname{sen} t$$

Al estilo Leibniz:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos x(-\operatorname{sen} t) = -\cos x \operatorname{sen} t$$

Pero esta igualdad debe ser función de t por lo que hay que sustituir $x = \cos t$ y se vuelve a obtener el resultado anterior. ♦

6.2.5. Ejercicios propuestos

Empezaremos con algunas de las aplicaciones más sencillas y atractivas del cálculo diferencial. En esquema, se trata de lo siguiente: calcular la tasa de variación *de una magnitud cuando se conoce la tasa de variación de otra magnitud relacionada con ella. En este tipo de ejercicios la "tasa de variación" se interpreta como una derivada y, en la mayoría de los casos, basta usar la regla de la cadena para obtener lo que se pide. Hay que elegir las unidades de acuerdo con los datos del problema; por ejemplo, si un volumen se mide en litros tendremos que medir longitudes con decímetros.*

175. ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?

176. Se está llenando un globo de forma esférica con gas a razón de 50cm^3/s. Calcula la velocidad a la que está aumentando el radio, r, del globo cuando su valor es $r = 5$.

177. Un punto P se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5cm/sg. Calcula la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$.

178. Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

179. El volumen de un cubo está aumentando a razón de 70cm^3 por minuto. ¿Con qué rapidez está aumentando el área cuando la longitud del lado es de 12cm?

180. Un barco A se desplaza hacia el oeste con una velocidad de 20 millas por hora y otro barco B avanza hacia el norte a 15 millas por hora. Ambos se dirigen hacia un punto O del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos A y B al punto O son, respectivamente, de 15 y de 60 millas, se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido 2 horas? ¿En qué momento están más próximos uno de otro?

181. Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de 50cm^3 por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15cm?

182. Un hombre se aleja de una farola a razón de 1,5m/sg. Sabiendo que la altura del hombre es de 1,8 metros y la de la farola de 15 metros, calcula la velocidad a la que está aumentando la sombra del hombre proyectada por la luz.

183. Un faro, cuya linterna gira a 8 revoluciones por minuto, se encuentra situado a 3 kilómetros de una costa rectilínea. Calcula la velocidad con que el rayo de luz recorre la orilla cuando el ángulo de incidencia del rayo de luz con la línea de la costa es de 45 grados.

Los siguientes ejercicios son de cálculo de derivadas y de tangentes y normales a distintas curvas. Cuando en un ejercicio intervienen parámetros, debes expresar las soluciones de la forma más sencilla posible.

184. Calcula $(f \circ g)'(x)$ en el valor indicado de x en los siguientes casos:

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}, \quad g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$
2. $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$

185. Calcula en cada caso el valor de a y b en función de c, para que exista la derivada en el punto c de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant c \\ ax+b, & x > c \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x| > c \\ a + bx^2, & |x| \leqslant c \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant c \\ ax+b, & x > c \end{cases}$$

186. Supongamos que f es derivable en a, g es continua en a y $f(a) = 0$. Prueba que fg es derivable en a.

187. ¿Es cierta la igualdad $f'(a) = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(a+t) - f(a-t)}{2t}$? Justifica tu respuesta.

188. Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los siguientes valores en $x = 2$ y $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2π	5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los valores dados de x:

a) $f(x)g(x), \quad x = 3$ b) $f(x)/g(x), \quad x = 3$

c) $f(g(x)), \quad x = 2$ d) $\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}, \quad x = 2$

189. Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los valores que se indican en la tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	5	2	-5
1	3	-2	0	1
2	0	2	3	1
3	2	4	1	-6

Calcula una tabla análoga para las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

190. Calcula directamente, aplicando la definición, la derivada de $f(x) = x^3$ en un punto genérico a.

191. Calcula directamente, aplicando la definición, la derivada de $f(x) = \sqrt{x+7}$ en el punto $a = -1$.

192. Supongamos que f es una función que verifica una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |x|^r$ en algún intervalo abierto que contiene a cero, donde $r > 1$. Prueba que f es derivable en 0.

193. Sea f una función tal que $f(x+h) = f(x) + 3xh + h^2 - 2h$ para todos $x, h \in \mathbb{R}$. Calcula $f'(0)$ y $f'(2)$.

194. Calcula la derivada en todo punto de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

195. Desarrolla $(1+x)^n$ por el binomio de Newton y deriva la igualdad resultante para probar las igualdades siguientes:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}, \qquad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

196. Calcula los puntos en que la cúbica de ecuación $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c, d son constantes reales, tiene tangente horizontal. Debes estudiar los distintos casos posibles.

197. Calcula un punto c por la condición de que la tangente a la parábola $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ en el punto $(c, f(c))$, sea paralela a la cuerda que une dos puntos dados $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$.

198. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ en un punto genérico (u, v) de la misma.

199. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una hipérbola de ecuación cartesiana $x^2 - y^2 = 1$, en un punto genérico (u, v) de la misma.

200. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en un punto (u, v) de la misma.

6.2.6. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 79 ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?

Solución. Sea r el radio del cilindro y h la altura medidos en decímetros. Sea $V(t)$ el volumen de agua, medido en litros (dcm^3), que hay en el cilindro en el tiempo t medido en minutos. La información que nos dan es una tasa de variación

$$V(t+1) - V(t) = -3000 \quad \text{litros por minuto}$$

En este tipo de ejercicios la tasa de variación se interpreta como una derivada: $V'(t) = -3000$. Fíjate que $V(t+t_0)-V(t_0) \approxeq V'(t_0)t$, por lo que la interpretación es razonable. El signo negativo de la derivada es obligado ya que el volumen disminuye con el tiempo. Como el radio es constante pero la altura del agua depende del tiempo, tenemos

$$V(t) = \pi r^2 h(t)$$

y deducimos

$$V'(t) = -3000 = \pi r^2 h'(t)$$

Por tanto

$$h'(t) = -\frac{3000}{\pi\, r^2} \quad \text{decímetros por minuto}$$

Si expresamos las medidas en metros, entonces $h'(t) = -\dfrac{3}{\pi r^2}$ metros por minuto.

Observa que lo que realmente hemos calculado es:

$$V(t+1)-V(t) = \pi r^2(h(t+1)-h(t)) \quad \longrightarrow \quad h(t+1)-h(t) = \frac{V(t+1)-V(t)}{\pi r^2} = -\frac{3000}{\pi\, r^2}$$

que es la tasa de variación de la altura en un intervalo de 1 minuto. Pero, como ya te he dicho, en estos ejercicios se identifica la tasa de variación con una derivada, lo cual es, claro está, una aproximación. ☺

Ejercicio resuelto 80 Un punto P se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5cm/sg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$.

Solución. Sean $(x(t), y(t))$ las coordenadas, medidas en centímetros, del punto P en el instante t medido en segundos. Nos dicen que $y(t) \geqslant 0$ y que $x(t) = y(t)^2$. La distancia del punto P al origen viene dada por $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, por lo que

$$f'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

Lo que nos piden es $f'(t_0)$ sabiendo que $x(t_0) = 9$. En tal caso ha de ser $y(t_0) = 3$. También conocemos $x'(t) = 5$ (cm/sg). Con ello es fácil deducir el valor de $y'(t_0) =$

$\dfrac{x'(t_0)}{2y(t_0)} = \dfrac{5}{6}$. Finalmente,

$$f'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x(t_0)^2 + y(t_0)^2}} = \frac{45 + 3(5/6)}{81 + 9} = \frac{95}{6\sqrt{10}} \text{ cm/sg}$$

☺

Ejercicio resuelto 81 Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

Solución. Expresaremos todas las medidas en metros. Si $V(t)$ es el volumen de agua que hay en el depósito en el tiempo t medido en segundos, nos dicen que $V'(t) = \dfrac{9}{10^3}$ m^3/sg.

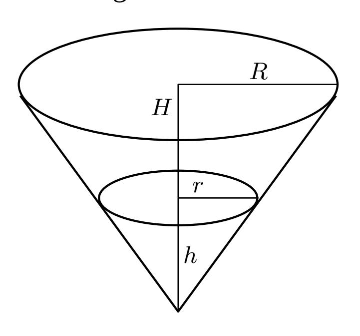


Figura 6.3. Depósito cónico

Sabemos que $V(t) = \dfrac{1}{3}\pi\, r(t)^2 h(t)$ donde $h(t)$ es la altura, medida desde el vértice, alcanzada por el agua en el tiempo t y $r(t)$ es el radio de la sección transversal del cono a la distancia $h(t)$ desde el vértice. Por semejanza de triángulos deducimos que $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{H}$, de donde, $r = r(t) = \dfrac{R}{H}h(t) = \dfrac{1}{2}h(t)$. Luego $V(t) = \dfrac{1}{12}\pi\, h(t)^3$, y

$$V'(t) = \frac{9}{10^3} = \frac{\pi}{4}h(t)^2 h'(t).$$

Luego, cuando $h(t_0) = 6$, deducimos que $\dfrac{9}{10^3} = \dfrac{\pi}{4}36h'(t_0)$, esto es, $h'(t_0) = \dfrac{1}{10^3\pi}$ m/sg $\approxeq$ $1,146$ m/h. ☺

Ejercicio resuelto 82 El volumen de un cubo está aumentando a razón de 70 cm^3 por minuto. ¿Con qué rapidez está aumentando el área cuando la longitud del lado es de 12 cm?

Solución. Sea $V(t)$ el volumen del cubo, medido en centímetros cúbicos, en el tiempo t, medido en minutos. Si $L(t)$ es la longitud en centímetros del lado en el tiempo t, tenemos que $V(t) = L(t)^3$, de donde, $L'(t) = \dfrac{V'(t)}{3L(t)^2}$. Como nos dicen que $V'(t) = 70$ cm/min, deducimos que cuando $L(t_0) = 12$, $L'(t_0) = \dfrac{70}{3(12)^2}$. El área del cubo viene dada por $S(t) = 6L(t)^2$, deducimos que $S'(t_0) = 12L(t_0)L'(t_0) = \dfrac{70}{3}$ cm^2/min. ☺

Ejercicio resuelto 83 Un barco A se desplaza hacia el oeste con una velocidad de 20 millas por hora y otro barco B avanza hacia el norte a 15 millas por hora. Ambos se dirigen hacia un punto O del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos A y B al punto O son, respectivamente, de 15 y de 60 millas, se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha

transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido 2 horas? ¿En qué momento están más próximos uno de otro?

Solución. Tomamos el punto O como origen de coordenadas, tal como se indica en la figura. Llamemos $x(t)$ a la distancia, medida en millas, que separa el barco A de O. Nos dicen que $x(0) = 15$ y $x'(t) = -20$ millas por hora. Observa que como la función $x(t)$ es decreciente su derivada debe ser negativa. Análogamente, sea $y(t)$ la distancia que separa al barco B de O.

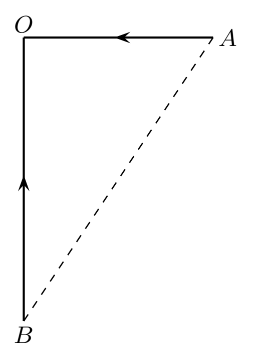


Figura 6.4. Cruce de barcos

Nos dicen que $y(0) = 60$ y $y'(t) = -15$ millas por hora. La distancia entre los dos barcos viene dada por $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Tenemos

$$f'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

Cuando ha pasado una hora $x(1) = 15 - 20 = -5$, $y(1) = 60 - 15 = 45$. Deducimos que

$$f'(1) = \frac{(-5)(-20) + 45(-15)}{\sqrt{(-5)^2 + (45)^2}} = -\frac{115}{\sqrt{82}} \text{ millas/h}$$

Donde el sigo negativo indica que se están acercando (la distancia entre ellos está disminuyendo).

Cuando han pasado dos horas $x(2) = 15 - 40 = -25$, $y(2) = 60 - 30 = 30$. Deducimos que

$$f'(2) = \frac{(-25)(-20) + 30(-15)}{\sqrt{(-25)^2 + (30)^2}} = \frac{10}{\sqrt{61}} \text{ millas/h}$$

Donde el sigo positivo indica que se están alejando (la distancia entre ellos está aumentando).

La distancia entre los dos barcos es mínima cuando la derivada es nula (fíjate que la derivada pasa de negativa a positiva). La condición $f'(t_0) = 0$ equivale a la igualdad $-20\,x(t_0) - 15y(t_0) = 0$. Sustituyendo en ella $x(t_0) = 15 - 20\,t_0$, $y(t_0) = 60 - 15\,t_0$, obtenemos $t_0 = \frac{48}{25}$. $x(\frac{48}{25}) = -\frac{117}{5}$, $y(\frac{48}{25}) = \frac{156}{5}$. La distancia mínima a que se cruzan los barcos es $f(\frac{48}{25}) = 39$ millas. ☺

Ejercicio resuelto **84** Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de $50\,\text{cm}^3$ por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide $15\,\text{cm}$?

Solución. El volumen de la bola en el instante t minutos viene dado por $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi\, r(t)^3$ centímetros cúbicos. Nos dicen que $V'(t) = -50$. Deducimos que $-50 = 4\,\pi\, r(t)^2 r'(t)$. Si $r(t_0) = 15$, se sigue que

$$r'(t_0) = \frac{-50}{4\,\pi(15)^2} = -\frac{1}{18\,\pi} \quad \text{cm/min}$$

La derivada es negativa, como debe ser, ya que el radio está disminuyendo. ☺

Ejercicio resuelto **85** Calcula $(f \circ g)'(x)$ en el valor indicado de x en los siguientes casos:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}, \quad g(x)=10x^2+x+1, \quad x=0$

b) $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2, \quad g(x)=\dfrac{1}{x^2}-1, \quad x=-1$

Solución. Este ejercicio lo puedes hacer de dos formas: calculando en caso la función compuesta $(f\circ g)(x)$ y derivándola, o aplicando la regla de la cadena sin necesidad de calcular previamente la función compuesta. Esta segunda forma es mucho más rápida. Las derivadas que nos piden son las siguientes.

a) $f'(x)=\dfrac{2-x^2}{(x^2+1)^2}$, $g'(x)=20x+1 \longrightarrow (f\circ g)'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(1)g'(0)=\dfrac{1}{4}$. El otro apartado se hace igual. ☺

Ejercicio resuelto **86** Calcula en cada caso el valor de a y b en función de c, para que exista la derivada en el punto c de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant c\\ ax+b, & x>c\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x|>c\\ a+bx^2, & |x|\leqslant c\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leqslant c\\ ax+b, & x>c\end{cases}$$

Solución. Consideremos la segunda de las funciones anteriores. Tenemos que $f(x)=\frac{1}{|x|}$ para $x<-c$ o $x>c$, y $f(x)=a+bx^2$ para $-c\leqslant x\leqslant c$. Imponemos primero la condición de que f sea continua en c. Tenemos que $f(c)=a+bc^2=\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x)$, y $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x)=\frac{1}{|c|}=\frac{1}{c}$. Debemos imponer la condición $a+bc^2=\frac{1}{c}$. Impondremos también la condición de que los límites laterales en c de la derivada de f coincidan. Para $x>c$ es $f(x)=\frac{1}{x}$, por lo que

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{c^2}.$$

Análogamente

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} 2bx=2bc.$$

Debemos imponer la condición $2bc=-\frac{1}{c^2}$. Deducimos que $b=-\frac{1}{2c^3}$ y $a=-bc^2+\frac{1}{c}=\frac{3}{2c}$.

Observa que las condiciones que hemos obtenido son necesarias para que f sea derivable en c. Pero dichas condiciones también son suficientes como consecuencia de la proposición 6.19. No es necesario, por ello, que comprobemos que, con los valores de a y de b obtenidos antes, efectivamente f es derivable en c.

Las otras dos funciones se estudian de la misma forma. ☺

Ejercicio resuelto **87** ¿Es cierta la igualdad $f'(a)=\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(a+t)-f(a-t)}{2t}$? Justifica tu respuesta.

Solución. Tenemos que

$$\frac{f(a+t)-f(a-t)}{2t} = \frac{f(a+t)-f(a)}{2t} + \frac{f(a)-f(a-t)}{2t} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{f(a+t)-f(a)}{t} + \frac{1}{2}\frac{f(a-t)-f(a)}{-t}$$

Y basta tener en cuenta que:

$$\lim_{t\to a}\frac{f(a+t)-f(a)}{t} = \lim_{t\to a}\frac{f(a-t)-f(a)}{-t} = f'(a)$$

☺

Ejercicio resuelto **88** Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los siguientes valores en $x=2$ y $x=3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2π	5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los valores dados de x:

a) $f(x)g(x), \quad x=3$ b) $f(x)/g(x), \quad x=3$
c) $f(g(x)), \quad x=2$ d) $\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}, \quad x=2$

Solución. a) $(fg)'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=-8\pi+15$.

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(3) = \dfrac{f'(3)g(3)-f(3)g'(3)}{g(3)^2} = \dfrac{-8\pi-15}{16}$.

c) $(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)g'(2)=-1$.

d) $h(x)=\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}$, $h'(2)=\dfrac{f'(2)f(2)+g'(2)g(2)}{\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}} = -\dfrac{5}{3\sqrt{17}}$. ☺

Ejercicio resuelto **89** Supongamos que f es una función que verifica una desigualdad del tipo $|f(x)|\leqslant |x|^r$ en algún intervalo abierto que contiene a cero, donde $r>1$. Prueba que f es derivable en 0.

Solución. La desigualdad $|f(x)|\leqslant |x|^r$, con $r>0$, implica que $f(0)=0$. Tenemos que

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant |x|^{r-1}$$

Como $r-1>0$, se tiene que $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{r-1}=0$, lo que, por la desigualdad anterior, implica que

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = 0 \iff \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$$

Luego f es derivable en 0 y $f'(0)=0$.

Ejercicio resuelto 90 Calcula la derivada en todo punto de la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Solución. Para $x\neq 0$ se verifica que $|f(x)|=\left|x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right|\leqslant x^2$. Como $f(0)=0$, resulta que $|f(x)|\leqslant x^2$ para todo $x\in\mathbb{R}$. El ejercicio anterior implica que f es derivable en 0 con $f'(0)=0$. En los intervalos $]-\infty,0[$ y $]0,+\infty[$ la función dada es derivable por ser producto y composición de funciones derivables en dichos intervalos, y podemos calcular su derivada con las reglas de derivación usuales:

$$f'(x)=2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

Observa que esta derivada tiene una discontinuidad esencial en 0. ☺

Ejercicio resuelto 91 Calcula los puntos en que la cúbica $y=ax^3+bx^2+cx+d$, donde a,b,c,d son constantes reales, tiene tangente horizontal. Debes estudiar los distintos casos posibles.

Solución. La tangente es horizontal en los puntos donde se anula la derivada, esto es, en las soluciones reales de la ecuación $3ax^2+2bx+c=0$, las cuales viene dadas por

$$\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-12ac}}{6a}$$

Si el discriminante $4b^2-12ac<0$ no hay ninguna solución real. Si $4b^2-12ac=0$ hay una solución real doble (en la que también se anula la derivada segunda pero no se anula la derivada tercera, es un punto de inflexión). Si $4b^2-12ac>0$ hay dos puntos de tangencia horizontal. ☺

Ejercicio resuelto 92 Calcula un punto c por la condición de que la tangente a la parábola $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ en el punto $(c,f(c))$, sea paralela a la cuerda que une dos puntos dados $A=(a,f(a))$ y $B=(b,f(b))$.

Solución. Dos rectas en el plano son paralelas cuando tienen igual pendiente. Debemos calcular c por la condición

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\iff\frac{b^2-a^2+\alpha(b-a)}{b-a}=2c+\alpha\iff b+a+\alpha=2c+\alpha\iff c=\frac{a+b}{2}$$

☺

Ejercicio resuelto 93 Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una hipérbola de ecuación cartesiana $y^2-x^2=1$, en un punto genérico (u,v) de la misma.

Solución. Podemos expresar y como función de x. Tenemos que $y^2=1+x^2$, lo que da lugar a dos curvas $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ (la parte de la hipérbola en el semiplano superior $y>0$) y $g(x)=-\sqrt{1+x^2}$ (la parte de la hipérbola en el semiplano inferior $y<0$). La tangente en un punto (u,v) con $v=f(u)>0$ es la recta de ecuación:

$$y=f(u)+f'(u)(x-u)=v+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}(x-u)=v+\frac{ux-u^2}{v}\iff vy-ux=1$$

La tangente en un punto (u, v) con $v = g(u) < 0$ es la recta de ecuación:

$$y = g(u) + g'(u)(x - u) = v - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff vy - ux = 1$$

En cualquier caso se obtiene la recta de ecuación $vy - ux = 1$.

Podemos proceder también sin necesidad de calcular y en función de x. Para ello, basta observar que si expresamos y en función de x y obtenemos $y = \varphi(x)$ entonces se tiene que $\varphi(x)^2 - x^2 = 1$. Podemos derivar ahora la función $x \mapsto \varphi(x)^2 - x^2$ con respecto a x. La derivada es $2\varphi(x)\varphi'(x) - 2x$ y, como dicha función es constante igual a 1, su derivada debe ser nula. Luego

$$2\varphi(x)\varphi'(x) - 2x = 0 \quad \iff \quad \varphi'(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$$

Por tanto la derivada en un punto u viene dada por $\varphi'(u) = \frac{u}{v}$ donde $v = \varphi(u)$. En consecuencia, la tangente en el punto (u, v) es la recta de ecuación:

$$y = v + \varphi'(u)(x - u) = v + \frac{u}{v}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff vy - ux = 1$$

Es decir, de esta forma, sin necesidad de calcular de forma explícita $\varphi(x)$ (que da lugar a las dos funciones anteriores $f(x)$ y $g(x)$), podemos calcular la recta tangente sin necesidad de considerar cada caso por separado.

Para que te convenzas de que esta forma de proceder es útil, considera la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Si ahora expresas y como función de x obtendrás cuatro curvas: $y_1 = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y_2 = -\sqrt{x^2 - 1}$ para ($x > 1$), y $y_3 = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y_4 = -\sqrt{x^2 - 1}$ para ($x < -1$). Para calcular la tangente en un punto (u, v) de dicha hipérbola no merece la pena considerar cada una de ellas por separado. Razonando como antes, se tiene que de cualquier forma que expresemos $y = \varphi(x)$ por la condición de que $x^2 - \varphi(x)^2 = 1$, la derivada viene dada por $\varphi'(x) = x/\varphi(x)$. Por tanto la ecuación de la recta tangente en (u, v) viene dada por:

$$y = v + \varphi'(u)(x - u) = v + \frac{u}{v}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff ux - vy = 1$$

☺

Ejercicio resuelto **94** Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto (u, v) de la misma.

Solución. Procediendo como en el ejercicio anterior debes obtener la recta de ecuación

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1$$



6.2.7. Derivabilidad de las funciones elementales

6.2.7.1. Derivabilidad de la exponencial y del logaritmo. Criterio de equivalencia logarítmica

Aceptaremos que las funciones logaritmo, exponencial, trigonométricas y sus inversas, son derivables, pues ahora no sería fácil probarlo. Más adelante dispondremos de herramientas para hacerlo con comodidad.

La función exponencial $x \mapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x$, $(x \in \mathbb{R})$, y la función logaritmo natural $x \mapsto \log x$, $(x \in \mathbb{R}^+)$, son derivables en todo punto de sus respectivos intervalos de definición, siendo:

$$(\exp)'(x) = \exp x \ \ (\forall x \in \mathbb{R}), \quad (\log)'(x) = \frac{1}{x} \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}}$$

Pues los primeros tres límites son derivadas y el cuarto se reduce fácilmente al tercero. Deducimos también un importante resultado que permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "0∞".

6.11 Teorema (Criterio de equivalencia logarítmica). *Sea $a \in I$, f y g funciones definidas en $I \setminus \{a\}$. Supongamos que $f(x) > 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, y que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se tiene que:*

i) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L$ *si, y sólo si,* $\lim_{x\to a} g(x)(f(x) - 1) = L$.

ii) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$ *si, y sólo si,* $\lim_{x\to a} g(x)(f(x) - 1) = +\infty$.

iii) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$ *si, y sólo si,* $\lim_{x\to a} g(x)(f(x) - 1) = -\infty$.

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$\varphi(x) = \frac{\log x}{x-1}, \ (x \neq 1), \ \varphi(1) = 1.$$

Nótese que φ es una función continua. Pongamos:

$$f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x)\log(f(x))\big) = \exp\big(g(x)(f(x)-1)\varphi(f(x))\big)$$

Puesto que $\lim_{x\to a} \varphi(f(x)) = 1$ se sigue que:

$$\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\varphi(f(x)) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

si, y sólo si

$$\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

lo que prueba las afirmaciones hechas. □

Las afirmaciones que se hacen en la siguiente proposición son consecuencia fácil de la regla de la cadena.

6.12 Proposición. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in I$. Se verifica entonces que:*
i) f es derivable en a si, y sólo si, la función $h(x) = \exp(f(x))$ es derivable en a en cuyo caso $h'(a) = f'(a)\exp(f(a))$.
ii) g es derivable en a si, y sólo si, la función $\varphi(x) = \log(g(x))$ es derivable en a en cuyo caso $\varphi'(a) = \dfrac{g'(a)}{g(a)}$.
iii) Si f y g son derivables en a la función $\psi(x) = g(x)^{f(x)}$ también es derivable en a y

$$\psi'(a) = \psi(a)\left(\log(g(a))f'(a) + f(a)\frac{g'(a)}{g(a)}\right)$$

Te recuerdo que una forma cómoda para trabajar con funciones de la forma $\psi(x) = g(x)^{f(x)}$ es escribirlas como exponenciales $\psi(x) = \exp\big(f(x)\log(g(x))\big)$.

6.2.7.2. Derivabilidad de las funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son derivables en todo punto verificándose que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.}$$

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se deducen con facilidad a partir de las derivadas del seno y del coseno.

6.2.7.3. Derivabilidad de las funciones hiperbólicas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas y de sus inversas se deducen con facilidad de las derivadas del logaritmo y de la exponencial. Se comprueba sin dificultad que

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh x, \qquad \cosh'(x) = \operatorname{senh} x$$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas son muy útiles para calcular primitivas de funciones en las que intervienen raíces cuadradas de trinomios de segundo grado.

$\operatorname{argsenh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\operatorname{argsenh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad x > 1$	$\operatorname{argcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argcosech}(x) = \operatorname{argsenh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad x \neq 0$	$\operatorname{argcosech}'(x) = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{argsech}(x) = \operatorname{argcosh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad 0 < x < 1$	$\operatorname{argsech}'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

6.3. Teoremas de Rolle y del valor medio

Los resultados más útiles del cálculo diferencial se refieren a funciones derivables en todos los puntos de un intervalo. El teorema del valor medio es frecuentemente atribuido a Joseph Louis Lagrange; no obstante, fue publicado por vez primera en 1806 por el físico André Marie Ampére que justificaba el resultado usando ideas de Lagrange y suponiendo que la función derivada era continua; lo cual, como se verá enseguida, es innecesario. Quince años más tarde Augustin Cauchy volvió a probar el teorema con las mismas hipótesis. El teorema del valor medio es uno de los resultados más útiles del Cálculo. Su utilidad se debe principalmente a que dicho teorema permite acotar el incremento de una función cuando se conoce una cota de su derivada.

Michel Rolle (1652 - 1719) fue miembro de la Académie des Sciences y en 1691, estudiando un método para resolver ecuaciones, estableció, sin demostrar, el teorema que ahora lleva su nombre que, como veremos, es esencialmente equivalente al teorema del valor medio.

6.13 Definición. Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* (resp. *mínimo relativo*) si hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$ y $\forall x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$). La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

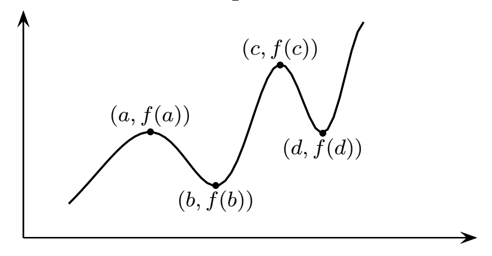


Figura 6.5. Extremos relativos

La función f tiene máximos relativos en los puntos a y c y mínimos relativos en los puntos b y d. Nótese que $f(d) > f(a)$, es decir, el valor de una función en un mínimo relativo puede ser mayor que el valor en un máximo relativo.

6.14 Proposición (Condición necesaria de extremo relativo). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un extremo relativo en a y que f es derivable en a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.*

Demostración. Supongamos que a es un máximo relativo de f. Entonces hay un número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$ y $\forall x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$. Puesto que f es derivable en a y el punto a no es un extremo del intervalo I, se verifica que:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Puesto que para $a-r<x<a$ es $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$.

Puesto que para $a<x<a+r$ es $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$.

Por tanto $f'(a) = 0$. □

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:



- Que el punto a sea un extremo relativo de f.
- Que f sea derivable en a.

La expresión "como f tiene un extremo en a, su derivada debe anularse en a" no es, en general, correcta. Los siguientes ejemplos lo dejan bien claro:

- La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$, tiene claramente un mínimo relativo (y también absoluto) en 0, pero no es derivable en 0, por lo que no tiene ningún sentido decir que su derivada se anula en 0.
- La función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3$, es estrictamente creciente, es derivable en todo punto y su derivada solamente se anula en $x=0$. Tiene un mínimo absoluto en -1 y un máximo absoluto en 1; dichos puntos no son extremos relativos de la función. Este ejemplo también muestra que la condición necesaria de extremo relativo no es suficiente.

Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** o **puntos singulares** de dicha función.

6.15 Teorema (Teorema de Rolle). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verificando que $f(a)=f(b)$. Entonces existe algún punto $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.*

Demostración. La continuidad de f en $[a,b]$ garantiza que f alcanza en un punto $u\in[a,b]$ un mínimo absoluto y en un punto $v\in[a,b]$ un máximo absoluto. Si $\{u,v\}=\{a,b\}$, entonces será $f(u)=f(v)$ y, por tanto f es constante en $[a,b]$ y, en consecuencia, su derivada es nula. Si $\{u,v\}\neq\{a,b\}$, entonces alguno de los puntos u, v está en $]a,b[$ y es un extremo relativo de f por lo que, en virtud de la proposición anterior, concluimos que la derivada de f se anula en algún punto de $]a,b[$. □

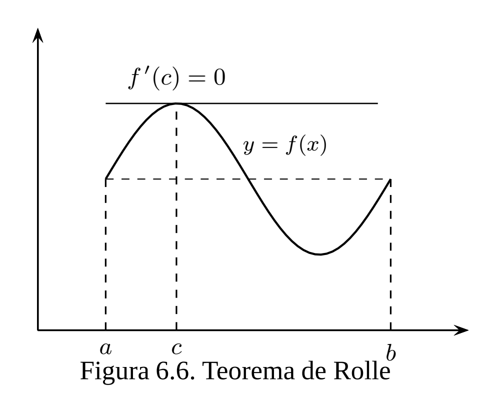


Figura 6.6. Teorema de Rolle

Observaciones. Observa que la demostración del teorema de Rolle que hemos dado, que es la usual, depende de forma esencial del teorema de Weierstrass 4.29 que garantiza la existencia de valores extremos absolutos.

El enunciado anterior del teorema de Rolle es el usual; pero, en cierto sentido, es "demasiado preciso". Esto se debe a que las hipótesis que se consideran en el teorema son las mínimas indispensables. Por ejemplo, si consideramos la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, cuya gráfica es la mitad superior de la circunferencia unidad, se tiene que f es continua en $[-1,1]$, derivable en $]-1,1[$ y, claro está, su derivada se anula en $x=0$.

Esta función no es derivable en los extremos del intervalo. Pero la situación más corriente es que la función sea derivable en todo el intervalo, incluidos sus extremos. Además, es frecuente trabajar con funciones definidas en intervalos abiertos que no tienen puntos extremos, en cuyo caso debemos elegir un intervalo apropiado para aplicar el teorema.

El teorema de Rolle se usa para estudiar raíces de ecuaciones, pues permite relacionar los ceros de una función derivable con los de su derivada. Un cero de una función es, naturalmente, un punto en el que la función se anula.

6.16 Corolario. *a) Entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay por lo menos un cero de su derivada.*

b) Entre cada dos ceros consecutivos *de la derivada de una función en un intervalo, solamente puede haber, como mucho, un cero de la función; o puede que la función no tenga ningún cero entre los dos ceros de su derivada.*

Demostración. *a)* Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo I. Sean $a, b \in I$ tales que $f(a) = f(b) = 0$. El teorema de Rolle nos dice que hay algún punto entre a y b en el que se anula la derivada de f.

b) Supongamos que s, t son ceros *consecutivos* de la derivada de f, esto es, $f'(s) = f'(t) = 0$ y f' no se anula en ningún punto comprendido entre s y t. En tal caso puede ocurrir que f no tenga ningún cero comprendido entre s y t o que tenga solamente uno. No puede ocurrir que f tenga más de un cero entre s y t, pues en tal caso su derivada tendría que anularse en algún punto comprendido entre s y t, cosa que no sucede. □

El apartado *b)* suele expresarse diciendo que *los ceros de la derivada separan los ceros de la función*. Debes entender bien lo que se afirma en *b)*. Por ejemplo, puede ocurrir que la derivada se anule en varios puntos y la función no se anule nunca: la función $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ no se anula nunca, pero su derivada $f'(x) = \cos x$ tiene infinitos ceros.

6.17 Teorema (Teorema del valor medio). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces existe algún punto $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6.4}$$

Demostración. Definamos una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) + \lambda x$ donde λ lo elegiremos por la condición de que $g(a) = g(b)$, es decir:

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \quad \longrightarrow \quad \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Podemos aplicar ahora el teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$ a la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

para deducir que hay un punto $c \in]a, b[$ tal que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

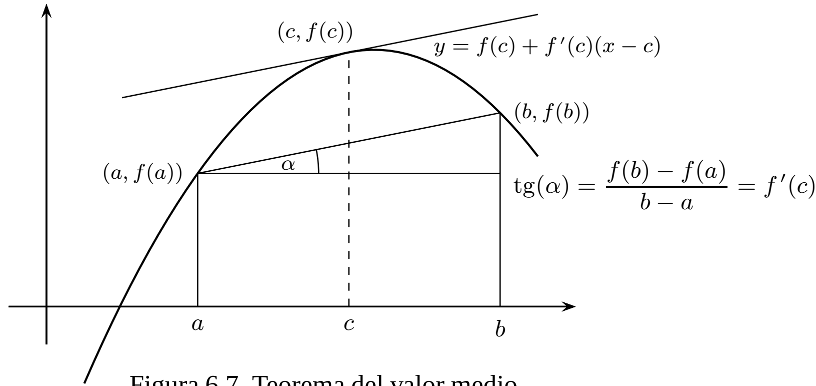


Figura 6.7. Teorema del valor medio

lo que concluye la demostración. □

Lo que afirma el teorema del valor medio es que el incremento medio de una función en un intervalo es igual a su derivada o "incremento puntual" en algún punto del mismo. Geométricamente: la tangente a la gráfica de f en algún punto c comprendido entre a y b es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a)$ y $(b, f(b))$.

Observa que el teorema del valor medio lo hemos deducido del teorema de Rolle, pero es evidente que el teorema de Rolle puede deducirse del teorema del valor medio. Son dos resultados equivalentes. En lo que sigue nos referiremos al teorema del valor medio por las siglas TVM.

6.3.1. Consecuencias del teorema del valor medio

6.18 Proposición. *Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad \textit{para todos } x, y \in I \tag{6.5}$$

En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Demostración. Dados $x, y \in I$, el TVM aplicado a la función f en el intervalo de extremos x e y nos dice que hay algún punto z en dicho intervalo tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$. Tomando valores absolutos tenemos

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leqslant M|x - y|$$

Si la derivada de f es idénticamente nula en I podemos tomar $M = 0$ en la desigualdad (6.5) para obtener que $f(x) = f(y)$ para todos $x, y \in I$, lo que nos dice que f es constante en I. □

El resultado anterior, además de su interés teórico, es muy útil para probar desigualdades.

En la proposición anterior la hipótesis de que I es un intervalo es esencial. La función $f :]0, 1[\cup]1, 2[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$ y $f(x) = 2$ si $1 < x < 2$, es derivable en todo punto con derivada nula y no es constante.

6.19 Proposición. *Sea I un intervalo, $a\in I$ y f una función continua en I y derivable en $I\setminus\{a\}$. Si la función derivada f' tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en a entonces f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en a igual al valor de dicho límite. En particular, si existe $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=L$ entonces f es derivable en a y $f'(a)=L$.*

Demostración. Supongamos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f'(x)=L$. Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $]a-\delta,a]\subset I$ y para $a-\delta<x<a$ se verifica que $|f'(x)-L|<\varepsilon$. Dado $x\in]a-\delta,a]$, podemos aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[x,a]$ y deducimos que hay algún punto $c\in]x,a[\subset]a-\delta,a[$ tal que $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$ y por tanto:

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-L\right|=|f'(c)-L|<\varepsilon.$$

Lo que prueba que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L,$$

es decir, f es derivable por la izquierda en a y la derivada por la izquierda de f en a es igual a L.

El resto de las afirmaciones del enunciado se deducen fácilmente de lo anterior. □

La proposición anterior tiene una interesante consecuencia que, entre otras cosas, nos informa de que no toda función puede ser la derivada de otra.

6.20 Corolario. *Las funciones derivadas definidas en intervalos no tienen discontinuidades evitables ni de salto.*

6.21 Proposición (Derivabilidad y monotonía). *Sea $f:I\to\mathbb{R}$ derivable en todo punto del intervalo I con la posible excepción de los puntos extremos de I. Se verifica entonces que f es creciente (resp. decreciente) en I si, y sólo si, $f'(x)\geqslant 0$ (resp. $f'(x)\leqslant 0$) para todo $x\in I$.*

Demostración. Supongamos que $f'(x)\geqslant 0$ para todo $x\in I$. Dados dos puntos $u,v\in I$ con $u<v$, podemos aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[u,v]$ para deducir que existe $c\in]u,v[$ tal que $f(v)-f(u)=f'(c)(v-u)\geqslant 0$, por lo que $f(u)\leqslant f(v)$, es decir f es creciente.

Recíprocamente, si f es creciente en I entonces para todos $a,x\in I$, con $x\neq a$, se tiene que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$, lo que implica que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\geqslant 0.$$

□

Este resultado es muy útil para probar desigualdades entre funciones. Muchos problemas de desigualdades responden al siguiente esquema.

6.22 Estrategia. Supuesto que f y g son funciones derivables, para probar que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, se hace lo siguiente:

- Se define $h(x) = g(x) - f(x)$ y se comprueba que $h(a) = 0$.
- Se comprueba que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

Esta última desigualdad implica que h es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h(a) = 0$, concluimos que $h(x) \geqslant 0$, es decir, $g(x) - f(x) \geqslant 0$, para todo $x > a$.

Naturalmente, los detalles pueden cambiar. Puede que el punto a debas elegirlo tú. Es una estrategia que tiene éxito cuando la desigualdad $h'(x) \geqslant 0$ es más fácil que la inicial. Puede ocurrir que esta desigualdad siga siendo complicada; entonces podemos aplicarle a ella el mismo procedimiento, comprobamos que $h'(a) = 0$ y que $h''(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$, lo que implica que h' es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h'(a) = 0$, concluimos que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

De la proposición (6.21) se deduce el siguiente resultado de extremo absoluto.

6.23 Proposición (Criterio de extremo absoluto). *Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en todo punto de $]a, b[$ con la posible excepción de un punto $c \in]a, b[$.*

a) Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, c[$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]c, b[$, entonces f alcanza en c un máximo absoluto en $[a, b]$.

b) Si $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, c[$ y $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]c, b[$, entonces f alcanza en c un mínimo absoluto en $[a, b]$.

Demostración. *a)* Las hipótesis hechas implican, en virtud de la proposición (6.21), que f es creciente en $[a, c]$ y decreciente en $[c, b]$. Por tanto, se verifica que $f(x) \leqslant f(c)$ para todo $x \in [a, b]$.

La demostración del apartado *b)* se hace de la misma forma. □

El anterior criterio de extremo absoluto suele aplicarse en puntos donde la derivada se anula. Aunque el resultado anterior está enunciado en términos de extremos absolutos, está claro que si se aplica a un pequeño intervalo contenido en un intervalo más grande, donde la función está definida, dicho resultado proporciona en tal caso un criterio de extremo relativo.

6.24 Teorema. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se verifica entonces una de las dos afirmaciones siguientes:*

- *f es estrictamente creciente y $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$.*
- *f es estrictamente decreciente y $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Dados dos puntos $u, v \in I$ con $u \neq v$, podemos razonar como antes para obtener que existe $c \in]u, v[$ tal que $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \neq 0$. Hemos probado así que f es inyectiva en el intervalo I. Como, además f es continua en I (por ser derivable), podemos usar el resultado 4.26 del capítulo 4, para deducir que f es estrictamente monótona en I. Es

suficiente tener en cuenta ahora la proposición anterior para concluir la demostración. □

Es importante advertir que el resultado anterior nos dice que si una función f es derivable en un intervalo y la derivada f' toma valores positivos y negativos, entonces f' se anula en algún punto. Este resultado recuerda mucho al teorema de los ceros de Bolzano para funciones continuas en un intervalo, con una notable diferencia: aquí no exigimos que la función derivada f' sea continua. De hecho, se verifica el siguiente resultado que es un teorema del valor intermedio para funciones derivadas, en el que no se supone que la derivada sea continua.

6.25 Teorema (Propiedad del valor intermedio para derivadas). *Sea φ una función definida en un intervalo I que es la derivada de alguna función en dicho intervalo. Entonces se verifica que la imagen por φ de I, $\varphi(I)$, es un intervalo.*

Demostración. Por hipótesis hay una función derivable $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$. Sean $u = \varphi(a)$, $v = \varphi(b)$ dos valores que toma la función φ, y supongamos $u < v$. Dado $\lambda \in]u, v[$, definimos la función $g(x) = f(x) - \lambda x$. Tenemos entonces $g'(a) = \varphi(a) - \lambda = u - \lambda < 0$ y $g'(b) = \varphi(b) - \lambda = v - \lambda > 0$. Por tanto, la derivada de g toma valores positivos y negativos en el intervalo I y, por el teorema 6.24, tiene que anularse, es decir, existe algún punto $c \in I$ tal que $g'(c) = \varphi(c) - \lambda = 0$, esto es, $\varphi(c) = \lambda$. Hemos probado así que si φ toma dos valores también toma todos los comprendidos entre ellos dos, es decir, que $\varphi(I)$ es un intervalo. □

6.26 Proposición (Derivación de la función inversa). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con derivada $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (y \in J). \tag{6.6}$$

Demostración. Las hipótesis hechas implican que f es estrictamente monótona y continua; por tanto es una biyección de I sobre $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es continua en J (4.25). Sea $b = f(a) \in J$. Puesto que

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{f'(a)},$$

la función $h : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} \quad \text{para } x \neq a, \quad h(a) = \frac{1}{f'(a)}$$

es continua en I. Como f^{-1} es continua en J, deducimos que $h \circ f^{-1}$ es continua en J, por lo que, en particular, $\lim\limits_{y\to b} h(f^{-1}(y)) = h(f^{-1}(b)) = h(a)$. Pero, para todo $y \in J$, con $y \neq b$ es

$$h(f^{-1}(y)) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}.$$

Concluimos así que

$$\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

La mejor forma de recordar la igualdad (6.6) es derivar por la regla de la cadena la identidad $(f\circ f^{-1})(y)=y$, con lo que se obtiene $f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y)=1$, de donde puede despejarse $(f^{-1})'(y)$.

6.27 Ejemplo (Derivabilidad de las funciones trigonométricas inversas). La función tangente es una biyección derivable del intervalo $]-\pi/2,\pi/2[$ sobre $\mathbb{R}$, cuya derivada no se anula. El teorema anterior nos dice que la función inversa, es decir, la función arcotangente es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada podemos calcularla derivando la identidad $(\operatorname{tg}\circ\operatorname{arc\,tg})(x)=x$, con lo que obtenemos

$$(1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg}x))\operatorname{arc\,tg}{}'(x)=1 \iff (1+x^2)\operatorname{arc\,tg}{}'(x)=1 \iff \operatorname{arc\,tg}{}'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Análogamente, la función seno es una biyección derivable del intervalo $]-\pi/2,\pi/2[$ sobre $]-1,1[$ cuya derivada no se anula. El teorema anterior nos dice que la función inversa, es decir, la función arcoseno es derivable en $]-1,1[$ y su derivada podemos calcularla derivando la identidad $(\operatorname{sen}\circ\operatorname{arc\,sen})(x)=x$, con lo que obtenemos:

$$\cos(\operatorname{arc\,sen}x)\operatorname{arc\,sen}{}'(x)=1 \iff \sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen}{}'(x)=1 \iff \operatorname{arc\,sen}{}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

♦

6.28 Teorema (Teorema del valor medio generalizado). *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$. Entonces existe algún punto $c\in]a,b[$ tal que*

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

Demostración. Definimos una función $h(x)=\lambda f(x)+\mu g(x)$ donde λ, μ son números que se eligen de forma que $h(a)=h(b)$, esto es, $\lambda(f(a)-f(b))=\mu(g(b)-g(a))$. Basta para ello tomar $\lambda=g(b)-g(a)$, $\mu=f(a)-f(b)$. El teorema del Rolle, aplicado a la función $h(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$, nos dice que hay un punto $c\in]a,b[$ tal que $h'(c)=0$, lo que concluye la demostración. □

6.3.2. Reglas de L'Hôpital

Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704), publicó anónimamente en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial, el cual tuvo gran éxito e influencia durante el siglo XVIII. En él aparecen los resultados que hoy llevan su nombre, que permiten resolver en muchos casos indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, que se presentan frecuentemente al estudiar el límite de un cociente de dos funciones. Si bien L'Hôpital era un escritor excepcionalmente claro y eficaz, las llamadas "reglas de L'Hôpital" no se deben a él sino a su maestro Jean Bernouilli (1667-1748). Las distintas formas de las reglas de L'Hôpital pueden resumirse en el siguiente enunciado.

6.29 Teorema (Jean Bernouilli)**.** *Sean $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x)\neq 0$, para todo $x\in]a,b[$. Sea $\alpha\in\{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:*

a) $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$

b) $\lim_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Demostración. Antes de dar una demostración al uso vamos a explicar por qué la hipótesis de que el cociente de las derivadas tiene límite implica que también lo tiene el cociente de las funciones. Para fijar ideas, consideremos el caso en que $\alpha = a$ es un número real y $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Definamos $f(a) = g(a) = 0$.

Observa que, aunque el punto $(g(x), f(x))$ recorre una trayectoria en el plano que termina en $(0, 0)$ cuando $x = a$, el límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no tiene por qué existir. Ello se debe a que la proximidad a $(0, 0)$ del punto $(g(x), f(x))$ no proporciona ninguna información sobre el valor del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$. Baste considerar que en un círculo centrado en $(0, 0)$ de radio tan pequeño como queramos, hay puntos (u, v) para los que el cociente $\frac{u}{v}$ puede tomar cualquier valor.

Geométricamente, podemos interpretar $\frac{f(x)}{g(x)}$ como la pendiente de la recta que une $(0, 0)$ con el punto $(g(x), f(x))$. Si imaginamos que el punto $\gamma(x) = (g(x), f(x))$ recorre una curva Γ en el plano que termina en $(0, 0)$, parece evidente que, cuando dicho punto está muy próximo a $(0, 0)$, el número $\frac{f(x)}{g(x)}$ está muy próximo a la pendiente de la tangente a Γ en $(g(x), f(x))$. La figura 6.8 puede servir de ayuda.

Fíjate que como f y g no se suponen derivables en $x = a$, no está garantizado que Γ tenga tangente en el origen, es decir, para $x = a$. Podemos, sin embargo, calcular la tangente a Γ en puntos distintos del origen. Para ello podemos usar que el vector tangente a Γ en un punto x_0 es $\gamma'(x_0) = (g'(x_0), f'(x_0))$, y la recta tangente en dicho punto tiene las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (g(x_0), f(x_0)) + \lambda(g'(x_0), f'(x_0))$$

Eliminando el parámetro λ en esta ecuación obtenemos la ecuación cartesiana de la tangente que resulta ser

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}(x - g(x_0))$$

Lo que nos dice que la pendiente de dicha tangente es $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. En consecuencia, la pendiente de la tangente a Γ en un punto genérico $x \neq a$ es $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

A la vista de lo anterior, se comprende ahora que si exigimos que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenga límite L en el punto a, estamos obligando a que el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ también tenga límite igual a L en a. En

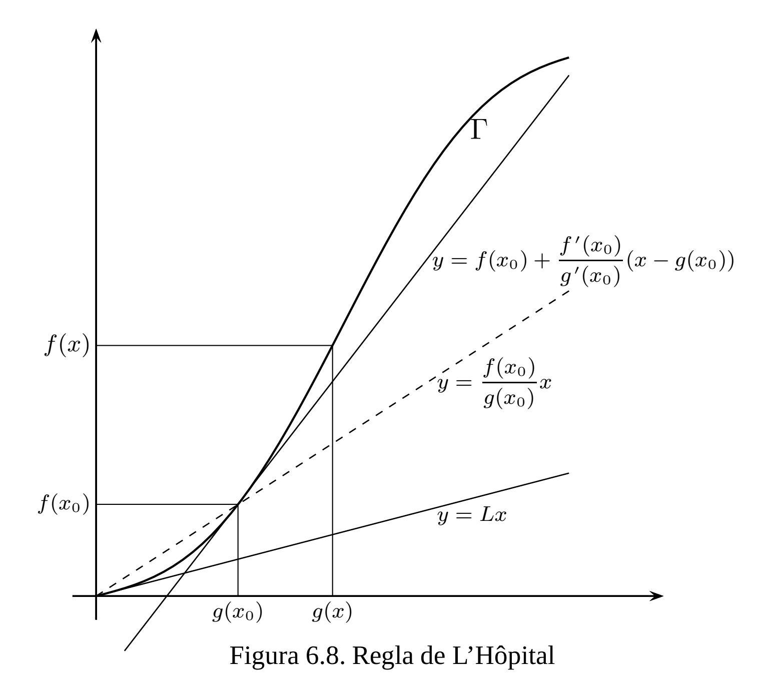


Figura 6.8. Regla de L'Hôpital

la figura se ha supuesto que L es un número real, pero está claro que puede suponerse también $L = \pm\infty$ lo que corresponde a los casos en que Γ tiene tangente vertical en el origen.

Daremos ahora una demostración formal del teorema en dos casos particulares.

Caso1 (Primera regla de L'Hôpital).

Supongamos que $\alpha = a$ y L son números reales y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Definamos $f(a) = g(a) = 0$. Dado $x \in I$, $x \neq a$, aplicamos el teorema del valor medio generalizado a las funciones f y g en el intervalo $[a, x]$, para obtener $c_x \in]a, x[$ tal que

$$(f(x) - f(a))g'(c_x) = (g(x) - g(a))f'(c_x)$$

es decir, $f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x)$. Las hipótesis hechas implican que g es estrictamente monótona en I y, como $g(a) = 0$, deducimos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Obtenemos así que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{6.7}$$

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $a < t < a + \delta$ es $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \varepsilon$. Deducimos de la igualdad (6.7) que si $a < x < a + \delta$ se tiene que:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Hemos probado así que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Los casos en que $L = \pm\infty$ se tratan de la misma forma.

Caso 2 (Segunda Regla de L'Hôpital).

Supongamos que $\alpha = a$ y L son números reales y $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. Esta última condición implica que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ suficientemente próximo al punto a, y por el carácter local del límite no es restrictivo suponer que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Nótese también que las hipótesis hechas implican que g es inyectiva en I. La hipótesis $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$, nos dice que dado $\varepsilon > 0$, hay un número (fijo en lo que sigue) $c \in I$, tal que para $a < t \leqslant c$ se verifica que:

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{6.8}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$, hay un número $\delta > 0$ tal que $a + \delta \leqslant c$ y para $a < x < a + \delta$ se verifica que:

$$\frac{|g(c)|}{|g(x)|} < 1, \qquad \frac{|f(c) - Lg(c)|}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.9}$$

Dado $a < x < a + \delta$ aplicamos el teorema del valor medio generalizado para obtener un punto $c_x \in]x, c[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Teniendo en cuenta la identidad:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - L &= \left(\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L \right) \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)} \right) + \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} \\ &= \left(\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L \right) \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)} \right) + \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} \end{aligned}$$

deducimos, en virtud de (6.8) y (6.9), que para todo $x \in]a, a + \delta[$ se verifica que:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado así que $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Los casos en que $L = \pm\infty$ se tratan de la misma forma.

Los demás casos tienen un tratamiento similar y también pueden reducirse a los ya estudiados sin más que invertir la variable. □

Nótese que, tal y como las hemos enunciado, las reglas de L'Hôpital permiten calcular límites por la derecha y por la izquierda en un punto y, por tanto, podemos usarlas para calcular el límite en un punto de un intervalo que no sea extremo del mismo.

6.4. Derivadas sucesivas. Polinomios de Taylor

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la función derivada f' también es derivable en I decimos que f es *dos veces derivable* en I y la función $f'' := (f')'$ se llama *derivada segunda* de f en I. En general, si $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es $n + 1$ *veces derivable* en I si f es n veces derivable en I y la función derivada de orden n de f en I, que representaremos por $f^{(n)}$, es derivable en I; en cuyo caso la función $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ se llama *derivada de orden* $n + 1$

de f en I. Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es n *veces derivable en un punto* $a \in I$, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1)}$ es derivable en a. Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n)}$ es continua en I. Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I. Por convenio se define $f^{(0)} = f$.

Observemos que una función f derivable en un punto a puede ser aproximada localmente por una función polinómica $P(x)$ de grado $\leqslant 1$, de forma que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{x - a} = 0.$$

Basta para ello definir $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, con lo que la igualdad anterior no es otra cosa que la definición de derivada de f en a.

Es natural preguntarse si, en el caso de que f sea derivable n veces en a, existirá una función polinómica P de grado $\leqslant n$, de forma que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Nótese que, en el caso $n = 1$, el polinomio $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es el único polinomio de grado $\leqslant 1$ que cumple que $P(a) = f(a)$ y $P'(a) = f'(a)$. En el caso general, parece razonable hallar un polinomio P de grado $\leqslant n$ cuyo valor y el valor de sus derivadas, hasta la del orden n, en el punto a coincida con el valor de f y de las respectivas derivadas de f en a. Sea $P(x)$ un polinomio genérico de grado menor o igual que n y pongamos $Q(x) = P(x + a)$. Notemos que $Q^{(k)}(x) = P^{(k)}(x + a)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Sea $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Calcularemos los coeficientes de Q por la condición de que $Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$. Con ello se obtiene fácilmente que $a_k = f^{(k)}(a)/k!$. Resulta así que el polinomio P dado por:

$$P(x) = Q(x - a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

verifica que $P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ y es el único polinomio de grado $\leqslant n$ que cumple dichas condiciones.

6.30 Definición. Sea f una función n veces derivable en un punto a. La función polinómica $T_n(f, a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$\boxed{T_n(f, a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k}$$

se llama el **polinomio de Taylor de orden** n **de** f **en** a.

Los dos resultados siguientes son, junto con las reglas de L'Hôpital, los más útiles para calcular límites.

6.31 Teorema (Teorema de Taylor-Young). *Sea f una función n veces derivable en un punto a, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:*

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n}=0.}$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción. Para $n=1$ la afirmación del enunciado es cierta sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Supongamos que la afirmación del enunciado es cierta para toda función n veces derivable en a. Sea f una función $n+1$ veces derivable en a. Entonces la función $g=f'$ es n veces derivable en a y por tanto:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-T_n(g,a)(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Se comprueba fácilmente que ${T_{n+1}}'(f,a)(x)=T_n(g,a)(x)$, con lo cual resulta que

$$g(x)-T_n(g,a)(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\big(f(x)-T_{n+1}(f,a)(x)\big).$$

Por el teorema de L'Hôpital obtenemos que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{n+1}(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-T_n(g,a)(x)}{(n+1)(x-a)^n}=0.$$

Lo que concluye la demostración. □

6.32 Corolario. *Sea f una función definida en un intervalo I que es $n+1$ veces derivable en un punto $a\in I$, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:*

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a).}$$

6.4.1. Notación de Landau

Te recuerdo también una notación extraordinariamente útil, me refiero a la notación de Landau. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, se escribe $f(x)=o(g(x))$ cuando $x\to a$, y se lee $f(x)$ *es un infinitésimo de orden superior que* $g(x)$ *en el punto* a. La idea es que $f(x)$ tiende a cero más rápidamente que $g(x)$ cuando $x\to a$. Si no hay lugar a confusión, omitimos la precisión *"cuando $x\to a$"*.

Usando la notación de Landau, el teorema de Taylor–Young puede expresarse en la forma $f(x)-T_n(f,a)(x)=o(x-a)^n$ cuando $x\to a$. Lo que suele escribirse

$$f(x)=T_n(f,a)(x)+o(x-a)^n \tag{6.10}$$

Esta última igualdad suele llamarse en algunos textos *Teorema de Taylor con resto infinitesimal* o *forma infinitesimal del resto de Taylor*. No es otra cosa que el teorema de Taylor–Young escrito con la notación de Landau.

Lo interesante de esta notación es que si, por ejemplo, $\varphi(x) = o(x-a)^p$ y $\psi(x) = o(x-a)^q$, entonces $\varphi(x)\psi(x) = o(x-a)^{p+q}$ y, si $p > q$, $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = o(x-a)^{p-q}$ y $(\varphi(x)+\psi(x)) = o(x-a)^q$. Además, si $H(x)$ es *una función acotada* en un intervalo abierto que contenga al punto a y sabemos que $\varphi(x) = o(x-a)^p$ entonces también $H(x)\varphi(x) = o(x-a)^p$.

6.4.2. Polinomios de Taylor de las funciones elementales

Los polinomios de Taylor de la función exponencial centrados en $a = 0$ son inmediatos pues las derivadas de e^x en $x = 0$ valen todas 1. Luego

$$T_n(\exp,0)(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

Como $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+x)$, se sigue que $\operatorname{sen}^{(n)}(x) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}+x)$. En particular, $\operatorname{sen}^{(n)}(0) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$. Por tanto

$$T_n(\operatorname{sen},0)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{2})}{k!}x^k$$

Como para k par es $\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{2}) = 0$ y para k impar $k = 2q-1$ es $\operatorname{sen}(\frac{(2q-1)\pi}{2}) = (-1)^{q+1}$, resulta que

$$T_{2n-1}(\operatorname{sen},0)(x) = T_{2n}(\operatorname{sen},0)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

Análogamente para la función coseno

$$T_{2n}(\cos,0)(x) = T_{2n+1}(\cos,0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Pongamos $f(x) = (1+x)^\alpha$. Tenemos que $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Por lo que

$$T_n(f,0)(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

Cualquiera sea el *número real* α y el número natural k se define

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Por convenio $\binom{\alpha}{0} = 1$. Con ello podemos escribir

$$T_n(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Para obtener los polinomios de Taylor de $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tg} x$ y $\operatorname{arc\,sen} x$ es conveniente usar la siguiente relación, de comprobación inmediata, entre los polinomios de Taylor de una función φ y de su derivada φ' que se expresa por:

$$\boxed{\frac{d}{dx}T_{n+1}(\varphi,a)(x) = T_n(\varphi',a)(x)} \tag{6.11}$$

Es decir, la derivada del polinomio de Taylor de orden $n+1$ de φ es el polinomio de Taylor de orden n de φ'. La igualdad (6.11) es interesante *en los dos sentidos* pues permite calcular $T_{n+1}(\varphi,a)(x)$ sin más que calcular *la primitiva o antiderivada* de $T_n(\varphi',a)(x)$ que en el punto a coincida con $\varphi(a)$. Los siguientes ejemplos son representativos de esta forma de proceder.

En lo que sigue vamos a usar que $T_n(\varphi,a)$ *es el único polinomio de grado menor o igual que* n *tal que* $\varphi(x)=T_n(\varphi,a)(x)+o(x-a)^n$ (ver ejercicio 143).

Pongamos $f(x)=\log(1+x)$. Tenemos que

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

De donde se deduce, por lo antes dicho, que

$$T_n(f',0)(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n$$

y, por tanto, para $n=0,1,2,\dots$

$$T_{n+1}(f,0)(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Para el caso de la función $\operatorname{arc\,tg} x$ se procede igual teniendo en cuenta que

$$\operatorname{arc\,tg}'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

de donde se sigue que

$$T_{2n}(\operatorname{arc\,tg},0)(x)=T_{2n+1}(\operatorname{arc\,tg},0)(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Finalmente, como $\operatorname{arc\,sen}'(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ es de la forma $(1+z)^\alpha$ donde $z=-x^2$, $\alpha=-1/2$, y como el polinomio de Taylor de orden n en $a=0$ de $(1+z)^\alpha$ sabemos que es $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}z^k$, deducimos que

$$T_{2n}(\operatorname{arc\,sen}',0)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}(-1)^k x^{2k}$$

y, por tanto,

$$T_{2n}(\operatorname{arc\,sen},0)(x)=T_{2n+1}(\operatorname{arc\,sen},0)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Como

$$\binom{-1/2}{k}=\frac{\frac{-1}{2}(\frac{-1}{2}-1)(\frac{-1}{2}-2)\cdots(\frac{-1}{2}-k+1)}{k!}=(-1)^k\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)}$$

tenemos que

$$T_{2n+1}(\operatorname{arc\,sen},0)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)}\,\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$$

En resumen, debes recordar los siguientes desarrollos:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n) \tag{6.12}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + o(x^{2n}) \tag{6.13}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) \tag{6.14}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \tag{6.15}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n) \tag{6.16}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} x^{2k-1} + o(x^{2n}) \tag{6.17}$$

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \tag{6.18}$$

6.5. Técnicas para calcular límites de funciones

Cuando en un ejercicio te piden calcular un límite, es casi seguro que se trata de una *"indeterminación"*. Te recuerdo que aquellos límites de sumas, productos, cocientes o potencias de funciones en los que el resultado no está predeterminado por el comportamiento particular de cada una de las funciones se llaman *"límites indeterminados"*. La palabra *"indeterminado"* quiere decir simplemente que se trata de límites cuyo cálculo no puedes hacerlo aplicando las reglas básicas del *"álgebra de límites"* y tienes que usar alguna técnica apropiada para calcularlos. Los límites *interesantes* son casi siempre de este tipo.

Las reglas de L'Hôpital son muy útiles para resolver las indeterminaciones, pero yo pienso que se abusa de ellas. Las aplicamos sin pensar dos veces lo que hacemos, nos dejamos llevar por la comodidad que proporcionan (aunque no siempre) y acabamos calculando límites de forma mecánica sin saber muy bien qué es lo que hacemos. No tengo nada en contra de ellas, tan sólo me parece que su uso casi exclusivo y de forma mecánica es empobrecedor. Por el contrario, pienso que cada límite debe intentarse de la forma más adecuada a su caso. Para eso tienes que fijarte en cómo es la función, relacionarla con otras parecidas y tratar de relacionar el límite que te piden con otros bien conocidos.

Voy a contarte las estrategias que suelo usar para calcular límites. Esencialmente, puedo resumirlas en dos:

- Trato de reducir el límite a otros bien conocidos.
- Siempre que puedo sustituyo funciones por otras más sencillas.

Vayamos con la primera. Si te preguntas qué entiendo por límites *bien conocidos*, la respuesta es bien fácil: los que siguen a continuación.

6.5.1. Límites que debes saberte de memoria

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\frac{1}{3},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Observa que todos ellos, con la excepción de cuatro, son *derivadas* en el punto $x=0$ de las respectivas funciones. Por ello no son difíciles de recordar. Ahora bien, estos límites suelen aparecer algo disfrazados. Realmente, más que como límites concretos, debes considerarlos como *modelos*.

6.33 Ejemplo. El límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\cos x-1}$$

no está en la lista anterior, pero responde al modelo

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$$

en el que la variable x se ha sustituido por la función $\cos x$ y el punto 1 por el punto 0. ♦

6.34 Ejemplo. Partimos del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$$

Elijamos ahora cualquier función *continua* g que se anule en algún punto c, por ejemplo $g(x)=\mathrm{e}^x-1$ ($c=0$) o $g(x)=\log x$ ($c=1$), o $g(x)=\sqrt[3]{x}-1$ ($c=1$), $\dots$ En todos los casos se verifica que

$$\lim_{x\to c}\frac{\operatorname{tg}(g(x))-g(x)}{g(x)^3}=\frac{1}{3}$$

Tenemos así que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\mathrm{e}^x-1)-\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(\log x)-\log x}{(\log x)^3}=\frac{1}{3}$$

♦

¿Entiendes lo que pasa? Esto puede hacerse con cualquier límite. La justificación de estos resultados es el teorema (4.43) que establece que la continuidad permuta con el paso al límite (realmente es una consecuencia de que la composición de funciones continuas es continua). Como consecuencia, los límites de la lista anterior son *muchos más* de los que aparecen en ella. Si te acostumbras a reconocerlos cuando vengan disfrazados podrás ahorrarte mucho trabajo innecesario. Para ayudarte, vamos a escribirlos de nuevo de forma más general.

Sea f cualquier función tal que $f(x) \neq 0$ y $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{arc\,sen} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a}\frac{1-\cos f(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{f(x)}-1}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\operatorname{sen} f(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to a}\frac{(1+f(x))^\alpha - 1}{f(x)} = \alpha,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{arc\,tg} f(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg} f(x) - f(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\log(1+f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2}.$$

Vamos a la segunda estrategia. *Sustituir funciones por otras más sencillas*. Esto se basa en la proposición (4.45) que permite sustituir en un producto o en un cociente de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. ¡Ojo! En una suma no puedes, en general, hacer eso.

La lista de los límites *bien conocidos* es, de hecho, una lista de equivalencias asintóticas y eso la hace más útil todavía.

6.35 Ejemplo. El límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^3 x}$$

es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y puede hacerse por L'Hôpital. El problema está en que vamos a tener que derivar por lo menos dos veces y las derivadas de la tangente se van complicando. Para evitarlo podemos sustituir $\operatorname{tg} x$ por x pues $\operatorname{tg} x \sim x (x \to 0)$. Escribiendo

$$\frac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^3 x} = \frac{x^3}{\operatorname{tg}^3 x}\,\frac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}x - x}{x^3}$$

y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\operatorname{tg}^3 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^3 = 1,$$

basta calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}x - x}{x^3}.$$

Lo que puedes hacer por L'Hôpital muy fácilmente. ♦

Las estrategias anteriores son las más básicas, pero hay otras un poco más elaboradas. Esencialmente consisten en aplicar el teorema de Taylor-Young para tratar de reducir ciertos límites al límite de un cociente de dos polinomios. Bueno, sorpresa, todos los límites de la lista de *límites bien conocidos* son, sin excepción, casos particulares del teorema de Taylor-Young.

Ahora después te pondré algunos ejemplos de esta forma de proceder. Pero, para que puedas usar con comodidad este método, tienes que saberte de memoria, o ser capaz de deducirlos en poco tiempo, los polinomios de Taylor de las funciones elementales. Además, esta forma de proceder se adapta más a unos casos que a otros y tan sólo con la práctica se aprende cuándo conviene usarla.

6.36 Ejemplo. Si tratas de calcular por L'Hôpital el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc\,tg} x)-x^2}{x^6},$$

tendrás que ser paciente porque necesitarás derivar por lo menos cinco veces, y en el numerador hay un producto cuyas derivadas se van haciendo cada vez más complicadas. Ahora, si calculas los polinomios de Taylor de orden 5 de $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{arc\,tg} x$ en $a=0$, obtendrás que

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6),\quad \operatorname{arc\,tg} x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^6).$$

Observa que como se trata de funciones impares sus derivadas de orden par en $x=0$ son nulas, por eso los polinomios anteriores son, de hecho, los polinomios de Taylor de orden 6 y eso explica que aparezca el término $o(x^6)$. Deducimos que

$$\operatorname{tg} x\operatorname{arc\,tg} x = x^2+\frac{2}{9}x^6+o(x^7)$$

y

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc\,tg} x)-x^2}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{2/9x^6+o(x^7)}{x^6}=\frac{2}{9}$$

Observa que aunque $\operatorname{tg} x\sim x$ y $\operatorname{arc\,tg} x\sim x$ para $x\to 0$, se tiene que $\operatorname{tg} x\operatorname{arc\,tg} x-x^2\sim\frac{2}{9}x^6$ para $x\to 0$. Fíjate que al calcular el producto

$$\operatorname{tg} x\operatorname{arc\,tg} x=\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)\right)\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^6)\right)$$

tan sólo nos interesan las potencias de x hasta la de orden 6 inclusive, las demás potencias y los términos de la forma $xo(x^6)$, $x^2o(x^6)$, $o(x^6)o(x^6)$, etc. son todos ellos funciones de la forma $o(x^6)$ (pues al dividirlos por x^6 su límite es cero), y su suma también es una función de la forma $o(x^6)$, por lo que *no es preciso calcularlos para hacer el límite*. Observa que, al proceder de esta manera, tienes que calcular las 5 primeras derivadas en $x=0$ de las funciones $\operatorname{tg}(x)$ y $\operatorname{arc\,tg}(x)$, pero te ahorras el trabajo de derivar su producto. Si aún tienes dudas, calcula el límite por L'Hôpital y compara. ♦

6.37 Ejemplo. Se trata de calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\log(1+x)-x)-\frac{1}{4}x^4}{x^5}.$$

Tenemos que

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3),\quad \log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

luego

$$(\cos x-1)(\log(1+x)-x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5),$$

de donde se sigue que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\log(1+x)-x)-\frac{1}{4}x^4}{x^5}=-\frac{1}{6}$$

♦

6.5.2. Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$. Si éste límite es igual a L deducimos que el anterior también es igual a L. Pero ¡has probado más de lo que se pedía! Acabas de probar que la derivada de f es continua en a, porque has probado que $\lim_{x\to a} f'(x) = L = f'(a)$; y lo que se pedía era solamente calcular la derivada de f en a. Esto puede que no tenga mayor importancia o que sí la tenga. Depende de la función. Veamos un ejemplo típico.

6.38 Ejemplo. Queremos calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x} \tag{6.19}$$

Pongamos $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ y definamos $f(0) = \mathrm{e}$ (esto se hace así porque sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \mathrm{e}$). El límite (6.19) no es otra cosa que la derivada de f en 0. Para calcular dicha derivada, lo mejor es tomar logaritmos y calcular la derivada en 0 de la función

$$g(x) = \log f(x) = \frac{\log(1 + x)}{x}, \quad g(0) = \log f(0) = 1$$

Tenemos que

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\log(1 + x) - x}{x^2}$$

Este límite puede hacerse muy fácilmente por L'Hôpital, pero resulta que es un límite básico, de los que debes saberte de memoria. Por tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Concluimos, por la regla de la cadena, que $f(x) = \exp(g(x))$ es derivable en 0, y su derivada viene dada por $f'(0) = \exp'(g(0))g'(0) = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Veamos lo que pasa si aplicamos L'Hôpital para calcular el límite (6.19). Primero, debemos comprobar que podemos aplicar L'Hôpital y para eso debemos observar que $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$. Seguidamente, derivamos numerador y denominador en (6.19), y resulta que debemos calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(1 + x)} - \frac{\log(1 + x)}{x^2} \right)$$

Que también puede hacerse por L'Hôpital pero es un poco más complicado que el anterior. ♦

Otro caso en el que puede no ser conveniente aplicar L'Hôpital es para calcular un límite de la forma:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Primero es conveniente escribir

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Si la funciones f y g son derivables en a y $g'(a)\neq 0$, se sigue que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Si aplicamos L'Hôpital probaremos, sin necesidad, que las derivadas de f y g son continuas en a, cosa que no se pide y que puede ser más complicada que lo anterior.

Los errores más frecuentes al aplicar L'Hôpital se deben a que no se comprueban las hipótesis cada vez que aplicamos las reglas. Es frecuente empezar con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y, después de aplicar L'Hôpital una vez, no volver a comprobar que seguimos teniendo una indeterminación. Así que no lo olvides: cada vez que apliques L'Hôpital comprueba que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y que la derivada del denominador no se anula.

6.5.3. Sobre el uso de la notación $\lim\limits_{x\to a}$

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación "tira de ti": basta con que escribas "$\lim\limits_{x\to a}$" delante de una función para que mentalmente hagas la sustitución $x=a$. Para comprobar esto te propongo un juego: dime en menos de medio segundo el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}$$

¿Has dudado? ¿Has creído que es una indeterminación tipo $\frac{0}{0}$? Si respondes que sí a estas preguntas es porque has hecho mentalmente la sustitución $x=0$ en el cociente $\frac{x}{x}$ y has visto lo que no hay. Porque, evidentemente, se tiene que $\frac{x}{x}=1$, es decir, el límite anterior es el límite de la función constante igual a 1. No hay ninguna indeterminación. Es un límite trivial. Lo mismo pasa con el siguiente límite $\lim\limits_{x\to+\infty}1^x$. Si te dejas llevar por la notación y haces mentalmente la sustitución $x=+\infty$, puedes creer que se trata de una indeterminación 1^∞, cuando no lo es porque, evidentemente, $1^x=1$ es la función constante igual a 1. Se pueden poner muchos más ejemplos.

¿Cómo evitar que la notación "$\lim\limits_{x\to a}$" "tire de ti" y te lleve a ver lo que no hay? Pues no usándola hasta que no hayas visto claramente lo que realmente hay. Este es un consejo importante: *antes de empezar a calcular un límite funcional, simplifica todo lo que puedas la función y no escribas el símbolo* "$\lim$" *hasta que no tengas una idea clara de cómo vas a hacer los cálculos.*

6.6. Extremos relativos. Teorema de Taylor

El siguiente resultado es de gran utilidad para el estudio de los extremos relativos de una función.

6.39 Teorema (Condiciones suficientes de extremo relativo). *Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:*

i) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

ii) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

iii) Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Demostración. Basta observar que, en virtud de las hipótesis hechas y (6.32), se verifica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \neq 0$$

Por la definición de límite (o por el teorema de conservación local del signo), existe un número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$ y para $x \in]a-r, a+r[$, $x \neq a$ se verifica que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} f^{(n)}(a) > 0.$$

Si n es par será $(x-a)^n > 0$, por lo que si $f^{(n)}(a) > 0$ tiene que ser $f(x) - f(a) > 0$ para todo $x \in]a-r, a+r[\setminus \{a\}$, es decir, f tiene un mínimo relativo (estricto) en el punto a; si por el contrario es $f^{(n)}(a) < 0$ entonces tiene que $f(x) - f(a) < 0$ para todo $x \in]a-r, a+r[\setminus \{a\}$, es decir, f tiene un máximo relativo (estricto) en el punto a.

En el caso en que n sea impar se tiene que $(x-a)^n < 0$ para $a - r < x < a$ y $(x-a)^n > 0$ para $a < x < a + r$. Deducimos que para $a - r < x < a$, $f(x) - f(a)$ tiene signo opuesto al que tiene para $a < x < a + r$. En consecuencia f no tiene un extremo relativo en a. □

Hay que insistir en que este resultado es útil para estudiar extremos relativos pero que *no proporciona condiciones suficientes de extremo absoluto*. Puede enunciarse un criterio de extremo absoluto para la derivada segunda como sigue.

6.40 Proposición (Criterio de extremo absoluto). *Supongamos que f es continua en $[a, b]$, dos veces derivable en $]a, b[$ y tiene un punto crítico en $c \in]a, b[$. Entonces:*

a) Si $f''(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$ se verifica que f alcanza en c un máximo absoluto en $[a, b]$.

b) Si $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$ se verifica que f alcanza en c un mínimo absoluto en $[a, b]$.

Demostración. *a)* Las hipótesis hechas implican que f' es decreciente en $]a, b[$ y, como $f'(c) = 0$, se sigue que para $a < x \leqslant c$ es $f'(x) \geqslant 0$, y para $c \leqslant x < b$ es $f'(x) \leqslant 0$. Podemos aplicar ahora la proposición (6.23) para concluir que f alcanza en c un máximo absoluto en $[a, b]$.

La demostración del apartado *b)* se hace de forma análoga. □

El teorema de Taylor–Young nos dice que cuando x está muy próximo al punto a, el valor, $f(x)$, de f en x es muy próximo al valor, $T_n(f, a)(x)$, del polinomio de Taylor de orden n de

f en x, pero no nos permite calcular el error que se comete en la aproximación. El siguiente resultado es importante porque permite acotar dicho error.

6.41 Teorema (Teorema de Taylor). *Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:*

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.} \tag{6.20}$$

Demostración. En lo que sigue el punto x y el punto a *están fijos*. Definamos la función $g : I \to \mathbb{R}$ dada para todo $t \in I$ por:

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

Se comprueba fácilmente que

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Aplicamos ahora el teorema del valor medio generalizado a las funciones g y $h(t) = (x-t)^{n+1}$ en el intervalo de extremos x y a, para obtener que hay un punto c comprendido entre x y a tal que

$$(h(x) - h(a))g'(c) = (g(x) - g(a))h'(c).$$

Como $g(x) = h(x) = 0$, obtenemos que:

$$(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = g(a)(n+1)(x-c)^n.$$

Simplificando, y teniendo en cuenta que $g(a) = f(x) - T_n(f,a)(x)$, se obtiene la igualdad del enunciado. □

El número

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} \tag{6.21}$$

Se llama **resto de Lagrange**. Si somos capaces de probar una desigualdad de la forma

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leqslant \varepsilon \tag{6.22}$$

Entonces podemos asegurar que el error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$ es menor que ε. Observa que el resto de Lagrange es tanto más pequeño cuanto más próximo esté x de a. En los ejercicios del teorema de Taylor, usualmente el punto a debemos elegirlo nosotros y hay que hacerlo *procurando que esté lo más próximo posible al punto x*, donde nos piden calcular el valor de la función, y que *el valor de f y de sus derivadas en a pueda calcularse de forma exacta*.

La dificultad para acotar el resto de Lagrange es que no se conoce exactamente el punto c sino solamente que está comprendido entre los puntos a y x. Por eso, *para acotar el resto de Lagrange hay que acotar la derivada $f^{(n+1)}$ en el intervalo de extremos a y x*. Además, como se divide por $(n+1)!$, se puede sospechar que cuanto mayor sea n menor será el error cometido. Esto es cierto en muchos casos pero no siempre, es algo que depende de lo rápidamente que crezcan las derivadas de f. En este tipo de cálculos no se sabe de entrada cómo hay que tomar n, lo que se trata es precisamente de elegir n de forma que se obtenga la acotación deseada. Pero para ello hay que empezar acotando en función de n. Veamos la forma de proceder con un ejemplo.

6.42 Ejemplo. Queremos calcular el número $\sqrt{2}$ con un error menor que 10^{-9} por medio de un conveniente polinomio de Taylor.

Aquí la función es $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, definida para $x \geqslant 0$. Debemos elegir un punto a próximo a 2 en el que podamos calcular de forma exacta $f(a)$. Lo que se hace es calcular cuadrados próximos a dos. Como sabemos que $\sqrt{2}$ es aproximadamente $1,4$, podemos probar con $a = (1{,}4)^2 = 1,96$. Efectivamente, $a = 1{,}96$ está muy próximo a 2 y $f(1{,}96) = 1,4$ de forma exacta. Calculemos las derivadas de f.

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^{1/2-n} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(n-1)-1)}{2^n}x^{1/2-n}$$

Observa que las derivadas también puede calcularse de forma exacta en $1{,}96$. El error de aproximación viene dado por el resto de Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} &= [x=1{,}96,\ a=2] = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left(\frac{4}{10^2}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!\,2^{n+1}}\frac{1}{c^{1/2+n}}\frac{4}{10^{2n+2}} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)}\frac{1}{c^{1/2+n}}\frac{4}{10^{2n+2}} < \frac{1}{2n+2}\frac{1}{c^{1/2+n}}\frac{4}{10^{2n+2}}\end{aligned}$$

donde $1{,}96 < c < 2$. Deducimos que

$$\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} < \frac{1}{2n+2}\frac{1}{(1{,}4)(1{,}96)^n}\frac{4}{10^{2n+2}}$$

Como el error permitido es $\varepsilon = 10^{-9}$, es suficiente elegir n por la condición de que

$$\frac{1}{2n+2}\frac{1}{(1{,}4)(1{,}96)^n}\frac{4}{10^{2n+2}} < 10^{-9}$$

Para lo cual, claramente, basta tomar $n = 3$. Por tanto, el valor pedido de $\sqrt{2}$ es $T_3(f, 1{,}96)(2)$.

♦

6.7. Funciones convexas y funciones cóncavas

6.43 Definición. Dados dos puntos $\alpha = (a, b)$ y $\beta = (c, d)$ en el plano, el segmento que une α con β es el conjunto de puntos del plano:

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = \{\boldsymbol{t\alpha + (1-t)\beta : 0 \leqslant t \leqslant 1}\} = \left\{\big(\boldsymbol{ta + (1-t)c, tb + (1-t)d}\big) : \boldsymbol{0 \leqslant t \leqslant 1}\right\} \tag{6.23}$$

Observa que si $x < y$ son números reales, el segmento que une x con y es el intervalo cerrado $[x, y]$.

6.44 Definición. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Se dice que f es *convexa* en I si para todo par de puntos $x, y \in I$ y para todo t con $0 \leqslant t \leqslant 1$, se verifica que:

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \tag{6.24}$$

Cuando la desigualdad anterior es estricta para $0 < t < 1$ se dice que f es *estrictamente convexa*. Se dice que f es *cóncava* en I cuando $-f$ es convexa en I y *estrictamente cóncava* cuando $-f$ es estrictamente convexa.

La interpretación geométrica de esta desigualdad es la siguiente. El segmento que une el punto del plano $(x, f(x))$ con el punto $(y, f(y))$ es el conjunto

$$\big\{\big(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y)\big) : 0 \leqslant t \leqslant 1\big\}$$

La desigualdad (6.24) dice que la ordenada, $tf(x) + (1-t)f(y)$, de cada punto de dicho segmento es mayor o igual que el valor de f en la abscisa $f(tx + (1-t)y)$. Es decir, el punto $\big(tx+(1-t)y, tf(x)+(1-t)f(y)\big)$ queda por encima del punto $\big(tx+(1-t)y, f(tx+(1-t)y)\big)$. Dicho de otra forma: el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f queda siempre por encima de la gráfica de f.

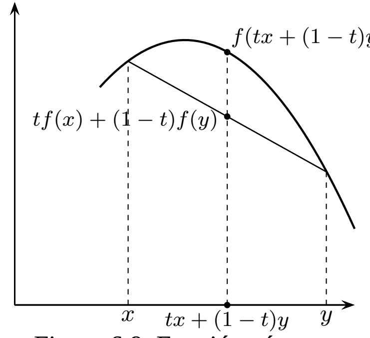


Figura 6.9. Función cóncava

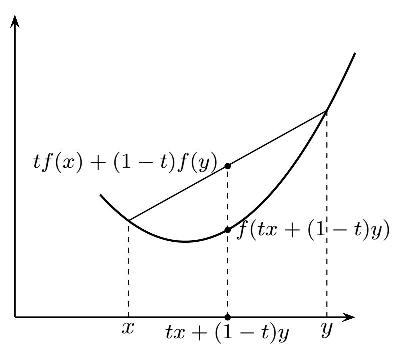


Figura 6.10. Función convexa

Naturalmente, para una función cóncava se verifica la desigualdad opuesta a (6.24) y, por tanto, si f es cóncava el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f queda siempre por debajo de la gráfica de f.

Las gráficas (6.10) y (6.9) muestran claramente estos comportamientos.

Ejemplos típicos de funciones convexas son las parábolas "hacia arriba" y la exponencial. Ejemplos típicos de funciones cóncavas son las parábolas "hacia abajo" y el logaritmo.

Para funciones derivables se tiene una útil caracterización de la convexidad.

6.45 Teorema (Condiciones suficientes de convexidad). *Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a, b[$ entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a, b]$. En particular si f es dos veces derivable en $]a, b[$ y se verifica que $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in]a, b[$, entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a, b]$.*

Demostración. Sean $x, y \in [a, b]$ con $x < y$. Sea $t \in]0, 1[$ y pongamos $z = tx + (1-t)y$. Hay que probar que $f(z) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$. Puesto que $f(z) = tf(z) + (1-t)f(z)$, esta desigualdad puede escribirse

$$tf(z) + (1-t)f(z) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad (1-t)\big(f(z) - f(x)\big) \leqslant t\big(f(y) - f(z)\big)$$

Aplicando el TVM en los intervalos $[x, z]$ y $[z, y]$, obtenemos puntos $c \in]x, z[$, $d \in]z, y[$ tales que

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z - x), \qquad f(y) - f(z) = f'(d)(y - z)$$

Teniendo en cuenta que f' se supone creciente, por lo que $f'(c) \leqslant f'(d)$, y la igualdad de comprobación inmediata $(1-t)(z-x) = t(y-z)$, se tiene que:

$$(1-t)\big(f(z) - f(x)\big) = (1-t)f'(c)(z-x) \leqslant tf'(d)(y-z) = t\big(f(y) - f(z)\big)$$

Que es la desigualdad que queríamos probar. □

Interpretando la derivada primera como la velocidad y la derivada segunda como la aceleración, las curvas convexas aceleran y las cóncavas frenan.

Observa que si f es una función convexa y derivable en un intervalo I, entonces la gráfica de f queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, para todo par de puntos $x, a \in I$ se verifica que $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a)$. De hecho, para funciones derivables, esta propiedad es equivalente a la convexidad (ver ejercicio 141).

6.46 Definición. Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a - r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a + r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

El siguiente resultado se prueba fácilmente y queda como ejercicio.

6.47 Proposición. *Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.*

Si f es tres veces derivable en un punto a y se tiene que $f''(a) = 0$ pero $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a.

6.7.1. Ejercicios propuestos

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas es a los problemas de optimización. En dichos problemas se trata, por lo general, de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una magnitud. Hay una gran variedad de problemas que responden a este esquema y con frecuencia tienen contenido geométrico o económico o físico. Por ello cada uno de estos ejercicios requiere un estudio particular.

Los siguientes consejos pueden ser útiles:
- *Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.*

• *Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.*
• *Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.*
• *Las condiciones del problema deben permitir establecer el dominio de f.*
• *Estudia la variación del signo de la derivada de f en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos por aplicación de la proposición 6.23.*

201. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determina el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

Observación. La solución de este ejercicio también resuelve el problema de calcular la longitud de la escalera más larga que, llevada en posición horizontal, puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b.

202. Demuestra que entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es un cuadrado.

203. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y que tenga área máxima.

Observación. Los dos ejercicios anteriores se han resuelto en el capítulo 1 usando la desigualdad de las medias. ¿Qué método te parece mejor?

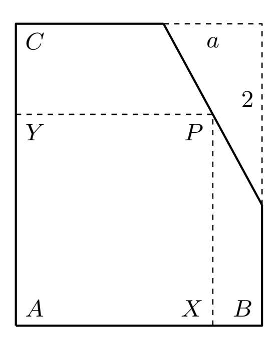
204. Calcula el área máxima de un rectángulo que tiene dos vértices sobre una circunferencia y su base está sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

205. Encuentra un punto P de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con coordenadas positivas y tal que el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$ y las intersecciones de la tangente a la circunferencia en P con los ejes coordenados tenga área mínima.

206. Calcula un punto (u, v) $(u > 0, v > 0)$ de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes un segmento de longitud mínima.

207. Calcula el área de la elipse de mínima área circunscrita a un rectángulo dado. Recuerda que el área de una elipse de semiejes s, t es igual a πst.

208. La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$ y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que a es un valor conocido. Se pide calcular un punto P sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices A, X, P, Y tenga área máxima. ¿Para qué valor de a se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?



209. Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden: a) 10 cm. y 10 cm. b) 12 cm. y 18 cm.

210. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuya superficie total sea mínima.

211. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

212. Se necesita construir un depósito de acero de 500 m^3, de forma rectangular con base cuadrada y sin tapa. Tu trabajo, como ingeniero de producción, es hallar las dimensiones del depósito para que su costo de producción sea mínimo.

213. Halla el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

214. Halla el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura h y radio r conocidos.

215. Halla el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

216. La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcula las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de radio r.

217. Calcula la distancia mínima del punto $(6,3)$ a la parábola de ecuación $y = x^2$.

218. Una empresa tiene 100 casas para alquilar. Cuando la renta es de 80 libras al mes, todas las casas están ocupadas. Por cada 4 libras de incremento de la renta una casa queda deshabitada. Cada casa alquilada supone a la empresa un coste de 8 libras para reparaciones diversas. ¿Cuál es la renta mensual que permite obtener mayor beneficio?

219. Una empresa produce semanalmente 300 bicicletas de montaña que vende íntegramente al precio de 600 euros cada una. Tras un análisis de mercados observa que si varía el precio, también varían sus ventas (de forma continua) según la siguiente proporción: por cada 7 euros que aumente o disminuya el precio de sus bicicletas, disminuye o aumenta la venta en 3 unidades.

a) ¿Puede aumentar el precio y obtener mayores ingresos?

b) ¿A qué precio los ingresos serán máximos?

220. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?.

221. Se proyecta un jardín en forma de sector circular de radio R y ángulo central θ (medido en radianes). El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro del jardín?.

222. Se corta un alambre de longitud L formando un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcula por dónde se debe cortar para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima o sea mínima.

223. Dados dos puntos A y B situados en el primer cuadrante del plano, calcula cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

224. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcula las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

225. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcula sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

226. En una lámina circular de radio R se recorta un sector circular de ángulo ϑ y con él se construye un cono. Calcula el valor de ϑ para que el volumen del cono así construido sea máximo.

227. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcula las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

228. Demuestra que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

229. Se considera la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Calcula el triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene un vértice en el punto $(0,b)$ y base paralela al eje de abscisas.

230. Con una cuerda de longitud L, con un nudo corredizo en uno de sus extremos, rodeamos una columna circular de radio R haciendo pasar el otro extremo por el nudo. Calcula la máxima distancia posible del extremo libre al centro de la columna.

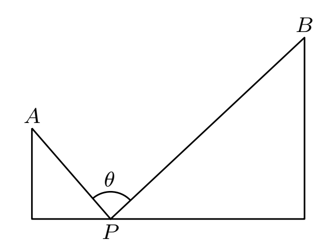
231. Estás en el desierto con tu vehículo situado en un punto cuyas coordenadas son $A=(0,40)$ y tienes que ir a otro punto $C=(28,0)$ (la unidad de medida es la milla terrestre). Del punto A al origen $O=(0,0)$ y de éste al punto C hay una carretera asfaltada. Pero también, para ir de A a C, puedes hacer parte o todo el camino sobre la arena. En carretera tu velocidad es de 75 millas por hora; y sobre la arena de 45 millas por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a C?

232. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 centímetros. Se supone que el rectángulo se apoya sobre un lado del triángulo.

233. El principio de Fermat afirma que la luz viaja de un punto A a otro punto B siguiendo la trayectoria en la que se invierte el menor tiempo posible. Supongamos que el eje de abscisas, $y=0$, separa dos medios en los que la luz viaja a distinta velocidad (por

ejemplo, aire y agua). Sea c la velocidad de la luz en el semiplano superior $y > 0$ y sea $\frac{3}{4}c$ la velocidad correspondiente al semiplano inferior $y < 0$. Calcular el punto de dicho eje por el que pasará el rayo que viaje desde el punto $A = (-4, 3)$ al $B = (3, -4)$.

234. Calcula la posición del punto $P = (x, 0)$ en la figura de la derecha, donde $A = (0, 1)$ y $B = (2 + \sqrt{3}, 2)$, para que el ángulo θ sea máximo. ¿Cuál es dicho valor máximo de θ? Justifica con detalle lo que haces.



Uno de los resultados más útiles del cálculo diferencial son las Reglas de L'Hôpital que permiten resolver las indeterminaciones en el cálculo de límites.

235. Calcula el límite en el punto a que en cada caso se indica de las funciones siguientes:

$$f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x}, \quad a = 0; \qquad f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2}, \quad a = 0$$

$$f(x) = (\cot x)^{\operatorname{sen} x}, \quad a = 0; \qquad f(x) = \left(\cos^2 x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}, \quad a = 0$$

$$f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}, \quad a = 0; \qquad f(x) = \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}, \quad a = \pi/2$$

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{sen}^3 x}, \quad a = 0; \qquad f(x) = \frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc\,tg} x) - x^2}{x^6}, \quad a = 0$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}\,x - x}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad a = 0; \qquad f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}, \quad a = 0$$

236. Justifica que para todo $r \in \mathbb{R}$ y para todo $s > 0$ se verifica que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{\mathrm{e}^{sx}} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^s |\log x|^r = 0.$$

237. Calcula el límite en el punto a que en cada caso se indica de las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{\log x}, \quad a = +\infty; \qquad f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{1+x} - \operatorname{sen}\sqrt{x}, a = +\infty$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad a = 0, \; a = +\infty; \qquad f(x) = \left(\cos\frac{\pi}{x+2}\right)^{x^2}, a = +\infty$$

238. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0 siendo, además, $g(0) = 0$. Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = g'(0)$. Estudia la derivabilidad de f. ¿Es f' continua en 0?.

239. Sean $f, g :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \; f(0) = 1; \quad g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$$

Calcula las derivadas primera y segunda de f y g en 0 y deduce el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x}{x^2}$$

240. Sea $f :]-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + \mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$ para $x \neq 0$, y $f(0) = \mathrm{e}^2$. Estudia la continuidad y derivabilidad de f en cero.

241. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones.

1. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{1/(x^2-1)}$, y $f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.
2. $f :]-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x + \mathrm{e}^x)^{1/x}$ y $f(0) = \mathrm{e}^2$.
3. $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1 + x \log x)^{1/x}$, y $f(0) = 0$.
4. $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$ y $f(0) = \mathrm{e}^{-1/6}$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\operatorname{sen}(1/x)}$, $f(0) = 1$.
6. $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(\dfrac{2 - 2\cos x}{x^2}\right)^{1/x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

242. Calcula los límites

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^3} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+\operatorname{sen} 2x)\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}^3 x)}{(\mathrm{e}^x - 1)(1-\cos^2(\operatorname{tg}^2 x))} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen} x^2)}{(\mathrm{e}^{2x} - 1)\log(1+2x)} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen} x - 3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x}$$

Sugerencia. Pueden usarse las reglas de L'Hôpital pero es conveniente realizar previamente alguna transformación.

243. Explica si es correcto usar las reglas de L'Hôpital para calcular los límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}.$$

El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.

Se dice que **una función polinómica** $P(x)$ **tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k-1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a. Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que una función polinómica de grado n (en general, con coeficientes complejos) tiene n raíces reales o complejas *contando cada raíz tantas veces como indica su orden*. Recuerda también que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen por pares de raíces complejas conjugadas.

244. Prueba que una función polinómica de grado n coincide con su polinomio de Taylor de orden n centrado en un punto cualquiera a.

245. Prueba que una función polinómica P tiene un cero de orden k en a si, y sólo si, puede escribirse de la forma $P(x) = (x-a)^k Q(x)$, donde $Q(x)$ es una función polinómica que no se anula en a.

246. Calcula el número de ceros y la imagen de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

247. Calcula el número de soluciones de la ecuación $3\log x - x = 0$.

248. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$ según los valores de α.

249. Determina el número de soluciones reales de la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 12x = m$ según el valor de m.

250. Justifica que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

251. Sea f una función polinómica que tiene un máximo relativo en $(-3,5)$, un mínimo relativo en $(1,1)$ y un máximo relativo en $(4,7)$ y no tiene más puntos críticos. ¿Cuántos ceros reales tiene f?

252. Prueba por medio del teorema de Rolle que la ecuación $5x^4 - 4x + 1 = 0$ tiene alguna solución en $[0,1]$.

253. Estudia el número de ceros reales de la función $f(x) = 2^x - 1 - x^2$.

254. Prueba que entre cada dos soluciones reales de la ecuación $\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x = 1$ hay al menos una solución real de la ecuación $\mathrm{e}^x \cos x = -1$.

255. Sean $a_0, a_1, \dots, a_n$ números reales. Prueba que para algún $x \in [0,1]$ se verifica que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$.

256. Sea f una función polinómica y sea $a < b$. Justifica que, *contando cada cero tantas veces como su orden*, si $f(a)f(b) < 0$ el número de ceros de f en $]a,b[$ es impar; y si $f(a)f(b) > 0$ dicho número (caso de que haya algún cero) es par. Deduce que si f tiene grado n, es condición necesaria y suficiente para que f tenga n raíces reales distintas que su derivada tenga $n-1$ raíces reales distintas $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$ y que para $\alpha < c_1$ suficientemente pequeño y para $\beta > c_{n-1}$ suficientemente grande, los signos de los números $f(\alpha), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1}), f(\beta)$ vayan alternando.

257. Determina para qué valores de α la función polinómica $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$ tiene cuatro raíces reales distintas.

258. Dado $n\in\mathbb{N}$, sea $f(x) = (x^2-1)^n$ $(x\in\mathbb{R})$. Prueba que la derivada k-ésima ($1 \leqslant k \leqslant n$) de f tiene exactamente k raíces reales distintas en el intervalo $]-1,1[$.

259. Dado$n\in\mathbb{N}$, sea $f_n(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$. Prueba que si n es impar la ecuación $f_n(x) = 0$ tiene una única solución y ninguna si n es par.

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes. Por otra parte, algunas de las desigualdades más útiles son consecuencia de la convexidad. Los siguientes ejercicios tratan de ello.

260. Sean $0 < x < y$. Prueba que:

a) $\dfrac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{arc\,tg} y - \operatorname{arc\,tg} x < \dfrac{y-x}{1+x^2}$.

b) $\dfrac{y-x}{y} < \log y - \log x < \dfrac{y-x}{x}$.

261. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ y $0 < a < b$. Prueba que

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

Aplicación. Haciendo $a=1+\dfrac{1}{n+1}$, $b=1+\dfrac{1}{n}$, primero en la desigualdad de la derecha y después en la desigualdad de la izquierda, deduce que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

262. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \log(1+x)$$

¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad anterior?

263. Supuesto que $a > 0$, demuestra que $-a\,\mathrm{e}\log x \leqslant x^{-a}$ para todo $x > 0$.

264. Dado $\alpha \in]0,1[$, prueba que $x^\alpha < \alpha x + 1 - \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Deduce que, dados $p > 0$ y $q > 0$ tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces para todos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. ¿Cuándo se da la igualdad?

265. Sean $0 < a < b$. Prueba que si $b \leqslant \mathrm{e}$ entonces $a^b < b^a$, y si $\mathrm{e} \leqslant a$ entonces $b^a < a^b$. ¿Qué puede decirse si $a < \mathrm{e} < b$?.

Sugerencia. Considera la función $x \mapsto \dfrac{\log x}{x}$.

266. ¿Hay algún número $a > 0$ que verifique que $a^{x/a} \geqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$? ¿Cuál es dicho número?

267. Prueba que para todo $x \in]0, \pi/2[$ se verifica que

$$i)\ 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x\,; \quad ii)\ \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

268. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a \neq b$, prueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad:

$$\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} > \frac{a}{b}.$$

269. Desigualdad de Jensen. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa en el intervalo I, y sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dados números $\alpha_k > 0$, $x_k \in I$ tales que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, prueba que:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

Además, si f es estrictamente convexa, la desigualdad anterior es estricta siempre que al menos dos de los puntos x_k sean distintos.

Sugerencia. Es suficiente considerar el caso $n = 2$ y proceder por inducción.

270. Sean x_k, α_k, donde $1 \leqslant k \leqslant n$, números positivos verificando que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Usando la convexidad de la función $x \mapsto -\log x$ demuestra la desigualdad:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

¿Cuándo se da la igualdad?

271. Sean p, q números reales positivos tales que $1/p + 1/q = 1$.

a) Prueba que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ y la igualdad ocurre si, y sólo si, $a^p = b^q$.

b) Dado $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ y $s > 0$, definamos $\|z\|_s = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^s\right)^{1/s}$. Prueba que para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y todo $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se verifica la **desigualdad de Hölder**:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q .$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Sugerencias. El punto a) puede hacerse como consecuencia del ejercicio anterior. Para b) hágase $a = \dfrac{|x_i|}{\|x\|_p}, b = \dfrac{|y_i|}{\|y\|_q}$ en la desigualdad del punto a).

272. Sea f es una función derivable en un intervalo I. Prueba que f es convexa en I si, y sólo si, la gráfica de f queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, para todo par de puntos $x, a \in I$ se verifica que $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a)$.

Los teoremas de Taylor–Young y de Taylor se usan para obtener aproximaciones polinomiales de una función dada y para calcular valores aproximados con precisión prefijada.

273. Calcula una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \varphi(x)}{x^5} = 0$.

274. Calcula una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log \operatorname{arc\,tg}(x+1) - \varphi(x)}{x^2} = 0$.

275. Prueba que las únicas funciones n veces derivables con derivada de orden n constante son las funciones polinómicas de grado menor o igual que n.

276. Prueba que el polinomio de Taylor de orden n de una función f es el único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n que verifica que $f(x) = P(x) + o(x-a)^n$.

277. Sea $f:]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la función dada para $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $x \neq 0$, por:

$$f(x) = \frac{\log(1+\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x},$$

y $f(0) = -1/2$. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0.

278. Sea $f:]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función dada para $x \neq 0$ por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg}(\log(1+x))}{\log(1+x)},$$

y $f(0) = 1$. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0.

279. Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-3} en cada uno de los casos siguientes:

$$a)\ \alpha = \sqrt[3]{7} \quad b)\ \alpha = \sqrt{\mathrm{e}} \quad c)\ \alpha = \operatorname{sen}\frac{1}{2} \quad d)\ \alpha = \operatorname{sen}(61^\circ)$$

Una de las aplicaciones más comunes de las derivadas es el trazado de gráficas. Para trazar la gráfica de una función f se debe tener en cuenta:
***1.** Propiedades de simetría o de periodicidad de f.*
***2.** Los puntos en que se anula la primera o la segunda derivada de f y los puntos en los que f no es derivable.*
***3.** Los intervalos en que f' tiene signo constante. Lo que nos informa del crecimiento y decrecimiento de f y también de la naturaleza de los puntos singulares (máximos y mínimos locales).*
***4.** Los intervalos en que la derivada segunda tiene signo constante. Lo que nos informa de la convexidad y concavidad, así como de los puntos de inflexión.*
***5.** Hallar las asíntotas.*
***Asíntota vertical**. La recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si alguno de los límites laterales de f en c es infinito.*
***Asíntota horizontal**. La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si f tiene límite en $+\infty$ o en $-\infty$ igual a L.*
***Asíntota oblicua**. Si f es una función racional con el grado del numerador una unidad mayor que el grado del denominador, entonces puede escribirse de la forma*

$$f(x) = mx + b + g(x)$$

donde $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. En tal caso la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f.
***6.** Dibujar máximos, mínimos, puntos de inflexión, cortes con los ejes y cortes con las asíntotas.*

280. Dibuja las gráficas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ d) $f(x) = |x|^{2x}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-2)^2$ f) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

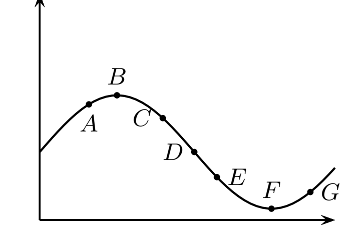
g) $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{(x-6)^{2/3}}$ h) $f(x) = 2x^2 \log|x| - 5x^2,\ f(0) = 0$

i) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ j) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+5}{(x+1)(x-2)}$

k) $f(x) = \log(2 + \operatorname{sen} x)$

281. La figura de la derecha muestra la gráfica de una función f dos veces derivable. Estudia el signo de la primera y la segunda derivada de f en cada uno de los puntos indicados.

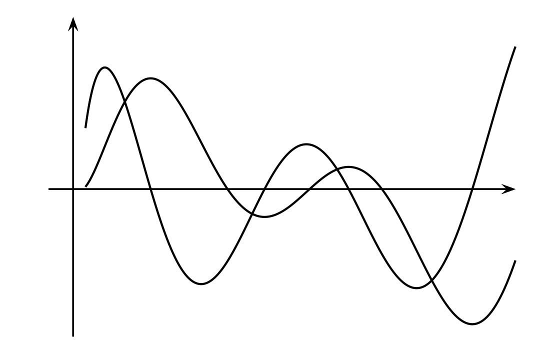
Si suponemos que un móvil se mueve a lo largo de una línea recta y que la gráfica muestra su distancia al origen en el tiempo t. Indica, a la vista de la gráfica y de forma aproximada:



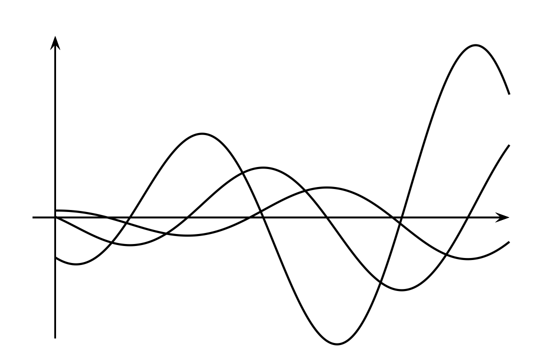
a) Cuándo se está alejando o acercando al origen.

b) Cuándo está acelerando y cuándo está frenando.

282. La figura de la derecha muestra la gráfica de una función y de su derivada. Debes identificar cada una de ellas y explicar las relaciones entre ambas gráficas.



283. La figura de la derecha muestra la gráfica de una función y de sus dos primeras derivadas. Debes identificar cada una de ellas y explicar las relaciones entre dichas gráficas.



284. Traza la gráfica de una función f dos veces derivable en $\mathbb{R}$, sabiendo que:

a) La gráfica de f pasa por los puntos $(-2,2), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,2)$.

b) f' es positiva en los intervalos $]-\infty,-2[$ y $]0,2[$, y es negativa en $]-2,0[$ y $]2,+\infty[$.

c) f'' es negativa en los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$, y es positiva en el intervalo $]-1, 1[$.

285. a) ¿Es cierto que los puntos donde se anula la derivada segunda son puntos de inflexión?

b) ¿Qué puedes decir de los puntos de inflexión de una función polinómica de grado 2 o 3?

Justifica tus respuestas.

286. ¿Es cierto que la gráfica de toda función polinómica de grado par tiene tangente horizontal en algún punto? ¿Y si el grado es impar? Justifica tus respuestas.

Consideraremos ahora el problema de hallar el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

***Paso 1**. Hallar todos los puntos x de $[a, b]$ que o bien son puntos singulares de f o son puntos en los que f no es derivable.*
***Paso 2**. Calcular el valor de f en cada uno de los puntos obtenidos en el Paso 1 y también en a y en b.*
***Paso 3**. Comparar los valores obtenidos en el Paso 2. El mayor de todos ello será el máximo absoluto de f en $[a, b]$ y el menor será el mínimo absoluto de f en $[a, b]$.*

287. Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

1. $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2 \operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5 - 2x)$ en el intervalo $[-1, 2]$.
5. $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

288. Para cada número real t sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2 x$. Calcula, para cada valor de $t \in [-1, 1]$, el mínimo valor de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Cuando una función no está definida en un intervalo cerrado hay que estudiar el signo de la derivada si queremos calcular máximos o mínimos absolutos cuya existencia habrá que justificar.

289. Definamos $f(x) = 5x^2 + \alpha x^{-5}$, donde $\alpha > 0$ es una constante. Calcula el valor más pequeño de α tal que $f(x) \geqslant 21$ para todo $x > 0$.

290. Calcula el mínimo valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$ donde $a_1, a_2, \cdots a_n$ son números reales dados.

291. Calcula la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

292. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$ para $x\neq 0$, y $f(0)=0$. Estudia la continuidad y derivabilidad de f y calcula su imagen.

293. Dado $a\neq 0$, definamos, para $x\neq 1/a$, la función:

$$f(x)=\operatorname{arctan} a+\operatorname{arctan} x-\operatorname{arctan}\frac{a+x}{1-ax}.$$

Calcula la imagen de f.

Acabamos esta larga relación con algunos ejercicios que me ha parecido que no encajaban propiamente en ninguno de los apartados anteriores.

294. Supongamos que f es una función derivable en a con $f(a)\neq 0$. Calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

295. Sea f dos veces derivable en a. Calcula el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

296. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable y f' creciente. Prueba que la función $g:]a,b]\to\mathbb{R}$ dada para todo $x\in]a,b]$ por

$$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

es creciente.

297. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función derivable verificando que $f(0)=0$ y que $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$ para todo $x\in[0,1]$. Prueba que $f(x)=0$ para todo $x\in[0,1]$.

298. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable dos veces en $]a,b[$. Supongamos que el segmento de extremos $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ corta a la gráfica de f en un punto $(c,f(c))$ con $a<c<b$. Demuestra que existe algún punto $d\in]a,b[$ tal que $f''(d)=0$.

Sugerencia. Interpreta gráficamente el enunciado.

299. Justifica que existe una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable y que verifica que $g(x)+\mathrm{e}^{g(x)}=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcula $g'(1)$ y $g'(1+\mathrm{e})$.

300. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3-3x^2+3x+17$. Prueba que f es una biyección y estudia la derivabilidad de f^{-1}.

301. Justifica que hay una función derivable $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}$ verifica que $(\varphi(x))^5+\varphi(x)+x=0$.

302. Sea f una función derivable que no se anula en ningún punto. Justifica que la función $h(x)=\log|f(x)|$ es derivable y calcula su derivada.

303. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verificando que $f(x+y)=f(x)f(y)$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$; $f(0)\neq 0$ y f es derivable en 0. Justifica que f es derivable en todo punto y hay un número real α tal que $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

304. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable y tal que para todo $x\in\mathbb{R}$ se verifica la igualdad $f''(x)+f(x)=0$. Prueba que existen números $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, únicos, de manera que $f(x)=\alpha\operatorname{sen}x+\beta\cos x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Sugerencia. Define $h(x)=\alpha\operatorname{sen}x+\beta\cos x$ y considera la función

$$g(x)=(f(x)-h(x))^2+(f'(x)-h'(x))^2.$$

Calcula $g'(x)$.

305. Prueba la llamada “fórmula de Machin”:

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

Sugerencia. Sea $A=\arctan 1/5,\ B=4A-\pi/4$. Calcula $\tan B$.

Utiliza la fórmula de Machin para calcular π con cinco cifras decimales exactas.

306. Sea f una función polinómica de grado n tal que $f^{(k)}(a)\geqslant 0$ para $1\leqslant k\leqslant n$ y $f(a)>0$. Justifica que si $f(c)=0$, entonces $c<a$.

307. Sea f derivable en $[a,b]$ con $f'(a)=f'(b)=0$. Prueba que hay algún $z\in]a,b[$ tal que $f'(z)=\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$.

Sugerencia. Sea $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ para $a<x\leqslant b$. Define convenientemente $g(a)$ y compara $g'(b)$ con $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

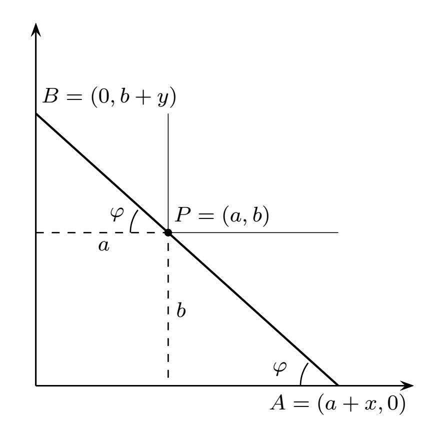
6.7.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **95** Dado un punto $P=(a,b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

Solución.

En un ejercicio como este *lo primero que hay que hacer es elegir la variable* en función de la cual vamos a calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$. Tomando como variable φ, es decir, la medida en radianes del ángulo indicado en la figura, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por



$$f(\varphi)=\frac{b}{\operatorname{sen}\varphi}+\frac{a}{\cos\varphi}\qquad(0<\varphi<\pi/2)$$

Debemos calcular el mínimo absoluto de f. Tenemos que:

$$f'(\varphi)=\frac{-b\,\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}+\frac{a\,\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Se obtiene enseguida que $f'(\varphi)$ se anula en un *único* punto $\varphi_0\in]0,\pi/2[$ que viene dado por la condición $\operatorname{tg}(\varphi_0)=\sqrt[3]{b/a}$. Se justifica fácilmente que f tiene en φ_0 un mínimo absoluto.

En efecto, como f' es continua y no se anula en los intervalos $]0,\varphi_0[$ y $]\varphi_0,\pi/2[$, debe tener signo constante en ellos. Como $\lim\limits_{x\to 0}f'(\varphi)=-\infty$, y $\lim\limits_{x\to\pi/2}f'(\varphi)=+\infty$ se sigue que:

$$\varphi\in]0,\varphi_0[\longrightarrow f'(\varphi)<0,\quad \varphi\in]\varphi_0,\pi/2[\longrightarrow f'(\varphi)>0$$

por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0,\varphi_0]$ y estrictamente creciente en $[\varphi_0,\pi/2[$, lo que implica que $f(\varphi_0)\leqslant f(\varphi)$ para todo $\varphi\in]0,\pi/2[$.

Para calcular la longitud mínima $f(\varphi_0)$, basta tener en cuenta que:

$$1+\operatorname{tg}^2(\varphi_0)=\frac{1}{\cos^2(\varphi_0)}=1+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}\longrightarrow\frac{a}{\cos(\varphi_0)}=a^{2/3}\bigl(a^{2/3}+b^{2/3}\bigr)^{1/2}$$

Fácilmente se obtiene ahora que $\dfrac{b}{\operatorname{sen}(\varphi_0)}=b^{2/3}\bigl(a^{2/3}+b^{2/3}\bigr)^{1/2}$ con lo que la longitud mínima buscada viene dada por:

$$f(\varphi_0)=\bigl(a^{2/3}+b^{2/3}\bigr)^{3/2}$$

Otra forma de calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ consiste en considerar la ecuación general de las rectas que pasan por el punto $P=(a,b)$. Dicha ecuación general es de la forma $y=\lambda(x-a)+b$, donde λ es un parámetro. Las intersecciones de dicha recta con los ejes son los puntos $A=(a-b/\lambda,0)$ y $B=(0,-a\lambda+b)$. Por tanto, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por:

$$g(\lambda)=\sqrt{\left(a-\frac{b}{\lambda}\right)^2+(b-a\lambda)^2}\qquad(\lambda<0)$$

Otra forma de calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ consiste en introducir las variables x e y tales que $A=(a+x,0)$, $B=(0,b+y)$, como se indica en la figura. La longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por $H(x,y)=\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$. Esta función, aparentemente, depende de dos variables, pero dichas variables *no son independientes*, pues los puntos A, P y B están alineados. Por semejanza de triángulos se obtiene que $x/b=a/y$, por lo que $y=(ab)/x$. En consecuencia, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por: $h(x)=\sqrt{(a+x)^2+(b+(ab)/x)^2} \quad (x>0)$.

Tanto si se usa la función g como la h, debemos obtener un mínimo absoluto y, como son raíces cuadradas, es suficiente que calculemos el mínimo absoluto de la función radicando (las raíces respetan el orden en $\mathbb{R}_o^+$). Es decir, las funciones g y h alcanzan su mínimo absoluto en el mismo punto en que lo alcanzan las funciones:

$$G(\lambda)=\left(a-\frac{b}{\lambda}\right)^2+(b-a\lambda)^2 \quad (\lambda<0); \qquad H(x)=(a+x)^2+\left(b+\frac{ab}{x}\right)^2 \quad (x>0)$$

Comprueba que, de cualquier forma que lo hagas, vuelves a obtener la solución anterior.

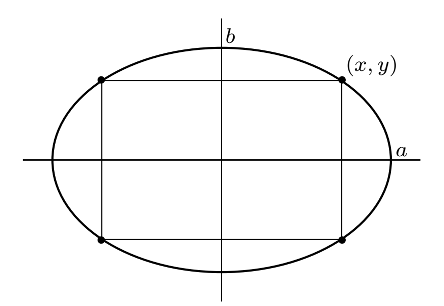
Comentario. Una forma equivalente de enunciar este ejercicio es la siguiente: Calcula la longitud de la escalera más larga que llevada en posición horizontal puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b.

Es evidente que la longitud de la escalera tiene que ser *menor o igual* que la longitud de *cualquier* segmento $\overline{AB}$ como el de la figura. Por tanto, la longitud de la escalera *más larga* que puede pasar es igual a la *longitud mínima* del segmento $\overline{AB}$. ☺

Ejercicio resuelto **96** Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, y que tenga área máxima.

Solución.

Por razones de simetría, es suficiente determinar el vértice del rectángulo situado en el primer cuadrante. Si las coordenadas de dicho vértice son (x,y), entonces el área del rectángulo será igual a $4xy$. Como el vértice debe estar en la elipse, sus coordenadas x e y deberán satisfacer la igualdad $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.



Deducimos que $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Por tanto, se trata de calcular el máximo absoluto de la función $f(x)=x\,b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, donde $0\leqslant x\leqslant a$.

Como se trata de una función positiva, para calcular el valor en que alcanza su máximo podemos elevarla al cuadrado. En definitiva, nuestro problema es calcular el máximo absoluto de la función $h(x)=x^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ en el intervalo $[0,a]$. Tenemos que

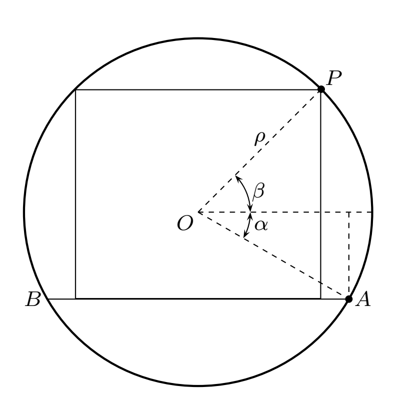
$$h'(x)=2x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+x^2\frac{-2x}{a^2}=2x-\frac{4x^3}{a^2}.$$

Los puntos críticos de h son $x=0$ que corresponde a un mínimo y $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ que corresponde a un máximo absoluto (justificación: la función $h(x)$ se anula en los extremos del intervalo $[0,a]$ y es positiva en $]0,a[$ por lo que su máximo absoluto en $[0,a]$ tiene que alcanzarse en un punto del intervalo abierto $]0,a[$ en el cual debe anularse su derivada. Pero el único punto que cumple estas condiciones es $a/\sqrt{2}$).

El rectángulo pedido es el que tiene de vértices $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$, y su área vale $2ab$. ☺

Ejercicio resuelto 97 Calcula el área máxima de un rectángulo que tiene dos vértices sobre una circunferencia y su base está sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

Solución.



Sea ρ el radio de la circunferencia y $\overline{BA}$ la cuerda. Pongamos $A=(\rho\cos\alpha,\rho\operatorname{sen}\alpha)$ que es un dato conocido. Observa que $-\pi/2<\alpha\leqslant 0$. Hay que calcular un punto $P=(\rho\cos\beta,\rho\operatorname{sen}\beta)$ por la condición de que el rectángulo de la figura tenga máxima área. La altura, h, del rectángulo viene dada por $h=\rho(\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha)$, y la base, b, por $b=2\rho\cos\beta$. Observa que la longitud de la base del rectángulo no puede ser mayor que la longitud de la cuerda $\overline{BA}$, lo que implica que $\cos\beta\leqslant\cos\alpha=\cos(-\alpha)$. Como el coseno es decreciente en el intervalo $[0,\pi/2]$, deberá ser $\beta\geqslant-\alpha$. Debemos calcular el máximo absoluto de $2\rho^2\cos\beta(\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha)$ donde $-\alpha\leqslant\beta\leqslant\pi/2$.Pongamos, por comodidad, $\beta=x$ y prescindamos del factor $2\rho^2$. Sea

$$f(x)=\cos x(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\alpha)\qquad -\alpha\leqslant x\leqslant\pi/2\quad(\text{donde }-\pi/2<\alpha\leqslant 0)$$

Tenemos que $f'(x)=-\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\alpha)+\cos^2 x=-2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}x+1$. Haciendo $t=\operatorname{sen}x$ tenemos que $f'(x)=0$ equivale a que $-2t^2+t\,\operatorname{sen}\alpha+1=0$. Esta ecuación tiene dos raíces reales que vienen dadas por

$$t_0=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+8}}{4},\quad t_1=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+8}}{4}$$

Además, como

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+8}}{4}\right|<\frac{1+\sqrt{9}}{4}=1$$

Tenemos que $-1<t_0<0<t_1<1$. Por tanto, la derivada f' se anula en dos únicos puntos que vienen dados por:

$$\beta_0=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha-\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+8}}{4}\right),\quad \beta_1=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha+\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+8}}{4}\right)$$

Tenemos que $-\pi/2 < \beta_0 < 0 < \beta_1 < \pi/2$. Como $-2t^2 + t\operatorname{sen}\alpha + 1$ es una parábola hacia abajo, toma valores positivos entre sus dos raíces, es decir $-2t^2 + t\operatorname{sen}\alpha + 1 > 0$ para $t_0 < t < t_1$. Lo que implica que $f'(x) > 0$ para $\beta_0 < x < \beta_1$.

Como $f'(\pi/2) = \operatorname{sen}\alpha - 1 < 0$ y f' no se anula en $]\beta_1, \pi/2]$, concluimos que f' debe ser negativa en dicho intervalo y, por tanto f es estrictamente decreciente en $[\beta_1, \pi/2]$.

A la vista de los resultados anteriores, debemos distinguir dos casos:

a) $-\alpha \leqslant \beta_1$. En este caso, f es creciente en $[-\alpha, \beta_1]$ y decreciente en $[\beta_1, \pi/2]$, por lo que el máximo absoluto de f en $[-\alpha, \pi/2]$ se alcanza en β_1.

b) $\beta_1 < -\alpha$. En este caso, f es estrictamente decreciente en $[-\alpha, \pi/2]$ por lo que el máximo absoluto de f en $[-\alpha, \pi/2]$ se alcanza en $-\alpha$.

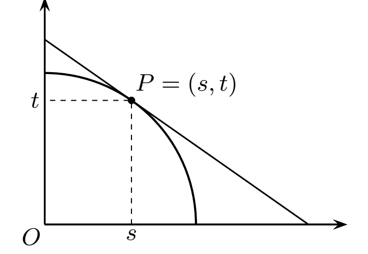
Finalmente, se comprueba con facilidad que la desigualdad $0 \leqslant -\alpha \leqslant \beta_1$, equivale a $0 \leqslant -\operatorname{sen}\alpha \leqslant 1/\sqrt{3}$, esto es, $-\operatorname{arc\,sen}(1/\sqrt{3}) \leqslant \alpha \leqslant 0$.

Observa que si $\alpha = 0$, entonces $\beta = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4$, es decir, en este caso el rectángulo es la mitad del cuadrado inscrito en la circunferencia. ☺

Ejercicio resuelto **98** Encuentra un punto P de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con coordenadas positivas y tal que el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$ y las intersecciones de la tangente a la circunferencia en P con los ejes coordenados tenga área mínima.

Solución.

Sean (s,t) las coordenadas de P. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en P es $xs + yt = 1$, cuyos cortes con los ejes son los puntos $A = (0, 1/t)$, $B = (1/s, 0)$. Por tanto el área del triángulo AOB es igual a



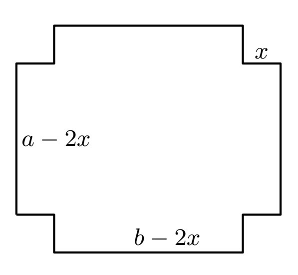
$$\frac{1}{2}\frac{1}{s\,t} = \frac{1}{2}\frac{1}{s\sqrt{1-s^2}}$$

Para calcular su valor mínimo, como se trata de una función positiva, podemos elevarla al cuadrado para simplificar los cálculos. En definitiva, nuestro problema se reduce a calcular el mínimo de la función $f(s) = \dfrac{1}{s^2(1-s^2)}$ en el intervalo $]0,1[$.

Derivando tenemos $f'(s) = 2\dfrac{2s^2 - 1}{s^3(1-s^2)^2}$. Por tanto el único cero de la derivada en el intervalo $]0,1[$ es $s = 1/\sqrt{2}$. Como para $0 < s < 1/\sqrt{2}$ se tiene que $f'(s) < 0$, y para $1/\sqrt{2} < s < 1$ es $f'(s) > 0$, deducimos que en el punto $1/\sqrt{2}$ hay un mínimo absoluto de f. El punto $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es, por tanto, el que proporciona el triángulo de mínima área. ☺

Ejercicio resuelto **99** Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden: a) 10 cm. y 10 cm. b) 12 cm. y 18 cm.

Solución.



Sean a y b las longitudes de los lados de la lámina y x la longitud del lado del cuadrado que se cortará en cada esquina. Supongamos que $a \leqslant b$. El volumen de la caja resultante es $f(x) = (a-2x)(b-2x)x$. Se trata de calcular el máximo absoluto de la función f en el intervalo $[0, a/2]$. Derivando resulta $f'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Los ceros de la derivada son

$$\alpha = \frac{1}{6}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}\right), \quad \beta = \frac{1}{6}\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}\right)$$

Fíjate que:

$$a^2+b^2-ab > a^2+b^2-2ab = (b-a)^2 \geqslant 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2-ab} > b-a.$$

Deducimos que las raíces de f' son *reales*. Veamos si dichas raíces están en el intervalo $[0, a/2]$. Tenemos que:

$$\alpha = \frac{1}{6}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}\right) < \frac{1}{6}(a+b-(b-a)) = \frac{a}{3}$$

También:

$$a^2+b^2-ab < a^2+b^2+2ab = (a+b)^2 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2-ab} < a+b \quad \longrightarrow \quad \alpha > 0.$$

Por tanto $0 < \alpha < a/3$ y $\alpha \in]0, a/2[$. Comprobemos que $\beta \geqslant a/2$.

$$\frac{1}{6}\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}\right) \geqslant \frac{a}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2-ab} \geqslant 2a-b$$

Si $2a-b \leqslant 0$, está desigualdad es trivialmente cierta. Supongamos que $2a-b > 0$. En tal caso, elevando al cuadrado ambos lados, la desigualdad anterior equivale a la siguiente:

$$a^2+b^2-ab \geqslant 4a^2-4ab+b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3a(b-a) \geqslant 0$$

Lo cual es cierto porque se ha supuesto que $a \leqslant b$, luego $\beta \notin]0, a/2[$.

Por el teorema de Weierstrass, sabemos que f alcanza un máximo absoluto en algún punto $x_0 \in [0, a/2]$. Como $f(0) = f(a/2) = 0$ y $f(x) > 0$ para $0 < x < a/2$, debe ser $x_0 \in]0, \pi/2[$. En consecuencia, x_0 también es un extremo relativo de f en $[0, \pi/2]$ por lo que la derivada de f debe anularse en x_0. Pero el único punto del intervalo $[0, a/2]$ en el que se anula la derivada de f es α. Concluimos así que $x_0 = \alpha$.

Con unos sencillos cálculos se obtiene

$$f(\alpha) = \frac{1}{54}(-2a^3+3a^2b+3ab^2-2b^3+2(a^2-ab+b^2)^{3/2})$$

Comentario. Otra forma de razonar este ejercicio, algo más indirecta pero con la que te ahorras trabajo, es como sigue.

Como $f(0) = f(a/2) = 0$, podemos aplicar el teorema de Rolle, para obtener que la derivada de f tiene que anularse en algún punto de $]0, a/2[$. Además, f tiene que alcanzar

en un punto x_0 de $[0, a/2]$ un máximo absoluto y como, evidentemente, $x_0 \in]0, a/2[$, deducimos que f' debe anularse en x_0. Luego o bien es $x_0 = \alpha$ o es $x_0 = \beta$. El criterio de la derivada segunda nos permite salir de dudas. Tenemos que $f''(x) = -4(a+b-6x)$. Con ello,

$$f''(\alpha) = -4(a+b-6\alpha) = -4\sqrt{a^2+b^2-ab}, \; f''(\beta) = -4(a+b-6\beta) = 4\sqrt{a^2+b^2-ab}$$

Por tanto, $f''(\alpha) < 0$ y $f''(\beta) > 0$. Deducimos así que el punto α está en el intervalo $]0, a/2[$ y en él la función f alcanza su máximo absoluto en $[0, a/2]$.

Alternativamente, puedes estudiar el signo de la primera derivada. Escribiendo $f'(x) = 12(x-\alpha)(x-\beta)$, se sigue que $f'(x) < 0$ si $x \in]\alpha, \beta[$ y $f'(x) > 0$ si $x < \alpha$ o si $x > \beta$. Deducimos que f es creciente en el intervalo $]-\infty, \alpha]$, decreciente en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y creciente en $[\beta, +\infty[$. Luego en α hay un máximo relativo. Ahora hay que justificar que α está en $[0, a/2]$ y que es el punto donde f alcanza su máximo absoluto en dicho intervalo. ☺

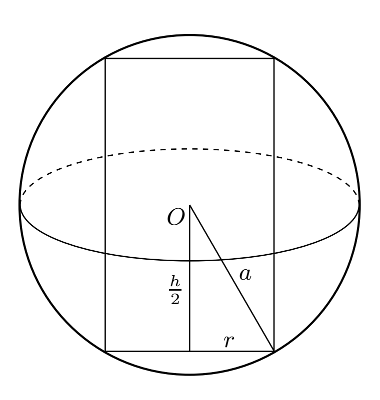
Ejercicio resuelto **100** Calcular las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuya superficie total sea mínima.

Solución. Sea r el radio y h la altura medidos en decímetros. Como el volumen es 1 dcm^3, tenemos que $\pi r^2 h = 1$, de donde $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$. La superficie total de la lata es $f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}$. Se trata, por tanto, de calcular el máximo absoluto de $f(r)$ cuando $r > 0$. Derivando, $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2} = 2\dfrac{2\pi r^3 - 1}{r^2}$. Deducimos que la derivada tiene un único cero real $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$. Como para $0 < r < \alpha$ es $f'(r) < 0$, se sigue que f es decreciente en el intervalo $]0, \alpha]$; y como para $\alpha < r$ es $f'(r) > 0$, se sigue que f es creciente en el intervalo $[\alpha, +\infty[$. En consecuencia $f(\alpha) \leqslant f(r)$ para todo $r > 0$. Así, las dimensiones de la lata con mínima superficie lateral son $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approxeq 0,542$dcm, y $h \approxeq 1,1$dcm. ☺

Ejercicio resuelto **101** Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

Solución.

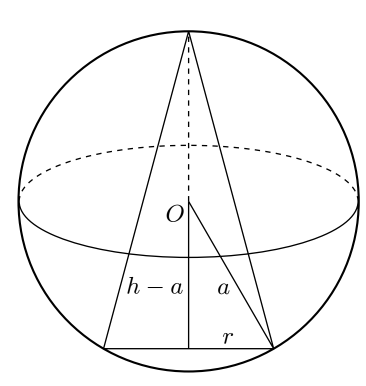
La relación entre el radio de la esfera a, el radio de la base del cilindro, r, y la altura del cilindro, h, viene dada, como se deduce de la figura, por $a^2 = r^2 + \dfrac{h^2}{4}$. El volumen del cilindro viene dado por $\pi r^2 h = \pi\dfrac{4a^2 - h^2}{4}h$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de $f(h) = 4a^2 h - h^3$ en el intervalo $[0, 2a]$. Tenemos que $f'(h) = 4a^2 - 3h^2$. Como la función f es positiva en $]0, 2a[$ y se anula en los extremos del intervalo, deducimos, por un



razonamiento ya varias veces repetido, que el único cero que tiene la derivada en el intervalo $]0, 2a[$, es decir, el punto, $\alpha = 2a/\sqrt{3}$, corresponde a un máximo absoluto de f en $[0, 2a]$. ☺

Ejercicio resuelto **102** Hallar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

Solución.



Sean r y h el radio y la altura del cono. Tenemos que

$$(h-a)^2 + r^2 = a^2$$

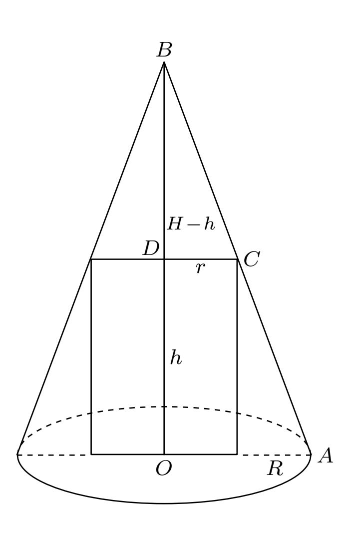
es decir, $r^2 = a^2-(h-a)^2$. El volumen del cilindro viene dado por $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(a^2-(h-a)^2)h$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(a^2-(h-a)^2)h = \frac{\pi}{3}h^2(2a-h)$$

en el intervalo $[0, 2a]$. Tenemos que $f'(h) = \frac{\pi}{3}(4a-3h)h$. De donde se deduce enseguida que el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en la esfera dada es el de altura $h = 4a/3$ y radio $r = \frac{8a^2}{9}$; y su volumen es igual a $\frac{32a^3\pi}{81}$. ☺

Ejercicio resuelto **103** Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura H y radio R conocidos.

Solución.



Sean r y h el radio y la altura del cilindro. Por ser los triángulos OAB y DCB semejantes, tenemos que $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$, de donde, $h = H(1-r/R)$. El volumen del cilindro viene dado por $\pi r^2 h = \pi H r^2\left(1-\frac{r}{R}\right)$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de $f(r) = \pi H r^2\left(1-\frac{r}{R}\right)$ en el intervalo $[0, R]$. Tenemos que $f'(r) = \frac{H\pi r(2R-3r)}{R}$. De donde se deduce enseguida que el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en el cono dado es el de radio $r = 2R/3$ y altura $h = H/3$; y su volumen es igual a $\frac{4\pi R^2 H}{27}$. ☺

Ejercicio resuelto **104** La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcular las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de radio R.

Solución.

Sean x e y las coordenadas del vértice superior derecho de la viga. Será $x^2 + y^2 = R^2$. Nos dicen que la resistencia de la viga viene dada por una función de la forma kxy^2 donde k es una constante. El problema consiste en calcular el máximo absoluto de $f(x) = kx(R^2 - x^2)$ en el intervalo $[0, R]$. Tenemos que $f'(x) = k(R^2 - 3x^2)$. De donde se deduce enseguida que la viga más resistente se obtiene para $x = R/\sqrt{3}$, e $y = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. ☺

Ejercicio resuelto **105** Calcula la distancia mínima del punto $(6, 3)$ a la parábola de ecuación $y = x^2$.

Solución.

La distancia del punto $(6, 3)$ a un punto de la parábola (x, x^2) viene dada por

$$\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}.$$

Como se trata de una función positiva, calcularemos el punto donde el cuadrado de la distancia alcanza su mínimo absoluto. Sea

$$f(x) = (x-6)^2 + (x^2-3)^2 = 45 - 12x - 5x^2 + x^4.$$

Se trata de calcular el mínimo absoluto de f cuando $x \in \mathbb{R}$. Observa que, en general, una función continua en $\mathbb{R}$ no tiene por qué alcanzar un mínimo absoluto, pero f es una *función polinómica de grado par con coeficiente líder positivo,* por lo que la existencia de un valor mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}$ está garantizada de antemano, aunque no vamos a usar este resultado.

Tenemos que $f'(x) = -12 - 10x + 4x^3 = 2(x-2)(3+4x+2x^2)$, que tiene una única raíz real $x = 2$. Como para $x < 2$ se tiene que $f'(x) < 0$ y para $x > 2$ es $f'(x) > 0$, deducimos que en el punto $x = 2$ la función f alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$. Por tanto, el punto de la parábola $y = x^2$ cuya distancia al punto $(6, 3)$ es mínima es el punto $(2, 4)$. ☺

Ejercicio resuelto **106** Una empresa tiene 100 casas para alquilar. Cuando la renta es de 80€ al mes, todas las casas están ocupadas. Por cada 4€ de incremento de la renta una casa queda deshabitada. Cada casa alquilada supone a la empresa un coste de 8€ para reparaciones diversas. ¿Cuál es la renta mensual que permite obtener mayor beneficio?

Solución.

Todo lo que hay que hacer es calcular la función de beneficio. Sea $80 + x$ el precio del alquiler expresado en euros. Como es evidente que no interesa bajar la renta de 80€, se considera que $x \geqslant 0$. El beneficio mensual viene dado por

$$f(x) = \left(100 - \frac{x}{4}\right)(80 + x - 8) = 7200 + 82x - \frac{x^2}{4}$$

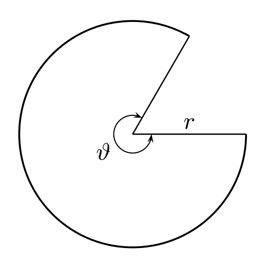
Tenemos que $f'(x) = 82 - \frac{x}{2}$. Deducimos fácilmente que para $x = 164$ obtenemos al máximo beneficio. Es decir, cobrando un alquiler de 244€, lo que supone alquilar un

total de $100 - \dfrac{164}{4} = 59$ casas y dejar sin alquilar 41, la empresa obtiene el máximo beneficio $f(164) = 13.924$€ (así es la economía capitalista...). ☺

Ejercicio resuelto **107** Se proyecta un jardín en forma de sector circular de radio r y ángulo central ϑ. El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de r y ϑ hacen mínimo el perímetro del jardín?

Solución.

El área de un sector circular de amplitud ϑ medida en radianes y radio r es igual a $\dfrac{\vartheta}{2}r^2$, y su longitud viene dada por $\vartheta\, r$. El perímetro del jardín es igual a $\vartheta\, r + 2r$. Como debe ser $\dfrac{\vartheta}{2}r^2 = A$, es decir, $\vartheta = \dfrac{2A}{r^2}$, la función cuyo mínimo absoluto debemos obtener es $f(r) = \dfrac{2A}{r} + 2r$, donde $r > 0$. Como $f'(r) = -\dfrac{2A}{r^2} + 2 = 2\dfrac{r^2 - A}{r^2}$, se deduce fácilmente que en $r = \sqrt{A}$ f alcanza un mínimo absoluto. El valor mínimo del perímetro es igual a $4\sqrt{A}$. ☺



Ejercicio resuelto **108** Se corta un alambre de longitud L formando un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcular por dónde se debe cortar para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima o sea mínima.

Solución.

Supongamos que partimos el alambre en dos trozos de longitud x y $L - x$. Con el trozo de longitud x formamos un cuadrado cuya área será $x^2/16$, con el otro trozo formamos un círculo cuyo radio, r, vendrá dado por $2\pi r = L - x$, y su area será $\pi r^2 = \dfrac{(L-x)^2}{4\pi}$. El problema consiste en calcular los puntos donde la función $f(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(L-x)^2}{4\pi}$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[0, L]$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{-4L + (4+\pi)x}{8\pi}.$$

Deducimos, estudiando el signo de la derivada, que en el punto $x = \dfrac{4L}{4+\pi}$ hay un mínimo absoluto.

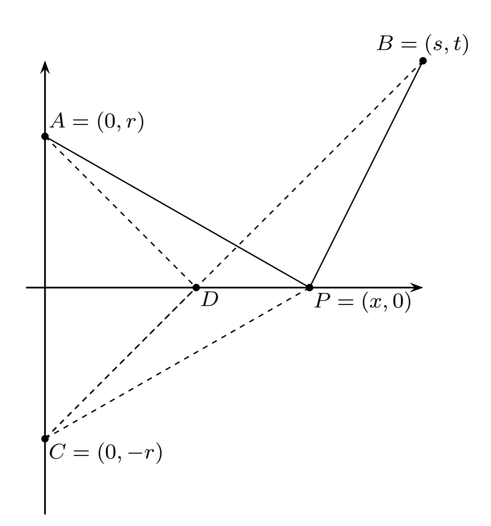
Como la derivada tiene un único cero en $]0, L[$, deducimos que el máximo absoluto de f en $[0, L]$ tiene que alcanzarse en uno de los extremos y, como $f(L) = 0$, concluimos que el valor máximo de f se alcanza para $x = 0$ y vale $f(0) = \dfrac{L^2}{4\pi}$. ☺

Ejercicio resuelto **109** Dados dos puntos A y B situados en el primer cuadrante del plano, calcula cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

Solución.

Podemos situar los puntos A y B de forma que $A = (0, r)$ y $B = (s, t)$ con r, s, t positivos. La longitud del camino APB viene dada por $f(x) = \sqrt{x^2 + r^2} + \sqrt{(s - x)^2 + t^2}$. Debemos calcular el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[0, s]$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{x - s}{\sqrt{t^2 + (s - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$



Resolviendo $f'(x) = 0$ obtenemos la solución $\alpha = \dfrac{rs}{r + t}$. (Si haces los cálculos encontrarás que $\dfrac{rs}{r - t}$ es también una *posible* solución, pero $f'\left(\dfrac{rs}{r - t}\right) \neq 0$).

Es inmediato que α está en el intervalo $[0, s]$. Por tanto, los valores candidatos para ser mínimo absoluto de f en $[0, s]$ son $f(0)$, $f(s)$ y $f(\alpha)$. Como $f'(0) < 0$ y f' es continua, se sigue que $f'(x) < 0$ en un intervalo abierto que contiene a 0. En dicho intervalo abierto la función f es decreciente, por lo que $f(0)$ no puede ser el valor mínimo de f en $[0, s]$. Análogamente, como $f'(s) > 0$ y f' es continua, se sigue que $f'(x) > 0$ en un intervalo abierto que contiene a s, por lo que $f(s)$ tampoco puede ser el valor mínimo de f en $[0, s]$. Por exclusión, concluimos que $f(\alpha) = \sqrt{s^2 + (r + t)^2}$ es el valor mínimo de f en $[0, s]$.

Comentario. No es del todo inmediato comparar directamente los valores $f(0)$, $f(s)$ y $f(\alpha)$ para ver cuál de ellos es el menor. Para salvar esta dificultad lo más cómodo es razonar como lo hemos hecho.

Alternativamente, puedes calcular la derivada segunda

$$f''(x) = \frac{t^2}{\big(t^2 + (s - x)^2\big)^{3/2}} + \frac{r^2}{\big(r^2 + x^2\big)^{3/2}}$$

Como $f''(x) > 0$, se sigue que f' es estrictamente creciente. Luego si $x < \alpha$ es $f'(x) < 0$, y si $\alpha < x$ es $f'(x) > 0$; de donde se deduce que f tiene un mínimo absoluto en α.

En la figura sugiero una elegante y sencilla solución geométrica del problema. El punto D es el que proporciona el camino más corto $\overline{AD} + \overline{DB}$. Cualquier otro camino $\overline{AP} + \overline{PB}$ es más largo porque un lado de un triángulo $\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ es siempre más pequeño que la suma de los otros dos $\overline{CP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB}$. ☺

Ejercicio resuelto **110** Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

Solución.

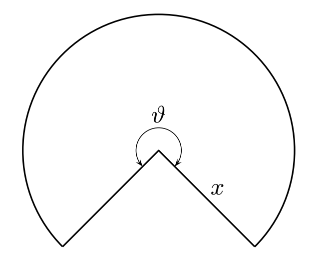
Sea x la longitud de la base de la ventana y h su altura. El perímetro es igual a una cantidad dada, A; es decir, $2x+h+\pi\dfrac{x}{2}=A$. La luminosidad viene dada por

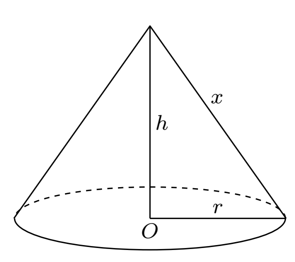
$$f(x)=2xh+\pi\frac{x^2}{8}=x(A-x-\pi\frac{x}{2})+\pi\frac{x^2}{8}=A\,x-\frac{1}{8}(8+3\pi)x^2$$

La derivada $f'(x)=A-\dfrac{1}{4}(8+3\pi)x$ se anula en $\dfrac{4A}{8+3\pi}$ y, como $f''(x)=-\dfrac{1}{4}(8+3\pi)<0$, concluimos que f alcanza un máximo absoluto en el punto $\dfrac{4A}{8+3\pi}$. Las dimensiones de la ventana con mayor luminosidad son por tanto $x=\dfrac{4A}{8+3\pi}$, $h=\dfrac{A(4+4\pi)}{16+6\pi}$. ☺

Ejercicio resuelto **111** Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

Solución.





Para hacer la tienda necesitamos cortar un sector circular de lona como se indica en la figura. Sea ϑ la medida en radianes del ángulo central del sector y x la medida del radio. La cantidad de lona que necesitamos es igual al área del sector y viene dada por $\dfrac{\vartheta}{2}x^2$ (si el volumen se expresa en m^3, las demás medidas se expresarán en metros). Sea r el radio de la base de la tienda y h su altura. Nos dicen que el volumen de la tienda debe ser igual a una cantidad prefijada, V, es decir, $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

Nuestro problema es calcular el mínimo absoluto de $\dfrac{\vartheta}{2}x^2$ sabiendo que la cantidad $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$ es conocida. Veamos que esta condición nos permite expresar x en función de ϑ.

Observa que la longitud de la base de la tienda, $2\pi r$, debe ser igual a la longitud, $\vartheta\,x$, del arco circular que abarca el sector: $\vartheta\,x=2\pi r$, de donde, $r=\dfrac{\vartheta\,x}{2\pi}$. Además, es evidente que $x^2=h^2+r^2$, y deducimos que

$$h^2=x^2-r^2=x^2-\frac{\vartheta^2x^2}{4\pi^2}=x^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{4\pi^2}\right)\longrightarrow h=\frac{x\sqrt{4\pi^2-\vartheta^2}}{2\pi}$$

Por tanto

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{\vartheta^2x^2}{4\pi^2}\frac{x\sqrt{4\pi^2-\vartheta^2}}{2\pi}=\frac{x^3\vartheta^2\sqrt{4\pi^2-\vartheta^2}}{24\pi^2}$$

Despejando x, obtenemos que $x = \dfrac{2(3\pi^2 V)^{1/3}}{\vartheta^{2/3}(4\pi^2 - \vartheta^2)^{1/6}}$. La función de la que tenemos que calcular su mínimo absoluto es

$$f(\vartheta) = \frac{\vartheta}{2}x^2 = \frac{(9\pi^4 V^2)^{1/3}}{\left(4\pi^2\vartheta - \vartheta^3\right)^{1/3}} \qquad (0 < \vartheta < 2\pi)$$

Tenemos que $f'(\vartheta) = (9\pi^4 V^2)^{1/3}\dfrac{3\vartheta^2 - 4\pi^2}{3\left(4\pi^2\vartheta - \vartheta^3\right)^{4/3}}$, que tiene un único cero positivo $\vartheta = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ que corresponde, como se justifica fácilmente estudiando el signo de la derivada, a un mínimo absoluto de f. El correspondiente valor del radio del sector es $x = \sqrt[6]{\dfrac{3^5 V^2}{2\pi^2}}$ y el área, $3\sqrt[6]{\dfrac{3\pi^2 V^4}{4}}$.

Para un volumen $V = 5\,\mathrm{m}^3$, la cantidad de lona necesaria es $\approxeq 12{,}25\,\mathrm{m}^2$; el radio del sector $x \approxeq 2,6$m, la altura de la tienda $h \approxeq 2,12$m y el radio de la tienda $r \approxeq 1,5$m. ☺

Ejercicio resuelto **112** Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcúlense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

Solución.

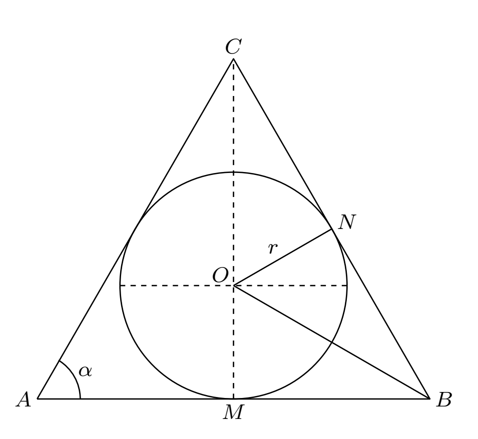
Sea r el radio de la base y h la altura del cilindro. Nos dicen que el volumen del silo, $\pi r^2 h + \dfrac{2}{3}\pi r^3$, es un valor conocido, V, que podemos suponer expresado en m^3. Si el coste de construcción de $1\,\mathrm{m}^2$ de superficie del cilindro es α euros, la función de coste viene dada por $\alpha(2\pi r h) + 2\alpha(2\pi r^2)$. De la condición $V = \pi r^2 h + \dfrac{2}{3}\pi r^3$, se sigue que $h = -\dfrac{2r}{3} + \dfrac{V}{\pi r^2}$. Sustituyendo este valor en la función de coste, resulta que la función que debemos minimizar es

$$f(r) = \frac{8}{3}\pi r^2 \alpha + \frac{2V\,\alpha}{r} \qquad (r > 0)$$

Tenemos $f'(r) = \dfrac{2\alpha(8\pi r^3 - 3V)}{3r^2}$ que se anula para $r = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$ en donde, como se comprueba fácilmente estudiando el signo de $f'(r)$, la función f alcanza un mínimo absoluto. La altura correspondiente es $h = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$. Para un volumen $V = 100\,\mathrm{m}^3$, tenemos $r \approxeq 2,3\,\mathrm{m}$ y $h \approxeq 4,6\,\mathrm{m}$. ☺

Ejercicio resuelto **113** Demuestra que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

Solución.



Sea α la medida en radianes de los ángulos $\angle CAB = \angle ABC$. El triángulo $\triangle ONC$ es rectángulo y $\angle CON = \angle ABC$ por ser ángulos con lados perpendiculares. Obtenemos así que $\cos(\alpha) = \dfrac{r}{\overline{OC}}$, esto es, $\overline{OC} = \dfrac{r}{\cos\alpha}$. Considerando el triángulo rectángulo $\triangle OMB$, obtenemos $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{MB}} = \dfrac{r}{\overline{MB}}$, de donde $\overline{MB} = r\,\operatorname{cotg}(\alpha/2)$. El área del triángulo viene dada por $\overline{MB}(\overline{OC} + r)$ y, sustituyendo los valores anteriores, resulta la función

$$f(\alpha) = r^2 \operatorname{cotg}(\alpha/2)\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} \quad (0 < \alpha < \pi/2)$$

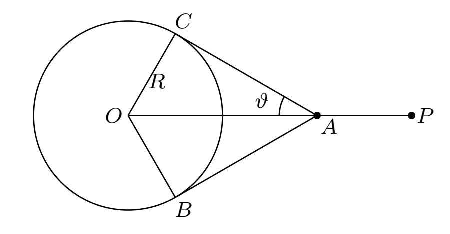
Como

$$f'(\alpha) = r^2 \frac{(1-2\cos\alpha)\cos^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}$$

deducimos que la derivada tiene un único cero que se obtiene cuando $1 - 2\cos\alpha = 0$, lo que implica que $\alpha = \pi/3$. Se comprueba fácilmente, estudiando el signo de la derivada, que dicho valor corresponde a un mínimo absoluto del área. Por tanto, de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero; su altura es igual a $\overline{OC} + r = \dfrac{r}{\cos\alpha} + r = 2r + r = 3r$ y su área vale $3r^2\sqrt{3}$. ☺

Ejercicio resuelto **114** Con una cuerda de longitud L, con un nudo corredizo en uno de sus extremos, rodeamos una columna circular de radio R haciendo pasar el otro extremo por el nudo. Calcula la máxima distancia posible del extremo libre al centro de la columna.

Solución.



Para hacer este ejercicio debes tener en cuenta que en los puntos donde la cuerda se separa de la columna lo hace en la dirección de la tangente a la circunferencia. En la figura se han representado los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ que unen el centro de la circunferencia con los puntos de tangencia. Lo que nos piden es calcular la longitud máxima del segmento $\overline{OP}$ conociendo la longitud de la cuerda y el radio de la columna. Tenemos que $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$, como el triángulo $\triangle OCA$ es rectángulo, se verifica que $\overline{OA} = \dfrac{R}{\operatorname{sen}\vartheta}$, donde ϑ es la medida en radianes del ángulo $\angle OAC$.

La longitud del arco de circunferencia desde C hasta B en sentido contrario a las agujas del reloj, es igual a $R(\pi + 2\vartheta)$; además se verifica que $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \dfrac{R}{\overline{AC}}$. Deducimos así que

$$\overline{AP} = L - 2\overline{AC} - \widehat{CB} = L - 2R\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} - R(\pi + 2\vartheta)$$

Por tanto

$$f(\vartheta)=\frac{R}{\operatorname{sen}\vartheta}+L-2R\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}-R(\pi+2\vartheta)\qquad 0<\vartheta\leqslant\pi/2$$

es la función que nos da la longitud del segmento $\overline{OP}$. Calculando su derivada y simplificando resulta

$$f'(\vartheta)=R\frac{\cos\vartheta(2\cos\vartheta-1)}{\operatorname{sen}^2\vartheta}.$$

La derivada se anula solamente cuando $2\cos\vartheta-1=0$, es decir, $\vartheta=\pi/3$. Se comprueba fácilmente, por ejemplo estudiando el signo de $f'(\vartheta)$, que dicho valor corresponde a un máximo absoluto de f en $]0,\pi/2]$. La longitud máxima del segmento $\overline{OP}$ es igual a $f(\pi/3)=L-\dfrac{5\pi R}{3}$.

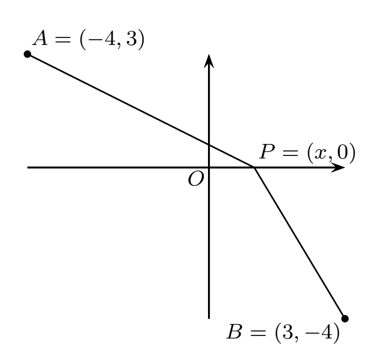
Comentario. Es claro que la longitud de la cuerda debe ser suficiente para rodear la columna, es decir, $L\geqslant 2\pi R$. Pero observa que si $L=2\pi R$ no podemos separarnos de la columna. Para que el ejercicio *tenga sentido* es necesario que podamos alejarnos más o menos de la columna, dependiendo de la posición del nudo corredizo, y para eso es preciso que $L>2\pi R$.

Fíjate también en que $\displaystyle\lim_{\substack{\vartheta\to 0\\ \vartheta>0}} f(\vartheta)=-\infty$, por lo que $f(\vartheta)$ toma valores negativos cuando ϑ es suficientemente pequeño. Esto nos dice que la función $f(\vartheta)$ no siempre representa la longitud del segmento $\overline{OP}$. De hecho, como $\operatorname{sen}\vartheta=\dfrac{R}{\overline{OA}}$ y $\overline{OA}\leqslant L+R$, se sigue que $\operatorname{sen}\vartheta\geqslant\dfrac{R}{L+R}$, lo que implica que $\vartheta\geqslant\vartheta_0$ donde $\vartheta_0=\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{R}{L+R}\right)$. Estas consideraciones no afectan a la solución obtenida porque hemos calculado el máximo absoluto de f en *todo* el intervalo $]0,\pi/2]$, salvo por un detalle: debemos asegurarnos de que es posible separar el nudo de la columna hasta que $\vartheta\leqslant\pi/3$. Para eso *es suficiente que la longitud de la cuerda sea mayor o igual* que $R(\pi+2\pi/3)+2R/\sqrt{3}$ (la longitud del arco $\widehat{CB}$ más dos veces la longitud del segmento $\overline{AC}$ correspondientes a $\vartheta=\pi/3$). Observa que $R(\pi+2\pi/3)+2R/\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3}R+5\pi R}{3}>2\pi R$. ☺

Ejercicio resuelto **115** El principio de Fermat afirma que la luz viaja de un punto A a otro punto B siguiendo la trayectoria en la que se invierte el menor tiempo posible. Supongamos que el eje de abscisas, $y=0$, separa dos medios en los que la luz viaja a distinta velocidad (por ejemplo, aire y agua). Sea c la velocidad de la luz en el semiplano superior $y>0$ y sea $\frac{3}{4}c$ la velocidad en el semiplano inferior $y<0$. Calcula el punto del eje de abscisas por el que pasará el rayo que viaje desde el punto $A=(-4,3)$ al $B=(3,-4)$.

Solución.

Se trata de calcular $P = (x, 0)$ por la condición de que el tiempo total invertido por el rayo de luz para recorrer el camino $\overline{APB}$ sea mínimo. Sea t_1 el tiempo que tarda la luz en recorrer el segmento $\overline{AP}$ y t_2 el tiempo que tarda la luz en recorrer el segmento $\overline{PB}$. Tenemos que:



$$\text{longitud}(\overline{AP}) = \sqrt{(x+4)^2+9} = c\,t_1$$
$$\text{longitud}(\overline{PB}) = \sqrt{(x-3)^2+16} = \frac{3}{4}c\,t_2$$

La función cuyo mínimo debemos calcular es

$$f(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{(x+4)^2+9}}{c} + \frac{4\sqrt{(x-3)^2+16}}{3c}$$

Cuya derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{3c}\frac{3(x+4)}{\sqrt{(x+4)^2+9}} + \frac{1}{3c}\frac{4(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+16}}$$

Es claro que $x = 0$ es un cero de la derivada. Veamos si corresponde a un mínimo absoluto de $f(x)$. Calculando la derivada segunda y simplificando obtenemos que

$$f''(x) = \frac{1}{3c}\frac{27}{\sqrt{((x+4)^2+9)^3}} + \frac{1}{3c}\frac{64}{\sqrt{((x-3)^2+16)^3}}$$

Resulta así que $f''(x) > 0$ para todo x por lo que la derivada f' es estrictamente creciente y, al ser $f'(0) = 0$, se sigue que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0$, luego f es decreciente en $]-\infty, 0]$ y creciente en $[0, +\infty[$ y, en consecuencia, f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. ☺

Ejercicio resuelto **116** Calcula la posición del punto $P = (x, 0)$ en la figura de la derecha, donde $A = (0, 1)$ y $B = (2 + \sqrt{3}, 2)$, para que el ángulo θ sea máximo. ¿Cuál es dicho valor máximo de θ? Justifica con detalle lo que haces.

Solución.

Tenemos que $\theta = \pi - \theta_1 - \theta_2$, es decir $\theta = (\frac{\pi}{2} - \theta_1) + (\frac{\pi}{2} - \theta_2) = \beta_1 + \beta_2$ y deducimos fácilmente que

$$\theta(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2+\sqrt{3}-x}{2}\right)$$

Derivando, tenemos

$$\theta'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/2}{1+\left(\frac{2+\sqrt{3}-x}{2}\right)^2}$$

Simplificando resulta

$$\theta'(x) = \frac{9+4\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3})x-x^2}{(1+x^2)(4+(2+\sqrt{3}-x)^2)}$$

Los ceros de la derivada son las raíces de $x^2+(4+2\sqrt{3})x-4\sqrt{3}-9=0$, que vienen dadas por

$$\alpha = \frac{-4-2\sqrt{3}+\sqrt{(4+2\sqrt{3})^2+4(4\sqrt{3}+9)}}{2}, \quad \beta = \frac{-4-2\sqrt{3}-\sqrt{(4+2\sqrt{3})^2+4(4\sqrt{3}+9)}}{2}$$

Como $(4+2\sqrt{3})^2+4(4\sqrt{3}+9) = 32(2-\sqrt{3}) = 16(4+2\sqrt{3}) = 16(\sqrt{3}+1)^2$. Naturalmente, como $0 \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{3}$, y $\beta < 0$ se sigue que

$$\alpha = \frac{-4-2\sqrt{3}+\sqrt{16(\sqrt{3}+1)^2}}{2} = \sqrt{3}$$

es el único cero de la derivada en el intervalo $[0, 2+\sqrt{3}]$.

Estudiemos ahora el signo de la derivada. Como el denominador de $\theta'(x)$ es positivo, el signo de $\theta'(x)$ es igual al de $9+4\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3})x-x^2$. Pero

$$9+4\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3})x-x^2 = -(x-\alpha)(x-\beta)$$

que es positivo cuando $\beta < x < \alpha$ y negativo si $x < \beta$ o $\alpha < x$. Deducimos que $\theta'(x) > 0$ si $0 \leqslant x < \sqrt{3}$ y $\theta'(x) < 0$ si $\sqrt{3} < x \leqslant 2+\sqrt{3}$. Por tanto, la función θ es creciente en $[0, \sqrt{3}]$ y decreciente en $[\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$. Concluimos que en $\sqrt{3}$ la función θ alcanza un máximo absoluto en $[0, 2+\sqrt{3}]$. El valor máximo es $\theta(\sqrt{3}) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) + \operatorname{arc\,tg}(1) = \pi/3+\pi/4 = 7\pi/12$. ☺

Ejercicio resuelto **117** Calcula el límite en el punto a que en cada caso se indica de las siguientes funciones:

$$f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x}, \quad a=0; \qquad f(x) = (1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2}, \quad a=0$$

$$f(x) = (\cot x)^{\operatorname{sen} x}, \quad a=0,\ \pi/2; \qquad f(x) = \left(\cos^2 x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}, \quad a=0$$

$$f(x) = (1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}, \quad a=0,\ \pi/2; \quad f(x) = \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2}, \quad a=\pi/2$$

$$f(x) = \frac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{sen}^3 x}, \quad a=0; \qquad f(x) = \frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc\,tg} x)-x^2}{x^6}, \quad a=0$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}\,x - x}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad a=0; \qquad f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}, \quad a=0$$

Solución.

- El límite $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x+\cos x)^{1/x}$ es de la forma $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a}|g(x)| = +\infty$. Se trata, por tanto, de una indeterminación del tipo 1^∞. Estos límites

suelen poderse calcular haciendo uso del criterio de equivalencia logarítmica (teorema 6.11) que, en las condiciones anteriores para f y g, nos dice que:

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L & \Longleftrightarrow & \lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 & \Longleftrightarrow & \lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty & \Longleftrightarrow & \lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty\end{array}$$

En nuestro caso:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\operatorname{sen} x+\cos x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x+\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=1.$$

Donde hemos usado que

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & = & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 0}{x-0}=\cos 0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x} & = & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 0}{x-0}=\operatorname{sen} 0=0\end{array}$$

sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Concluimos así que

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x+\cos x)^{1/x}=\mathrm{e}$$

- El límite $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2}$ es del mismo tipo anterior. Ahora, el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{1}{x\cos x}$$

no existe, pues

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x\cos x}=+\infty,\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x\cos x}=-\infty.$$

Luego $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2}=+\infty$ y $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2}=0$.

- El límite $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos^2 x+\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}$ es del mismo tipo que los anteriores. Tenemos ahora que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+x^2/2-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x+x^2/2}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos^2 x+\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

- El límite $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$ es del mismo tipo que los anteriores. Tenemos ahora que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1\right)\frac{1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x(1-\cos x)}$$

Este último límite no tiene dificultad y puede hacerse por L'Hôpital. Pero es más fácil usar los límites "bien conocidos":

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}\frac{x^2}{1-\cos x}.$$

Deducimos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x(1-\cos x)} = \dfrac{-1}{3}$. Luego $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$.

- El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}\,x - x}{\operatorname{tg}^2 x}$ es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ y puede hacerse por L'Hôpital, pero antes es conveniente sustituir $\operatorname{tg} x$ por x pues son funciones asintóticamente equivalentes para $x\to 0$. Escribiendo:

$$\frac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}\,x - x}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x}\frac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}\,x - x}{x^2}$$

y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^2 = 1$, basta calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - \cos\sqrt{2}\,x - x}{x^2}$ lo que puedes hacer por L'Hôpital muy fácilmente.

- El límite $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2}$ es también una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ y, en principio, puede hacerse por L'Hôpital. Hazlo tú aplicando L'Hôpital. Yo voy a reducirlo a límites "bien conocidos".

Lo primero que voy a hacer es convertir el límite para $x\to\pi/2$ en un límite para $x\to 0$. Para ello basta sustituir x po $\pi/2 - x$ como sigue:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(\operatorname{sen}(\pi/2 - x))}{(\pi-2(\pi/2-x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{4x^2}$$

Ahora, la presencia de x^2 y de $\cos x$ me sugiere escribir $\dfrac{\log(\cos x)}{4x^2} = \dfrac{\log(\cos x)}{\cos x - 1}\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.
El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -1/2$ porque es uno de los límites "bien conocidos". El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = 1$ porque también es uno de los límites "bien conocidos", pues es de la forma $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\log t}{t-1}$ donde se ha sustituido t por $\cos x$.

Por tanto $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Los restantes límites de este ejercicio te los dejo para que los hagas tú. ☺

Ejercicio resuelto **118** Justifica que para todo $r\in\mathbb{R}$ y para todo $s>0$ se verifica que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^r}{x^s} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{\mathrm{e}^{sx}} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^s|\log x|^r = 0.$$

Solución.

Es suficiente probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^n}{x^s}=0$. Podemos hacerlo por inducción. Para $n=1$, tenemos, aplicando L'Hôpital por tratarse de una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^s}=\frac{1}{s}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^s}=0.$$

Supuesto demostrado que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^n}{x^s}=0$, tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^{n+1}}{x^s}=\frac{n+1}{s}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^n}{x^s}=0.$$

Lo que concluye la demostración por inducción.

Haciendo la sustitución de x por e^x en el límite anterior, obtenemos:

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^r}{x^s}=[x\leftrightarrow \mathrm{e}^x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{\mathrm{e}^{sx}}$$

Haciendo la sustitución de x por $1/x$ en el límite primero, obtenemos:

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^r}{x^s}=[x\leftrightarrow 1/x]=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^s|\log x|^r$$

☺

Ejercicio resuelto **119** Calcula el límite en el punto a que en cada caso se indica de las funciones $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{x^2\operatorname{sen}1/x}{\log x},\ \ a=+\infty; \qquad f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{1+x}-\operatorname{sen}\sqrt{x}, a=+\infty$$

$$f(x)=\operatorname{sen}x\ \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ \ a=0,\ a=+\infty; \qquad f(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x+2}\right)^{x^2}, a=+\infty$$

Solución.

El límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\operatorname{sen}1/x}{\log x}$ es, de hecho, una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y puedes intentar hacerlo por L'Hôpital. Prueba a ver qué pasa. En este caso el marqués de L'Hôpital no resuelve el límite. Pero es fácil ver que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}(1/x)\frac{x}{\log x}=+\infty$, porque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}(1/x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}=+\infty$.

El límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\sqrt{1+x}-\operatorname{sen}\sqrt{x}\right)$ no entra dentro de ninguna de las indeterminaciones usuales. De hecho, el límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}\sqrt{x}$ no existe (¿sabes probarlo?). Está claro que el límite que nos piden calcular requiere un tratamiento particular. Después de pensarlo un poco, a la vista de cómo es la función, se me ocurre usar el teorema del valor medio. Dicho teorema, aplicado a la función $\operatorname{sen}\sqrt{x}$ en el intervalo $[x,x+1]$, me dice

que hay algún punto $z\in]x,x+1[$ tal que $\operatorname{sen}\sqrt{x+1}-\operatorname{sen}\sqrt{x}=\dfrac{\cos z}{2\sqrt{z}}$, y tomando valores absolutos deducimos

$$\left|\operatorname{sen}\sqrt{x+1}-\operatorname{sen}\sqrt{x}\right|=\left|\frac{\cos z}{2\sqrt{z}}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\sqrt{1+x}-\operatorname{sen}\sqrt{x}\right)=0$.

El límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{x+2}\right)^{x^2}$ es una indeterminación 1^∞ y aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Para ello, calculamos

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)-1\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)-1}{\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)^2}\,\frac{\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)^2}{x^2}=\frac{-\pi^2}{2}$$

Luego $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{x+2}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-\pi^2/2}$. El límite que queda por hacer es inmediato. ☺

Ejercicio resuelto **120** Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0 siendo, además, $g(0)=0$. Definamos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ si $x\neq0$ y $f(0)=g'(0)$. Estudia la derivabilidad de f. ¿Es f' continua en 0?

Solución. Por la regla de la cadena, f es derivable en todo punto $x\neq0$ y, por la regla de derivación de un cociente, tenemos que $f'(x)=\dfrac{x\,g'(x)-g(x)}{x^2}$ para $x\neq0$. Para estudiar si f es derivable en $x=0$ no hay otra forma de hacerlo (pero lee más abajo) que recurriendo a la definición. Tenemos que

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g'(0)x}{x^2}=\frac{g''(0)}{2}$$

en virtud del teorema de Taylor-Young (si lo prefieres, puedes aplicar -¡una vez solo!- L'Hôpital). Por tanto, f es derivable en $x=0$ y $f'(0)=\dfrac{g''(0)}{2}$.

Estudiemos si f' es continua en $x=0$. Tenemos que $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,g'(x)-g(x)}{x^2}$ y para calcular este límite *no* se puede aplicar L'Hôpital porque no sabemos si g' es derivable (nos dicen que g es *una* vez derivable en $\mathbb{R}$). Intentaremos relacionar el cociente con las hipótesis que nos dan sobre g. Después de pensarlo un poco, parece conveniente escribir:

$$\frac{x\,g'(x)-g(x)}{x^2}=\frac{x\,g'(x)-x\,g'(0)+x\,g'(0)-g(x)}{x^2}=\frac{g'(x)-g'(0)}{x}-\frac{g(x)-g'(0)x}{x^2}$$

y deducimos que $\lim_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{g''(0)}{2}$, luego f' es continua en $x = 0$.

También puedes usar para hacer este ejercicio un resultado de teoría que dice que si una función f es continua en un intervalo I, a es un punto de I, y sabemos que f es derivable en $I \setminus \{a\}$ y que $\lim_{x\to a} f'(x) = L$, entonces f también es derivable en a con $f'(a) = L$ y, por tanto, f' es continua en a.

Es evidente (¿o no lo es?) que la función f del ejercicio es continua en el intervalo $I = \mathbb{R}$ y es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $\lim_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{g''(0)}{2}$, esto prueba de golpe que f es derivable en $x = 0$, que $f'(0) = \dfrac{g''(0)}{2}$ y que f' es continua en $x = 0$. ☺

Ejercicio resuelto **121** Sean $f, g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \quad f(0) = 1; \qquad g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$$

Calcula las derivadas primera y segunda de f y g en 0 y deduce el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}}{2}x}{x^2}$$

Solución. Observa que si $x > -1$ y $x \neq 0$ es $g(x) = (1+x)^{1/x}$ y $g(0) = \mathrm{e}$. Es claro también que $f(x) = \log g(x)$. El ejercicio consiste en calcular las dos primeras derivadas de g en $x = 0$. Por la regla de la cadena es suficiente para ello calcular las dos primeras derivadas de f en $x = 0$. Pues entonces $g'(x) = \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)$, y $g''(x) = \mathrm{e}^{f(x)} \big((f'(x))^2 + f''(x)\big)$. Fíjate en que la función f es más sencilla que la g. De hecho, no es inmediato calcular directamente $g'(0)$ porque el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x}$ se complica un poco si tratas de hacerlo por L'Hôpital. Las funciones como la g, esto es, las del tipo $u(x)^{v(x)}$, tienen derivadas complicadas.

Derivar f es fácil. El límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$ es bien conocido. Deducimos que $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$. Ahora, para $x \neq 0$, se calcula fácilmente, por la regla de derivación de un cociente, que $f'(x) = \dfrac{x - \log(1+x) - x\,\log(1+x)}{x^2(1+x)}$.

Tenemos

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{x - \log(1+x) - x\,\log(1+x) + \dfrac{1}{2}x^2(1+x)}{x^3(1+x)}$$

Se trata de calcular el límite para $x \to 0$ de este cociente. Lo primero es quitar el factor $(1+x)$ del denominador (evidentemente, $(1+x) \sim 1$ para $x \to 0$). Hecho esto, nos damos cuenta de que se trata de comparar $x - \log(1+x) - x\,\log(1+x) + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3$ con x^3. Utilizando el teorema de Taylor-Young (o, simplemente, recordando los polinomios de Taylor de $\log(1+x)$ en $x = 0$), tenemos que:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Deducimos que:

$$x - \log(1+x) - x\,\log(1+x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

por lo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \dfrac{2}{3}$, es decir, $f''(0) = \dfrac{2}{3}$.

Resulta así que $g'(0) = \mathrm{e}^{f(0)}\, f'(0) = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ y

$$g''(0) = \mathrm{e}^{f(0)}\left((f'(0))^2 + f''(0)\right) = \mathrm{e}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{12}\,\mathrm{e}\,.$$

Finalmente, como consecuencia del teorema de Taylor-Young, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x}{x^2} = \frac{11}{24}\,\mathrm{e}\,.$$

Porque dicho límite es de la forma $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)-g'(0)x}{x^2} = \dfrac{1}{2}g''(0)$. ☺

Ejercicio resuelto **122** Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones.

1. $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{1/(x^2-1)}$, y $f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.
2. $f:]-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x+\mathrm{e}^x)^{1/x}$ y $f(0) = \mathrm{e}^2$.
3. $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1 + x\,\log x)^{1/x}$, y $f(0) = 0$.
4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x) = \left(1+x^2\right)^{\operatorname{sen}(1/x)}$ y $f(0) = 1$.
5. $f:]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$ y $f(0) = \mathrm{e}^{-1/6}$.
6. $f:]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{1/x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

Solución. En todos los casos nos piden estudiar la derivabilidad de una función de la forma $F(x) = u(x)^{v(x)}$ en un punto *"conflictivo"* en el que no puedes aplicar las reglas de derivación. En este tipo de ejercicios la mejor forma de proceder consiste en estudiar la derivabilidad de la función $\varphi(x) = \log F(x) = v(x)\log u(x)$ en el punto conflictivo. Para ello debes recurrir a la definición de derivada. Observa que como $F(x) = \mathrm{e}^{\varphi(x)}$, la derivabilidad de φ equivale a la derivabilidad de F. Como en el ejercicio anterior ya hemos usado esta estrategia, un par de ejemplos más deben ser suficiente para que la comprendas bien. Consideraremos las dos últimas funciones propuestas.

5)

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}, \qquad f(0) = \mathrm{e}^{-1/6}$$

Tenemos que $\varphi(x) = \log f(x) = \dfrac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2}$, $\varphi(0) = \log f(0) = \dfrac{-1}{6}$. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + \dfrac{1}{6}x^2}{x^3} =$$

Podemos aplicar L'Hôpital para quitar el logaritmo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{x\,\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}\right)+\dfrac{1}{3}x}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{3}x^2\operatorname{sen} x}{3x^3\operatorname{sen} x}$$

Sustituimos en el denominador $\operatorname{sen} x$ por x. Usando que

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\quad \cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

deducimos que $x\cos x-\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{3}x^2\operatorname{sen} x=o(x^4)$, por lo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\cos x-\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{3}x^2\operatorname{sen} x}{3x^4}=0$$

Concluimos que φ es derivable en $x=0$ y $\varphi'(0)=0$ por lo que también f es derivable en $x=0$ y $f'(0)=f(0)\varphi'(0)=0$.

6)

$$f(x)=\left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{1/x},\quad f(0)=1$$

Es más fácil estudiar la derivabilidad de $\varphi(x)=\log f(x)$. Nótese que al ser $f(x)=\exp(\varphi(x))$, en todo punto a en que sea derivable φ también, en virtud de la regla de la cadena, será derivable f siendo $f'(a)=\varphi'(a)\exp(\varphi(a))=\varphi'(a)f(a)$. Tenemos que

$$\varphi(x)=\frac{\log\left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)}{x}$$

para $x\neq 0$, y $\varphi(0)=0$. Para estudiar la derivabilidad de φ en $x=0$ consideremos el cociente:

$$H(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\frac{\log\left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)}{x^2}$$

Se trata de calcular $\lim\limits_{x\to 0}H(x)$. Puesto que

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{x^2}=1 \tag{6.25}$$

el límite buscado es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ y se dan las condiciones que permiten aplicar la regla de L'Hôpital. Tenemos entonces, supuesto que los límites en cuestión existen:

$$\lim_{x\to 0}H(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2-2\cos x}\frac{\dfrac{2x^2\operatorname{sen} x-2x(2-2\cos x)}{x^4}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x+2\cos x-2}{x^4}$$

donde hemos tenido en cuenta (6.25). Podemos volver a usar la regla de L'Hôpital para calcular el último límite, obteniendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen}x}{12x^2}=\frac{-1}{12}$$

Hemos probado así que f es derivable en 0 y $f'(0)=-1/12$.

Comentario. No debe calcularse la derivada de f en 0 aplicando la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, pues entonces lo que haremos será calcular $\lim_{x\to 0}f'(x)$. La existencia de este límite, junto con la continuidad de f en 0, implican que f *tiene derivada continua en* 0 y eso es más de lo que se pide y, por eso mismo, suele ser más complicado. ☺

Ejercicio resuelto **123** Calcula los límites

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{e}^{2x}+x\,\mathrm{e}^{x}-2\,\mathrm{e}^{2x}+2\,\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^3}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)^{\frac{1}{\log x}}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+\operatorname{sen}2x)\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}^3 x)}{(\mathrm{e}^{x}-1)(1-\cos^2(\operatorname{tg}^2 x))}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{sen}x}{x(1-\cos x)}$

9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen}x^2)}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\log(1+2x)}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen}x-3\,x\,\cos x}{x^3}\right)^{1/x}$

Sugerencia. Pueden usarse las reglas de L'Hôpital pero es conveniente realizar previamente alguna transformación.

Solución.

1) Recuerda: antes de calcular un límite debemos simplificar todo lo que podamos la función. Tenemos que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$$

Como $\operatorname{sen}x\sim x$ para $x\to 0$, podemos sustituir $\operatorname{sen}x$ por x en el denominador (¡no en el numerador!). Con ello:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\sim\frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^4}$$

Ahora recordamos que $x-\operatorname{sen}x\sim x^3/6$ para $x\to 0$, con lo cual:

$$\frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^4}=\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}\,\frac{x+\operatorname{sen}x}{x}\tag{6.26}$$

Finalmente, deducimos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$$

Observa que una descomposición como la hecha en (6.26) solamente se te ocurre si recuerdas que $x - \operatorname{sen} x \sim x^3/6$ para $x \to 0$ (que es uno de los límites que debes saber de memoria). En general, descomponer una función en producto (o en suma) de otras dos solamente debe hacerse si sabes el comportamiento de cada una de las nuevas funciones. Hay que tener cuidado en esto porque es fácil equivocarse. Por ejemplo, podríamos haber puesto:

$$\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2}$$

Con lo que introducimos una función $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x^2}$ que no tiene límite en 0.

2) Es muy fácil y parecido al anterior.

3) Este límite se hace muy fácilmente por L'Hôpital pero, antes de derivar, debes sustituir $\mathrm{e}^x - 1$ por x.

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}$ es una indeterminación tipo 0^0. Sea $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}$.

Tomando logaritmos tenemos que $\log f(x) = \dfrac{\log\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)}{\log x}$. Teniendo en cuenta que para $x > 0$ es $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$, se sigue que

$$\lim_{x\to+\infty} \log f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}\right)}{-\log \dfrac{1}{x}} = -\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\log(\operatorname{arc\,tg} t)}{\log t}$$

Este último límite puede calcularse por L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \log f(x) = -\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{t}{(1+t^2)\operatorname{arc\,tg} t} = -1$$

Deducimos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

5) También puede hacerse por L'Hôpital pero, antes de derivar, debes sustituir $\log(1+x)$ por x. Te recuerdo que puedes sustituir funciones asintóticamente equivalentes en un producto o en un cociente, nunca en una suma. Tampoco se pueden hacer estas sustituciones en una función, es decir, si $g(x) \sim h(x)$ para $x \to a$, y F es una función, no es cierto en general que $F(g(x))$ sea asintóticamente equivalente a $F(h(x))$ para $x \to a$. En este límite, la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \sim 1$ para $x \to 0$, pero no es cierto que $\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \sim \log(1) = 0$.

6) Es una indeterminación 1^∞. Ya debes saberlo hacer.

7) Este es el típico límite en el que si aplicas directamente L'Hôpital, sin antes simplificar sustituyendo funciones por otras asintóticamente equivalentes, lo más probable es que acabes por equivocarte al derivar. Apliquemos la primera regla: simplificar todo lo que se pueda la función.

Tenemos que:

$$1 - \cos^2(\operatorname{tg}^2 x)) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{tg}^2 x) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^2 \operatorname{tg}^4 x \sim \operatorname{tg}^4 x \sim x^4$$

También es $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$, $\log(1+\operatorname{sen} 2x) \sim \operatorname{sen} 2x \sim 2x$ y $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}^3 x) \sim \operatorname{sen}^3 x \sim x^3$. Todas estas equivalencias asintóticas son para $x \to 0$ y todas ellas se deducen de la tabla de los límites que debes saberte de memoria. En consecuencia el límite que nos piden se reduce a calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^5}{x^5} = \lim_{x\to 0} 2 = 2$$

Los demás límites de este ejercicio te los dejo para que los hagas tú. ☺

Ejercicio resuelto **124** Explica si es correcto usar las reglas de L'Hôpital para calcular los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$$

Solución. Las reglas de L'Hôpital dicen que, bajo ciertas hipótesis, la existencia de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ implica la existencia de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en cuyo caso ambos límites coinciden. Una hipótesis de las reglas de L'Hôpital es que la derivada del denominador no se anule en un intervalo que tenga al punto a por extremo y que el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sea una indeterminación.

Esto no ocurre en el caso del cociente $\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ para $x \to +\infty$ pues, aunque puede verse como una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, la derivada del denominador es $1+\cos x$ que se anula en todos los puntos de la forma $\pi + 2k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ por lo que *no tiene sentido* considerar el límite del cociente de las derivadas, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, pues dicho cociente no está definido en ningún intervalo de la forma $]c, +\infty[$. Es claro, sin embargo, que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1$$

En el caso del límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$, que puede verse como una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, si formamos el cociente de las derivadas obtenemos la función

$$\frac{2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$

la cual no tiene límite en 0 (el denominador tiene límite 1, pero el numerador no tiene límite), luego no es posible aplicar L'Hôpital para calcular este límite el cual, por otra parte, es evidentemente igual a 0, pues:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\, x \operatorname{sen}(1/x) = 0$$



Ejercicio resuelto **125** Prueba que una función polinómica de grado n coincide con su polinomio de Taylor de orden n centrado en un punto cualquiera a.

Solución. Las funciones polinómicas son indefinidamente derivables, por lo que, dados $x, a \in \mathbb{R}$, podemos aplicar el teorema de Taylor con resto de Lagrange para obtener que hay algún punto c comprendido entre a y x tal que:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{P^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Como P es una función polinómica de grado n su derivada de orden $n+1$ es nula en todo punto. Luego $P^{(n+1)}(c) = 0$, por lo que resulta:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Por tanto $P(x)$ coincide con su polinomio de Taylor de orden n centrado en a. ☺

Ejercicio resuelto **126** Prueba que una función polinómica P tiene un cero de orden k en a si, y sólo si, puede escribirse de la forma $P(x) = (x-a)^k Q(x)$, donde $Q(x)$ es una función polinómica que no se anula en a.

Solución. Supongamos que $P(x)$ tiene un cero de orden k en a, es decir el valor de P y el de todas sus derivadas hasta la de orden $k-1$ son nulos en a y la derivada de orden k de P no se anula en a. Entonces, como consecuencia del ejercicio anterior, tenemos que:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = \sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = (x-a)^k \sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-k}$$

Poniendo $Q(x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-k}$, tenemos que Q es un polinomio, $Q(a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$ y $P(x) = (x-a)^k Q(x)$. El recíproco es inmediato. ☺

Ejercicio resuelto **127** Calcular el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

Solución. Se trata de un polinomio de grado par con coeficiente líder positivo, por tanto, alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$, si éste es igual a m, se tiene que $f(\mathbb{R}) = [m, +\infty[$. El punto (o los puntos) en donde f alcanza su mínimo absoluto debe ser un cero de la derivada. Como

$$f'(x) = 6x^5 - 6x = 6x(x^4 - 1) = 6x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 6x(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

se anula en -1, 0 y 1, se sigue que el mínimo absoluto de f debe alcanzarse en alguno de estos puntos y, como $f(1) = f(-1) = 0 < f(0)$, deducimos que $f(-1) = f(1) = 0$ es el mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}$. Luego $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$. Hemos determinado así la imagen de f y también hemos encontrado que -1 y 1 son ceros de f (cosa fácil sin más que ver cómo es f). Observa que -1 y 1 son ceros de orden 2 de f (porque son ceros simples de f'). Es claro que f no puede tener más ceros, porque si $f(x_0) = 0$ entonces en x_0 la función f alcanza un mínimo absoluto y, por tanto, f' debe anularse en x_0. En conclusión, f tiene 4 ceros reales (2 ceros reales dobles). ☺

Ejercicio resuelto **128** Calcula el número de soluciones de la ecuación $3\log x - x = 0$.

Solución. Sea $f(x) = 3\log x - x$. Observa que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ y $f(\mathrm{e}) = 3 - \mathrm{e} > 0$. Deducimos, por el teorema de Bolzano, que f tiene por lo menos un cero en cada intervalo $]0, \mathrm{e}[$ y $]\,\mathrm{e}, +\infty[$. Como la derivada $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 1$ tiene un único cero en $x = 3$, concluimos, por el teorema de Rolle, que f no puede tener más de dos ceros distintos. En conclusión, la ecuación $3\log x - x = 0$ tiene una solución en el intervalo $]0, \mathrm{e}[$ y otra en $]\,\mathrm{e}, +\infty[$. Si quieres, puedes precisar más. Como $f(1) < 0$ y $f(\mathrm{e}^2) = 6 - \mathrm{e}^2 < 0$, se sigue que los dos ceros de f están en el intervalo $]1, \mathrm{e}^2[$. ☺

Ejercicio resuelto **129** Estudia, según los valores de α, el número de ceros, contando multiplicidades cuando proceda, de la función polinómica $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x - \alpha$. Explica con detalle lo que haces.

Solución. Como consecuencia del teorema de Rolle, si la derivada de una función tiene k ceros (reales) *distintos* entonces la función *no puede tener más de* $k+1$ ceros (reales) *distintos* (¡pero puede que no tenga ninguno!). Sabemos también, como consecuencia del teorema de los ceros de Bolzano, que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos un cero real. Como las raíces complejas, cuando las hay, de polinomios con coeficientes reales, vienen por parejas de raíces complejas conjugadas, deducimos que *contando cada cero tantas veces como indica su multiplicidad, todo polinomio de grado impar y coeficientes reales tiene un número impar de ceros reales*. Por las mismas razones, *contando cada cero tantas veces como indica su multiplicidad, todo polinomio de grado par y coeficientes reales tiene un número par de ceros reales y también puede que no tenga ninguno*.

En nuestro caso:

$$f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 30 = 15(x^2+2)(x^2-1) = 15(x^2+2)(x+1)(x-1)$$

resulta que f' tiene dos ceros reales , 1 y -1, por lo que f *no puede tener más de tres ceros reales distintos* (pero todavía no sabemos si los tiene). Lo que es seguro es que f, por ser un polinomio de grado impar, tiene por lo menos un cero real, y en el caso de que tenga más de un cero real debe tener tres (que pueden ser simples o uno simple y otro doble). Veamos cuándo ocurre una cosa u otra. Tenemos que f es inyectiva en los intervalos $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ y $[1, +\infty[$ (porque su derivada no se anula en ningún punto de dichos intervalos excepto en los extremos). Además $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Deducimos que para que f tenga tres ceros reales simples, uno en cada intervalo $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ y $]1, +\infty[$, *es necesario y suficiente* que $f(-1) = 22 - \alpha > 0$ y $f(1) = -22 - \alpha < 0$. Condiciones que equivalen a $-22 < \alpha < 22$.

Cuando $\alpha = 22$ entonces $f(-1) = 0$ y $f(1) < 0$, por lo que f tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo $]1, +\infty[$ y otro doble (porque también anula a la derivada) en -1.

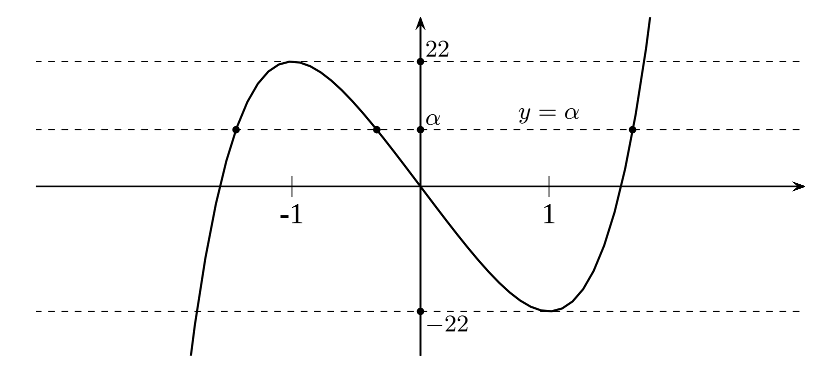
Cuando $\alpha = -22$ entonces $f(-1) > 0$ y $f(1) = 0$, por lo que f tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo $]-\infty, -1[$ y otro doble (porque también anula a la derivada) en 1.

Cuando $\alpha > 22$ o $\alpha < -22$, f sólo tiene un cero real (porque no puede tener tres ceros reales simples ni tampoco un cero real doble).

La discusión anterior puede hacerse también representando gráficamente la función polinómica $h(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x$ y viendo cuántos cortes tiene dicha gráfica con la recta horizontal $y = \alpha$. Para ello observemos que h y f tienen la misma derivada, por lo que:

$$x < -1 \longrightarrow h'(x) > 0, \quad -1 < x < 1 \longrightarrow h'(x) < 0, \quad x > 1 \longrightarrow h'(x) > 0.$$

Por tanto h es estrictamente creciente en $]-\infty, -1]$, estrictamente decreciente en $[-1, 1]$ y estrictamente creciente en $[1, +\infty[$. Deducimos que h tiene en -1 un máximo relativo y en 1 un mínimo relativo. Además, la derivada segunda $h''(x) = 30x(x^2 + 1)$ se anula solamente en $x = 0$, siendo $h''(x) < 0$ para $x < 0$ y $h''(x) > 0$ para $x > 0$, es decir, h es cóncava en $]-\infty, 0[$ y convexa en $]0, +\infty[$. Con esta información ya podemos representar su gráfica.



De esta gráfica se deducen fácilmente los mismos resultados antes obtenidos. Nótese que como $f(x) = h(x) + \alpha$, la gráfica de f se obtiene trasladando la de h hacia arriba (si $\alpha > 0$) o hacia abajo (si $\alpha < 0$). Se ve así claramente, que cuando $\alpha = -22$ o $\alpha = 22$, la gráfica de f *es tangente al eje de abscisas* en el punto -1 o en el 1 donde hay un cero doble. ☺

Ejercicio resuelto **130** Justifica que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

Solución. Sea $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$. Se trata de probar que f se anula en exactamente dos puntos. La función f es continua y $f(0) = -1$, $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2 + 1$. El teorema de Bolzano nos dice que f se anula en algún punto del intervalo $]-\pi, 0[$ y en algún punto del intervalo $]0, \pi[$. Luego f se anula al menos en dos puntos. Veamos que no puede anularse en más de dos puntos. En efecto, la derivada de f es $f'(x) = x(2 - \cos x)$. Como $2 - \cos x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que la derivada f' solamente se anula en $x = 0$. Si la función f se anulara en tres o más puntos, en virtud del teorema de Rolle, su derivada debería anularse al menos en dos puntos, lo cual, según acabamos de ver, no ocurre. Concluimos que f se anula exactamente en dos puntos.

Alternativamente, podemos razonar como sigue. Al ser $f'(x) < 0$ para todo $x < 0$, la función f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$, luego solamente puede anularse una vez en $\mathbb{R}^-$. Análogamente, como $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$, la función f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, luego solamente puede anularse una vez en $\mathbb{R}^+$. ☺

Ejercicio resuelto **131** Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reales. Prueba que para algún $x \in [0,1]$ se verifica que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}.$$

Solución. Se trata del típico ejercicio que una vez que sabes cómo se hace te parece muy fácil. Pero se te tiene que ocurrir cómo hacerlo. La pista la dan los números $\dfrac{a_k}{k+1}$ y el “para algún $x \in [0,1]$”. El ejercicio recuerda al teorema del valor medio. Después de pensarlo un poco, se nos ocurre considerar la función

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

El teorema del valor medio aplicado a esta función en el intervalo $[0,1]$, nos dice que hay un punto $x \in]0,1[$ tal que

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1) = f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Eso es justamente lo que había que probar. ☺

Ejercicio resuelto **132** Sea f una función polinómica y sea $a < b$. Justifica que, *contando cada cero tantas veces como su orden*, si $f(a)f(b) < 0$ el número de ceros de f en $]a,b[$ es impar; y si $f(a)f(b) > 0$ dicho número (caso de que haya algún cero) es par. Deduce que si f tiene grado n, es condición necesaria y suficiente para que f tenga n raíces reales distintas que su derivada tenga $n-1$ raíces reales distintas $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$ y que para $\alpha < c_1$ suficientemente pequeño y para $\beta > c_{n-1}$ suficientemente grande, los signos de los números $f(\alpha), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_{n-1}), f(\beta)$ vayan alternando.

Solución. Si f es un polinomio de grado n y c es un cero de orden k de f, entonces tenemos que $f(x) = (x-c)^k h(x)$ donde $h(x)$ es un polinomio de grado $n-k$ con $h(c) \neq 0$. Podemos suponer, por comodidad, que $h(c) > 0$. Por la continuidad de h, hay un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todo $x \in I$ se verifica que $h(x) > 0$.

- Si k es par, tenemos que $(x-c)^k > 0$ para todo $x \neq c$ y deducimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in I \setminus \{c\}$. Por tanto, la gráfica de f *no atraviesa* al eje de abscisas en $x = c$.

- Si k es impar, tenemos que $(x-c)^k > 0$ para $x > c$ y $(x-c)^k < 0$ para $x < c$. Deducimos que $f(x) > 0$ para $x > c$ y $f(x) < 0$ para $x < c$. Por tanto, la gráfica de f *atraviesa* al eje de abscisas en $x = c$.

En otros términos, en un cero de orden par la función f no cambia de signo y en un cero de orden impar sí cambia.

Es claro que si $f(a)f(b) < 0$ el número de cambios de signo de f entre a y b tiene que ser impar. Deducimos, por lo antes visto, que f tiene en $]a,b[$ un número impar de ceros de orden impar, por lo que el número total de ceros de f en $]a,b[$, contando cada cero tantas veces como su orden, es impar.

Análogamente, si $f(a)f(b) > 0$ el número de cambios de signo de f entre a y b tiene que ser par (o ninguno) y deducimos que el número total de ceros de f en $]a,b[$ es par.

Si f tiene n ceros (reales) distintos, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$, estos ceros determinan $n-1$ intervalos $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ y, por el teorema de Rolle, en cada uno de esos intervalos la derivada tiene que tener algún cero $c_j \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$. Deducimos así que la derivada tiene $n-1$ raíces (reales) distintas $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$. Como en cada intervalo $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ la gráfica de f atraviesa una vez el eje de abscisas, deducimos que $f(c_j)f(c_{j+1}) < 0$, es decir, los números $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_{n-1})$ van alternando su signo. Ahora, si $\alpha < \alpha_1$, en el intervalo $]\alpha, c_1[$ la función f tiene un cero simple α_1 y, por tanto, su gráfica atraviesa una vez al eje de abscisas, luego $f(\alpha)f(c_1) < 0$. Análogamente, si $\alpha_n < \beta$ debe ser $f(c_{n-1})f(\beta) < 0$. Hemos probado así que la condición del enunciado es necesaria.

Recíprocamente, la condición del enunciado implica que f tiene $n+1$ cambios de signo, luego tiene n raíces distintas. ☺

Ejercicio resuelto **133** Determina para qué valores de α la función polinómica

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$$

tiene cuatro raíces reales distintas.

Solución. Sea $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$. Como

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x+1)(x-1)(x-2)$$

y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, se sigue, en virtud del ejercicio anterior, que f tiene 4 raíces reales distintas si, y sólo si, $f(-1) = -19 + \alpha < 0$, $f(1) = 13 + \alpha > 0$ y $f(2) = 8 + \alpha < 0$. Estas condiciones equivalen a $-13 < \alpha < -8$. ☺

Ejercicio resuelto **134** Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $f(x) = (x^2-1)^n$. Prueba que la derivada k-ésima ($1 \leqslant k \leqslant n$) de f tiene exactamente k raíces reales distintas en el intervalo $]-1, 1[$.

Solución. Observa que f es un polinomio de grado $2n$ que tiene un cero de orden n en $x = -1$ y otro cero de orden n en $x = 1$. La derivada de orden k de f será un polinomio de grado $2n-k$ que tendrá un cero de orden $n-k$ en $x = -1$ y otro cero de orden $n-k$ en $x = 1$, luego debe ser de la forma $f^{(k)}(x) = (x^2-1)^{n-k}P_k(x)$ donde $P_k(x)$ es un polinomio de grado k. Lo que nos piden es probar que para $1 \leqslant k \leqslant n$ el polinomio $P_k(x)$ tiene k raíces reales distintas en el intervalo $]-1, 1[$. Lo haremos por inducción (finita). Para $k = 1$, $f'(x) = (x^2-1)^{n-1}2n\,x$ que tiene un cero en $]-1, 1[$. Supongamos que $1 < k < n-1$ y que $P_k(x)$ tiene k raíces reales distintas, $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ en el intervalo $]-1, 1[$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (x^2-1)^{n-k-1}2(n-k)xP_k(x) + (x^2-1)^{n-k}{P_k}'(x) \\ &= (x^2-1)^{n-k-1}\big(2(n-k)xP_k(x) + (x^2-1){P_k}'(x)\big). \end{aligned}$$

Por tanto

$$P_{k+1}(x) = 2(n-k)xP_k(x) + (x^2-1){P_k}'(x).$$

El polinomio ${P_k}'(x)$ tiene un cero en cada uno de los intervalos $]a_j, a_{j+1}[$ y, como hay en total $k-1$ de ellos, deducimos que ${P_k}'(x)$ tiene $k-1$ ceros simples $c_j \in]a_j, a_{j+1}[$.

En cada uno de dichos ceros ${P_k}'(x)$ cambia de signo, es decir, ${P_k}'(a_j){P_k}'(a_{j+1}) < 0$. Supongamos, por comodidad, que ${P_k}'(a_1) < 0$. Entonces $(-1)^j {P_k}'(a_j) > 0$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. Como

$$P_{k+1}(a_j) = 2(n-k)a_j P_k(a_j) + (a_j^2 - 1){P_k}'(a_j) = (a_j^2 - 1){P_k}'(a_j)$$

y $a_j^2 - 1 < 0$, deducimos que

$$(-1)^j P_{k+1}(a_j) = (a_j^2 - 1)(-1)^j {P_k}'(a_j) < 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Por tanto $P_{k+1}(x)$ tiene una raíz en cada uno de los $k-1$ intervalos $]a_j, a_{j+1}[$.

Probaremos ahora que $P_{k+1}(x)$ tiene una raíz en $]-1, a_1[$ y otra en $]a_k, 1[$. Como $(-1)^j P_{k+1}(a_j) < 0$, se sigue que $P_{k+1}(a_1) > 0$. Tenemos también que $P_{k+1}(-1) = -2(n-k)P_k(-1)$ por lo que, al ser $n-k > 0$, será suficiente probar que $P_k(-1) > 0$. Para ello basta observar que como ${P_k}'(x) \neq 0$ para $x < c_1$ y como ${P_k}'(a_1) < 0$, se sigue que ${P_k}'(x) < 0$ para todo $x < c_1$. Luego $P_k(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $]-\infty, c_1]$ y como se anula en $a_1 < c_1$, concluimos que $P_k(x) > 0$ para $x < a_1$ y, por tanto, $P_k(-1) > 0$. Análogamente se prueba que $P_k(x)$ tiene una raíz en $]a_k, 1[$. ☺

Ejercicio resuelto 135 Prueba que $-a\,\mathrm{e}\log x \leqslant x^{-a}$ para todo $x > 0$ y todo $a \in \mathbb{R}$.

Solución. La desigualdad propuesta, aparentemente, depende de dos variables $a \in \mathbb{R}$ y $x > 0$. Debemos escribirla en función de una sola variable. Para ello basta escribir dicha desigualdad en la forma:

$$\frac{\log\left(x^{-a}\right)}{x^{-a}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Teniendo en cuenta que $x^{-a} = \exp(-a\log x)$ puede ser cualquier número positivo, vemos que realmente se trata de probar la desigualdad $\dfrac{\log t}{t} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ para todo $t > 0$.

Sea, pues, $f(t) = \dfrac{\log t}{t}$ donde $t > 0$. Tenemos que $f'(t) = \dfrac{1-\log t}{t^2}$ y, por tanto, $f'(t) > 0$ si $0 < t < \mathrm{e}$ por lo que f es estrictamente creciente en $]0, \mathrm{e}]$ y $f'(t) < 0$ si $t > \mathrm{e}$ por lo que f es estrictamente decreciente en $[\mathrm{e}, +\infty[$. Deducimos que f alcanza en $t = \mathrm{e}$ un máximo absoluto en $\mathbb{R}^+$. Luego $f(t) \leqslant f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$.

Hemos probado que

$$\frac{\log t}{t} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad (t > 0) \tag{6.27}$$

Además, esta desigualdad es estricta para $t \neq \mathrm{e}$.

Haciendo en (6.27) $t = x^{-a}$, donde $x > 0$ y $a \in \mathbb{R}$, deducimos que la desigualdad $-a\,\mathrm{e}\log x \leqslant x^{-a}$ es válida para todo $x > 0$ y para todo $a \in \mathbb{R}$. ☺

Ejercicio resuelto 136 Dado $\alpha \in]0, 1[$ demuestra que $x^\alpha < \alpha x + 1 - \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $x \neq 1$.

Solución. Sea $f(x) = \alpha x + 1 - \alpha - x^\alpha$. Es claro que $f(1) = 0$, por tanto, todo consiste en probar que la función f alcanza en $x = 1$ un mínimo absoluto estricto. Tenemos que $f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$. Para $0 < x < 1$ es $(\alpha - 1)\log x > 0$ y, por tanto,

$x^{\alpha-1} = \exp\big((\alpha-1)\log x\big) > 1$, lo que implica, por ser $\alpha > 0$, que $f'(x) < 0$. Análogamente se justifica que $f'(x) > 0$ si $x > 1$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $]0,1]$ y estrictamente creciente en $[1,+\infty[$. Concluimos así que $f(x) > f(1) = 0$ para todo $x > 0$, $x \neq 1$.

Tenemos que:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \Longleftrightarrow ab^{1-q} \leqslant \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a^p b^{-q}}{p} + 1 - \frac{1}{p}$$

Poniendo $\alpha = \frac{1}{p}$ y $x = ab^{1-q}$, con lo que $x^\alpha = a^p b^{-q}$, esta desigualdad es un caso particular de la antes probada. La igualdad ocurre si, y sólo si, $x = 1$, es decir, $a^p = b^q$. ☺

Ejercicio resuelto 137 Prueba que para todo $x \in]0,\pi/2[$ se verifica que:

$$\text{i) } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x\,; \quad \text{ii) } \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

Solución.

i) Sea $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Tenemos que $f'(x) = -\operatorname{sen} x + x$ y $f''(x) = 1 - \cos x$. Como $f''(x) > 0$ para todo $x \in]0,\pi/2[$, se sigue que f' es estrictamente creciente en $[0,\pi/2]$ y, como $f'(0) = 0$, obtenemos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in]0,\pi/2[$. Por tanto f es estrictamente creciente en $[0,\pi/2]$. Puesto que $f(0) = 0$, concluimos finalmente que $f(x) > 0$ para todo $x \in]0,\pi/2]$.

ii) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{2x}{\pi}$. Tenemos que $f'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$ y $f''(x) = -\operatorname{sen} x$. Como $f''(x) < 0$ para todo $x \in]0,\pi/2[$, se sigue que f' es estrictamente decreciente en $[0,\pi/2]$. Como $f'(0) > 0$, y $f'(\pi/2) < 0$, deducimos que hay un único punto $x_0 \in]0,\pi/2[$ tal que $f'(x_0) = 0$, y en dicho punto la función f alcanza un máximo absoluto en $[0,\pi/2]$. Sabemos, por el teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass, que f tiene que alcanzar un valor mínimo absoluto en $[0,\pi/2]$. Dicho mínimo absoluto necesariamente tiene que alcanzarse en los extremos del intervalo ya que si se alcanzara en un punto interior, en dicho punto habría de anularse la derivada y hemos visto que ésta sólo se anula en un punto que es de máximo absoluto. Como $f(0) = f(\pi/2) = 0$ concluimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in]0,\pi/2[$.

Observa que en ambos casos interesa trabajar en el intervalo cerrado $[0,\pi/2]$. ☺

Ejercicio resuelto 138 **Desigualdad de Jensen**. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa en el intervalo I, y sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dados números $\alpha_k > 0$, $x_k \in I$ tales que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, prueba que:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k). \tag{6.28}$$

Además, si f es estrictamente convexa, la desigualdad anterior es estricta siempre que al menos dos de los puntos x_k sean distintos.

Solución. Para $n = 2$ la desigualdad del enunciado es

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

donde α_1 y α_2 son números positivos con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Pero esta es justamente la definición de función convexa (si no lo ves claro, pon $t = \alpha_1$, $1 - t = 1 - \alpha_1 = \alpha_2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ con lo que dicha desigualdad es exactamente igual que la desigualdad (6.24).)

Supongamos que la desigualdad (6.28) sea cierta para un número natural $n \geqslant 2$ y probemos que, en tal caso, también es cierta para $n+1$. Sean $\alpha_k > 0$ tales que $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$ y sean $x_k \in I$ para $k = 1, 2, \dots, n+1$. Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} \tag{6.29}$$

Pongamos $\lambda_k = \dfrac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} > 0$. Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \frac{1}{1 - \alpha_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{1 - \alpha_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}} = 1$$

Por tanto, el número $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ está en I porque está comprendido entre el mínimo y el máximo de los x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Escribiendo la igualdad (6.29) en la forma:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = (1 - \alpha_{n+1}) x + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

Y usando que f es convexa, tenemos que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leqslant (1 - \alpha_{n+1}) f(x) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

Por la hipótesis de inducción aplicada a $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ con $\lambda_k > 0$ y $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, tenemos que

$$f(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_k)$$

De las dos últimas desigualdades se deduce que:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k).$$

Lo que completa la demostración por inducción.

Finalmente, si la función f es estrictamente convexa, entonces las desigualdades son estrictas salvo en el caso trivial de que todos los puntos x_k coincidan. ☺

Ejercicio resuelto **139** Sean x_k, α_k, donde $1 \leqslant k \leqslant n$, números positivos verificando que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Usando de la convexidad de la función $x \mapsto -\log x$ demuestra la desigualdad:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \tag{6.30}$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. La función $f(x) = -\log x$ es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^+$ porque su derivada segunda es positiva en $\mathbb{R}^+$. Usando la desigualdad de Jensen, tenemos que

$$-\log\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right) \leqslant -\sum_{k=1}^{n}\log(\alpha_k x_k) = -\sum_{k=1}^{n}\log\left(x_k^{\alpha_k}\right) = -\log\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\right)$$

Teniendo en cuenta que la función logaritmo es estrictamente creciente, la desigualdad anterior es equivalente a la que se pide probar.

La igualdad solamente ocurre cuando todos los x_k coinciden. ☺

Ejercicio resuelto 140 Sean p, q números reales positivos tales que $1/p + 1/q = 1$.

a) Prueba que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ y la igualdad ocurre si, y sólo si, $a^p = b^q$.

b) Dado $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ y $s > 0$, definamos $\|z\|_s = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|z_i|^s\right)^{1/s}$. Prueba que para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y todo $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se verifica la **desigualdad de Hölder**:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q .$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Sugerencias. El punto a) puede hacerse como consecuencia del ejercicio anterior. Para b) hágase $a = \dfrac{|x_i|}{\|x\|_p}$, $b = \dfrac{|y_i|}{\|y\|_q}$ en la desigualdad del punto a).

Solución.

a) Haciendo en la desigualdad (6.30) $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, $\alpha_1 = 1/p$ y $\alpha_2 = 1/q$, obtenemos la desigualdad:

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

La igualdad ocurre si, y sólo si, $a^p = b^q$.

b) Tenemos que:

$$\frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}\frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q}$$

Sumando estas desigualdades:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}\frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\sum_{1=1}^{n}\frac{|x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Lo que prueba la desigualdad de Hölder. La igualdad ocurre si, y solamente si, $|x_i|^p = \rho\,|y_i|^q$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, donde $\rho = \dfrac{\|\mathbf{x}\|_p^p}{\|\mathbf{y}\|_q^q}$

Para $s = 2$, el número $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$ se llama **norma euclídea** del vector $\mathbf{x}$. La desigualdad de Hölder para $p = q = 2$ se llama **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \, \|\mathbf{y}\|_2 \tag{6.31}$$

La igualdad ocurre si, y sólo si, $|x_j| = \lambda\, |y_j|$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

La desigualdad (6.31) suele escribirse de la forma:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \, \|\mathbf{y}\|_2 \tag{6.32}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|\,, \tag{6.33}$$

es claro que la desigualdad (6.32) es consecuencia de la (6.31). Pero basta sustituir en (6.32) x_j e y_j por $|x_j|$ y $|y_j|$, lo que no afecta para nada a las respectivas normas euclídeas, para convertir (6.32) en (6.31).

Veamos cuándo se da la igualdad en (6.32). Es claro que para ello tiene que darse la igualdad en (6.33) y en (6.31). La igualdad en (6.33) equivale a que los números $x_j y_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ sean todos mayores o iguales que cero o todos menores o iguales que cero. La igualdad en (6.31) sabemos que equivale a que $|x_j| = \lambda\, |y_j|$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Estas dos condiciones juntas equivalen a que $x_j = \mu y_j$ para $1 \leqslant j \leqslant n$, donde $\mu \in \mathbb{R}$, es decir, los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ son linealmente dependientes. ☺

Ejercicio resuelto 141 Sea f es una función derivable en un intervalo I. Prueba que f es convexa en I si, y sólo si, la gráfica de f queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, para todo par de puntos $x, a \in I$ se verifica que $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a)$.

Solución. Supongamos que f es convexas y sea $x < a$. De la desigualdad:

$$f(tx + (1-t)a) \leqslant tf(x) + (1-t)f(a) = t(f(x) - f(a)) + f(a) \qquad 0 < t < 1$$

se deduce que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(a + t(x-a)) - f(a)}{t(x-a)}.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $t \in]0, 1[$, tomando límites en la derecha para $t \to 0$ se deduce que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant f'(a) \qquad \longrightarrow \qquad f(x) - f(a) \geqslant f'(a)(x - a)$$

Para el caso en que $x > a$ se obtiene la misma desigualdad.

Supongamos ahora que f es derivable en I y para todo par de puntos $x,a\in I$ se verifica que:

$$f(x) \geqslant f(a)+f'(a)(x-a) \tag{6.34}$$

Supongamos que $a<b$. Sustituyendo en la desigualdad anterior x por b resulta:

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Sustituyendo ahora en (6.34) a por b y x por a, obtenemos:

$$f(a) \geqslant f(b)+f'(b)(a-b) \quad \longrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$$

De esta desigualdad y de la anterior, deducimos que $f'(a) \leqslant f'(b)$, lo que prueba que la derivada de f es creciente en I. ☺

Ejercicio resuelto 142 Prueba que las únicas funciones n veces derivables con derivada de orden n constante son las funciones polinómicas de grado menor o igual que n.

Solución. Sea f una función n veces derivables con derivada de orden n constante. Naturalmente, dicha función tiene derivada de orden $n+1$ idénticamente nula. Dado, $x\in\mathbb{R}$, aplicamos el teorema de Taylor con resto de Lagrange a f en el punto $a=0$, y deducimos que existe un punto c comprendido entre 0 y x tal que:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

y como $f^{(n+1)}(t)=0$ para todo $t\in\mathbb{R}$, concluimos que f coincide con su polinomio de Taylor de orden n en $a=0$ y, por tanto, es una función polinómica de grado $\leqslant n$.

Fíjate que no cabe esperar que este resultado pueda probarse sin usar algún resultado teórico profundo. Recuerda que se necesita el teorema del valor medio para probar que una función con primera derivada nula es constante. ☺

Ejercicio resuelto 143 Prueba que el polinomio de Taylor de orden n de una función f es el único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que $f(x)=P(x)+o(x-a)^n$.

Solución. Supongamos que $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas de grado menor o igual que n tales que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0$$

Entonces, se tiene que

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0$$

Pongamos $H(x)=P(x)-Q(x)$ que es una función polinómica de grado $\leqslant n$. Sea $T_n(H,a)(x)$ el polinomio de Taylor de orden n de H en a. Por el teorema de Taylor–Young sabemos que:

$$\lim_{x\to a}\frac{H(x)-T_n(H,a)(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Como:
$$\frac{T_n(H,a)(x)}{(x-a)^n} = \frac{H(x)}{(x-a)^n} - \frac{H(x)-T_n(H,a)(x)}{(x-a)^n} +$$

Deducimos que:
$$\lim_{x\to a} \frac{T_n(H,a)(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Evidentemente, la única posibilidad de que esto ocurra es que el polinomio $T_n(H,a)(x)$ sea idénticamente nulo. Pero, como H es una función polinómica de grado $\leqslant n$, sabemos que $T_n(H,a)(x) = H(x)$, por tanto, H es idénticamente nulo, es decir, $P(x) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ☺

Ejercicio resuelto **144** Sea $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la función dada por:
$$f(x) = \frac{\log(1+\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$$
para $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $x \neq 0$, y $f(0) = -1/2$. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0.

Solución. La forma de la función f sugiere considerar la siguiente función:
$$g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x^2}, \quad g(0) = -\frac{1}{2}.$$

Pues se tiene que $f(x) = g(\operatorname{sen} x)$, por lo que si sabemos derivar g también sabemos derivar f. En principio, debemos calcular las derivadas $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$. Pero también podemos intentar calcular directamente un polinomio $P(x)$ de grado $\leqslant 3$ tal que $f(x) = P(x) + o(x^3)$ pues, por el ejercicio anterior, $P(x)$ será el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0. La ventaja de proceder así es que nos ahorramos bastante trabajo y, además, podemos aprovecharnos de que los polinomios de Taylor de g en 0 se deducen fácilmente de los polinomios de Taylor de $\log(1+x)$ en 0 y éstos son conocidos. Sabemos que
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$$

Deducimos que
$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-2} + o(x^{n-2})$$

Acabamos de calcular el polinomio de Taylor de orden $n-2$ de g en 0. En particular
$$T_3(g,0)(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5}$$

Tenemos que
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - T_3(g,0)(x)}{x^3} = 0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen}^3 x} \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g,0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} = 0$$
$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g,0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} = 0$$

La idea ahora es obtener un polinomio, $P(x)$, de grado $\leqslant 3$ tal que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{T_3(g,0)(\operatorname{sen} x) - P(x)}{x^3} = 0,$$

pues entonces como:

$$\frac{f(x) - P(x)}{x^3} = \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g,0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} + \frac{T_3(g,0)(\operatorname{sen} x) - P(x)}{x^3}$$

tendremos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^3} = 0$$

y, por tanto, $P(x)$ será el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0.

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

es muy fácil calcular $P(x)$. De hecho, tenemos que:

$$T_3(g,0)(\operatorname{sen} x) = T_3(g,0)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{90}x^3 + o(x^3)$$

Donde deben hacerse los cálculos sabiendo lo que se busca para no hacer trabajo innecesario. Alternativamente, puedes calcular directamente $P(x)$ porque es el polinomio de Taylor de orden 3 de $T_3(g,0)(\operatorname{sen} x)$ en 0. De una forma u otra, concluimos que el polinomio pedido es:

$$P(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{90}x^3$$

Observa que no hemos necesitado calcular las tres primeras derivadas de f en 0, pero ahora las conocemos:

$$f'(0) = \frac{1}{3},\ f''(0) = -\frac{1}{2},\ f'''(0) = \frac{13}{15}$$

☺

Ejercicio resuelto **145** Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor que ε en cada uno de los casos siguientes:

$a)\ \alpha = \sqrt[3]{7},\ \varepsilon = 10^{-3}$ $b)\ \alpha = \sqrt{\mathrm{e}},\ \varepsilon = 10^{-3}$ $c)\ \alpha = \operatorname{sen}\frac{1}{2},\ \varepsilon = 10^{-4}$ $d)\ \alpha = \operatorname{sen}(61^\circ),\ \varepsilon = 10^{-8}$

Solución. a) Elegimos un punto a próximo a $x = 7$ en el que podamos calcular de forma exacta el valor de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y de sus derivadas. El punto $a = 8$ es un buen candidato, pues está próximo a $x = 7$ y $\sqrt[3]{8} = 2$. El error que se comete al aproximar $\sqrt[3]{7}$ por el correspondiente valor del polinomio de Taylor $T_n(f,a)(x)$ viene dado por

$$\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = [a = 8,\ x = 7] = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}$$

donde $7 < c < 8$. Como

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)\cdots\left(\frac{1}{3} - n + 1\right)x^{1/3-n} = \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdots(3(n-1)-1)}{3^n}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^n}$$

deducimos que

$$\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} < \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{(n+1)!3^{n+1}}\frac{\sqrt[3]{8}}{7^{n+1}} < \frac{2}{7^{n+1}}$$

y basta tomar $n = 4$ para que el error cometido al aproximar $\sqrt[3]{7}$ por el valor del polinomio de Taylor $T_3(f,8)(7)$ sea menor que 10^{-3}.

Si hubiéramos tomado $a = 1{,}9^3 = 6{,}859$ la aproximación obtenida hubiera sido mucho mejor porque $7 - 6{,}859 = 0{,}141$. Y aún mejor tomando $a = 1{,}91^3 = 6{,}96787$, pues $7 - 6{,}96787 < 0{,}05$. En ambos casos el valor de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y de sus derivadas puede calcularse de forma exacta en a.

d) Lo primero que hay que hacer es expresar el seno en radianes. Tenemos que

$$\operatorname{sen}(61^\circ) = \operatorname{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$$

Claramente, debemos elegir $a = \pi/3$. El error que se comete al aproximar $\operatorname{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right)$ por el correspondiente valor del polinomio de Taylor $T_n(\operatorname{sen}, a)(x)$ viene dado por

$$\frac{\left|\operatorname{sen}^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = \left[a = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{61\pi}{180}\right] \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{2}{100}\right)^{n+1}$$

donde hemos tenido en cuenta que las derivadas del seno están acotadas por 1 y que $\frac{\pi}{180} < \frac{3{,}5}{180} < \frac{2}{100}$. Deducimos que basta tomar $n = 3$ para que el error cometido al aproximar $\operatorname{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right)$ por el valor del polinomio de Taylor $T_3\left(\operatorname{sen}, \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{61\pi}{180}\right)$ sea menor que 10^{-8}. ☺

Ejercicio resuelto **146** Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

1. $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.
2. $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2\operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5 - 2x)$ en el intervalo $[-1, 2]$.
5. $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución.

3) La función $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2\operatorname{sen} x - x$, tiene como derivada

$$f'(x) = \cos x\ \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + 2\cos x - 1 = \frac{1}{2}(-1 + 2\cos x)(2 + \operatorname{sen} x)$$

Por tanto, el único cero de la derivada en el intervalo $[0, \pi/2]$ es $x = \pi/3$. Como para $0 \leqslant x < \pi/3$ es $f'(x) > 0$ y para $\pi/3 < x \leqslant \pi/2$ es $f'(x) < 0$, se sigue que el valor máximo absoluto de la función f en $[0, \pi/2]$ se alcanza un en $x = \pi/3$ y vale

$f(\pi/3) = \dfrac{5}{8} + \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$. El valor mínimo absoluto debe alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo. Como $f(0) = \dfrac{1}{2}$ y $f(\pi/2) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\pi}{2}$, se sigue que el valor mínimo absoluto de f en $[0, \pi/2]$ se alcanza en $x = 0$.

4) La función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5 - 2x)$, tiene como derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{2/3-1}(5-2x) - 2\,x^{2/3} = x^{2/3}\left(\frac{10-4x}{3x} - 2\right) = \sqrt[3]{x^2}\frac{10(1-x)}{3x} \quad x \neq 0$$

Claramente, f no es derivable en $x = 0$. El único cero de la derivada es $x = 1$, puesto que $f'(x) < 0$, para $-1 \leqslant x < 0$, $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$ y $f'(x) < 0$ para $1 < x \leqslant 3$, se sigue que f es estrictamente decreciente en $[-1, 0]$, estrictamente creciente en $[0, 1]$ y estrictamente decreciente en $[1, 3]$. Por tanto $x = 0$ es un mínimo relativo y $x = 1$ es un máximo relativo. Como $f(-1) = 7$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ y $f(3) = -\sqrt[3]{9}$, se sigue que, en el intervalo $[-1, 3]$, el mínimo absoluto de f se alcanza en el punto $x = 3$ y el máximo absoluto se alcanza en $x = -1$. ☺

Ejercicio resuelto 147 Para cada número real t sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2x$. Calcula, para cada valor de $t \in [-1, 1]$, el mínimo valor de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución. Tenemos que:

$$f'(x) = -x^2 + t^2 = (t + x)(t - x) = 0 \longrightarrow x = t \text{ o } x = -t$$

Solamente nos interesa el cero de f' en $[0, 1]$. Distinguiremos dos casos.

a) $-1 \leqslant t \leqslant 0$. En este caso el único punto de $[0, 1]$ donde la derivada se anula es $x_0 = -t$. Además, se tiene que para $0 \leqslant x \leqslant x_0$ es $f'(x) \geqslant 0$ y para $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ es $f'(x) \leqslant 0$. Por tanto en x_0 hay un máximo absoluto. El mínimo absoluto de f debe alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo. Tenemos que $f(0) = 0$ y $f(1) = t^2 - \frac{1}{3}$. Por tanto, si $-1 \leqslant t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ se tiene que $f(0) < f(1)$ y el mínimo absoluto se alcanza en $x = 0$. Si $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant t \leqslant 0$ se tiene que $f(1) \leqslant f(0)$ y el mínimo absoluto se alcanza en $x = 1$.

b) $0 \leqslant t \leqslant 1$. Se hace de la misma forma. ☺

Ejercicio resuelto 148 Definamos $f(x) = 5x^2 + \alpha x^{-5}$, donde $\alpha > 0$ es una constante. Calcula el valor más pequeño de α tal que $f(x) \geqslant 21$ para todo $x > 0$.

Solución. Calcularemos el mínimo de $f(x)$ en $\mathbb{R}^+$, que dependerá de α, e impondremos que dicho mínimo sea $\geqslant 21$. Tenemos que:

$$f'(x) = 10x - 5\alpha x^{-6} = 5x^{-6}(2x^7 - \alpha)$$

El único cero de f' en $\mathbb{R}^+$ es $x_0 = \sqrt[7]{\frac{\alpha}{2}}$. Para $0 < x < x_0$ se tiene que $f'(x) < 0$ y para $x > x_0$ es $f'(x) > 0$. Deducimos que f alcanza en x_0 su valor mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$. Imponemos la condición de que dicho valor mínimo sea $\geqslant 21$:

$$f(x_0) = 5x_0^2 + \alpha x_0^{-5} = 5\frac{\alpha^{\frac{2}{7}}}{2^{\frac{2}{7}}} + \alpha\frac{2^{\frac{5}{7}}}{\alpha^{\frac{5}{7}}} = \alpha^{\frac{2}{7}}\frac{7}{2^{\frac{2}{7}}} \geqslant 21 \iff \alpha \geqslant 2\left(\frac{21}{7}\right)^{\frac{7}{2}} = 54\sqrt{3}$$

El valor mínimo pedido de α es $54\sqrt{3}$. ☺

Ejercicio resuelto **149** Calcula el mínimo valor de $\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales dados.

Solución. Se trata de calcular el mínimo absoluto de la función $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ cuando $x \in \mathbb{R}$. Cuando una función no está definida en un intervalo cerrado hay que estudiar el signo de la derivada si queremos calcular máximos o mínimos absolutos *cuya existencia habrá que justificar*. Tenemos

$$f'(x) = 2\sum_{k=1}^{n}(x-a_k) = 2n\,x - 2\sum_{k=1}^{n}a_k$$

que se anula solamente en

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Como $f''(x) = 2n > 0$, se sigue que $f'(x)$ es creciente y, por tanto, $f'(x) < 0$ si $x < \overline{x}$ y $f'(x) > 0$ si $x > \overline{x}$. Luego $f(\overline{x}) \leqslant f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, el valor mínimo buscado se obtiene cuando x se sustituye por la media aritmética, $\overline{x}$, de $a_1, a_2, \dots, a_n$. ☺

Ejercicio resuelto **150** Calcula la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{1/x}$.

Solución. Como se trata de una función continua, definida en un intervalo, su imagen tiene que ser un intervalo. Escribamos $f(x) = \exp\left(\dfrac{\log x}{x}\right)$. Tenemos que $f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}f(x)$. Es evidente que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. La derivada se anula solamente para $x = \mathrm{e}$, y $f'(x) > 0$ para $0 < x < \mathrm{e}$, $f'(x) < 0$ para $x > \mathrm{e}$. Deducimos que en $x = \mathrm{e}$ la función alcanza un máximo absoluto. Es claro que f no alcanza ningún mínimo absoluto aunque toma valores arbitrariamente próximos a 0, pues como $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\log x}{x} = -\infty$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$. Concluimos que la imagen de f es el intervalo $]0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$. ☺

Ejercicio resuelto **151** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Estudia la continuidad y derivabilidad de f y calcula su imagen.

Solución. Consideremos la función $g : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por $g(x) = \mathrm{e}^{-1/x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{1/x}}$, y $g(0) = 0$. Recuerda que para todo número $r \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{\mathrm{e}^x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^r\,\mathrm{e}^{1/x}} = 0$$

Como $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0$, la función g es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Para $x > 0$ es

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} = \frac{1}{x^2\,\mathrm{e}^{1/x}},$$

por lo que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x) = 0$ y, por un resultado de teoría usado ya en varias ocasiones, concluimos que g es derivable en 0 con $g'(0) = 0$ siendo, además, g' continua en 0 y,

por tanto, en $\mathbb{R}_o^+$. Como para $x > 0$ es $g''(x) = \left(-2x^{-3} + x^{-4}\right) e^{-1/x}$, se sigue que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g''(x) = 0$, luego g es dos veces derivable en 0 siendo $g''(0) = 0$. De esta forma puedes demostrar por inducción que g tiene derivadas de todos órdenes en $x = 0$ siendo $g^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $f(x) = g(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que también f tiene derivadas de todos órdenes en $x = 0$ siendo $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, f tiene derivadas de todos órdenes en $\mathbb{R}$, es decir, es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

Sabemos que la imagen de f es un intervalo. El mínimo absoluto de f se alcanza en $x = 0$. Como $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, se tiene que $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$. Luego f es estrictamente decreciente en $]-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, +\infty[$. Además como $f(-x) = f(x)$, tenemos que $f(\mathbb{R}) = f([0, +\infty[) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0, 1[$. ☺

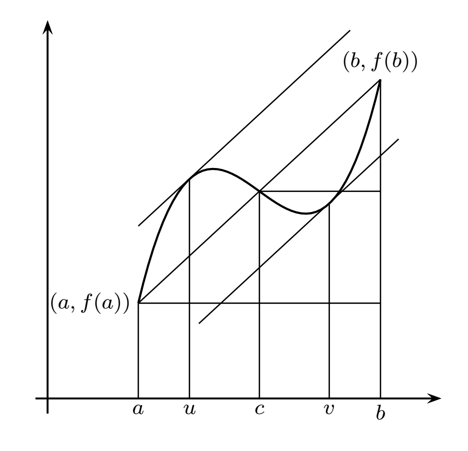
Ejercicio resuelto **152** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable dos veces en $]a, b[$. Supongamos que el segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ corta a la gráfica de f en un punto $(c, f(c))$ con $a < c < b$. Demuestra que existe algún punto $d \in]a, b[$ tal que $f''(d) = 0$.

Sugerencia. Interpreta gráficamente el enunciado.

Solución.

Basta aplicar el teorema del valor medio a f en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ para obtener que hay puntos $u \in]a, c[$, $v \in]c, b[$ tales que

$$f'(u) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \quad f'(v) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$



Como los puntos $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ y $(b, f(b))$ están alineados es:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Por tanto $f'(u) = f'(v)$.
Aplicamos ahora el teorema de Rolle a f' en $[u, v]$, para concluir que hay algún $z \in]u, v[$ tal que $f''(z) = 0$. ☺

Ejercicio resuelto **153** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable y f' creciente. Prueba que la función $g :]a, b] \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in]a, b]$ por $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es creciente.

Solución.

Podemos derivar $g(x)$ como se deriva un cociente. Tenemos

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2}, \quad (a < x \leqslant b)$$

Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[a,x]$, tenemos $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$ para algún $c\in]a,x[$. Por tanto

$$f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))=(f'(x)-f'(c))(x-a)\geqslant 0$$

por ser f' creciente. Concluimos que $g'(x)\geqslant 0$ para todo $x\in]a,b]$, lo que implica que g es creciente en dicho intervalo. ☺

Ejercicio resuelto **154** Justifica que existe una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable y que verifica que $g(x)+\mathrm{e}^{g(x)}=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcula $g'(1)$ y $g'(1+\mathrm{e})$.

Solución.

Se trata de probar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\mathrm{e}^x+x$ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, pues entonces llamando g a la función inversa de f, se tendrá que $f(g(x))=x$, es decir, $g(x)+\mathrm{e}^{g(x)}=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Naturalmente, sería una ingenuidad intentar calcular de forma explícita la función inversa de f, pues la igualdad $x+\mathrm{e}^x=y$ no permite expresar de forma elemental x como función de y. Hemos de contentarnos con demostrar que la función g *existe*.

Desde luego, como $f'(x)=1+\mathrm{e}^x>0$, se sigue que f es inyectiva, de hecho, estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Además como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, se sigue que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$ (porque debe ser un intervalo no minorado ni mayorado). Luego f es una biyección y su función inversa, $g=f^{-1}$ verifica que $g(x)+\mathrm{e}^{g(x)}=x$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

En virtud del teorema de la función inversa, sabemos que g es derivable y la relación entre las respectivas derivadas viene dada por $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$. Como $g(1)=0$ (porque $f(0)=1$) y $g(1+\mathrm{e})=1$ (porque $f(1)=1+\mathrm{e}$), deducimos que

$$g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2},\quad g'(1+\mathrm{e})=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{1+\mathrm{e}}.$$



6.8. Orígenes y desarrollo del concepto de derivada

El concepto de derivada presupone los de función y de límite funcional, los cuales, como ya hemos visto en capítulos anteriores, tuvieron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual, por eso la definición de derivada 6.1 es relativamente reciente. No obstante, técnicas en las que podemos reconocer el uso, más o menos explícito, de derivadas, se han venido usando desde el siglo XVII, incluso antes de que Newton y Leibniz, en el último tercio de dicho siglo, las formularan en términos de *fluxiones* y de *cocientes diferenciales* respectivamente. Durante los siglos XVIII y XIX las derivadas fueron ampliamente desarrolladas y aplicadas a campos muy diversos y no fueron definidas en los términos actuales hasta el último tercio del siglo XIX. Todo este proceso lo resume la historiadora de las matemáticas Judith V. Grabiner en una

frase feliz [8]: *"Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y, finalmente, definida"*.

En lo que sigue vamos a repasar muy someramente este proceso. Además de la referencia antes citada, he seguido de cerca los trabajos de Kirsti Andersen [1], Israel Kleiner [10] y González Urbaneja [7].

6.8.1. Las matemáticas en Europa en el siglo XVII

Es conocido que la carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables, hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, lo que condujo al desarrollo de un álgebra geométrica que fue usada por Euclides, Arquímedes y Apolonio para realizar sus cálculos. La consecuencia de esta actitud fue que durante casi 2000 años, en Europa, casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.

Ya hemos comentado en capítulos anteriores cómo la herencia matemática griega pasó a los árabes de donde regresó a Europa ya en el siglo XII. En estos siglos se desarrolló sobre todo la aritmética y los comienzos del álgebra. Pero hay que esperar hasta el siglo XVII para que en Europa empiecen a notarse cambios significativos en la forma de hacer matemáticas y a lograr avances que abren nuevas perspectivas. Las características principales de las matemáticas en el siglo XVII en Europa son las siguientes.

- Asimilación y síntesis de la tradición clásica griega y del legado árabe.
- Se sigue admirando el rigor demostrativo euclidiano pero se buscan procedimientos heurísticos. Se impone la idea de "primero descubrir y luego demostrar".
- Progresos decisivos en el simbolismo algebraico (Viéte, Stevin). Concepto de cantidad abstracta.
- Invención de la geometría analítica por Fermat y Descartes.
- Multitud de nuevas curvas, muchas de ellas curvas mecánicas, como la cicloide, que llevan consigo problemas de tangentes, cuadraturas, centros de gravedad, máximos y mínimos, rectificaciones.
- Invención de métodos infinitesimales para tratar problemas de cuadraturas, tangentes, máximos y mínimos. Libre uso del infinito.
- Inicios del estudio matemático del movimiento. Concepto de cantidad variable.
- La Revolución Científica protagonizada por Copérnico, Galileo y Kepler. Mecanicismo.
- Invención de los logaritmos por Neper. Progresos de la astronomía y de la trigonometría. Desarrollo de la óptica.
- Creación de instituciones científicas como la Royal Society (1660) en Londres y la Académie des Sciences (1666) en París y comienzo de las publicaciones científicas periódicas.

En el periodo de 1630 a 1660 empiezan a usarse técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas. Suelen ser técnicas específicas para resolver problemas concretos de forma empírica, con frecuencia dichas técnicas no se justifican sino que, simplemente, se comprueba

que proporcionan soluciones correctas. Los matemáticos de la época se interesaban por problemas de óptica, por ejemplo, determinar la forma de una lente que hace que todos los rayos luminosos paralelos entre sí o los que parten de un único foco, después de atravesar la lente, converjan en un único punto. Problemas físicos, como la determinación de la trayectoria de un cuerpo que se mueve alrededor de un centro y que cae al mismo tiempo hacia ese centro con aceleración constante. Otros problemas consistían en el cálculo de tangentes y de valores máximos o mínimos. Estaban, además, los problemas relacionados con la integral (cuadraturas, áreas de superficies, centros de gravedad, rectificaciones de curvas,. . .) que consideraremos en el capítulo correspondiente.

6.8.2. Cálculo de tangentes y de valores extremos

Los matemáticos de la antigüedad sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes o la concoide de Nicomedes estas técnicas no eran de gran utilidad.

Con la invención de la geometría analítica, había una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales. Los matemáticos del siglo XVII se vieron en la necesidad de inventar nuevas técnicas para calcular tangentes. Vamos a considerar algunas de las aportaciones más significativas.

6.8.2.1. El método de máximos y mínimos de Fermat

En 1637 Fermat escribió una memoria titulada *Methodus ad disquirendam maximan et minimam* ("Método para la investigación de máximos y mínimos"). En ella se establecía el primer procedimiento general conocido para calcular máximos y mínimos. Fermat se expresa como sigue.

> Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:
>
> **1.** Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
> **2.** Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.
> **3.** Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a+e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos que pueden ser de cualquier grado.
> **4.** Se "*adigualará*" para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
> **5.** Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.
> **6.** Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
> **7.** Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada,

se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.
8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

Fermat ilustraba su método hallando el punto E de un segmento AC que hace máxima el área del rectángulo $AE.EC$.

Pongamos $AC = b$.

1. Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.
2. El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba - a^2$.
3. Sea ahora $a + e$ el primer segmento de b, el segundo segmento será $b - a - e$, y el producto de segmentos: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.
4. Se debe "*adigualar*" al precedente: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \sim ba - a^2$.
5. Suprimiendo términos comunes: $be \sim 2ae + e^2$.
6. Dividiendo todos los términos por e: $b \sim 2a + e$.
7. Se suprime la e: $b = 2a$.
8. Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de b.

El recurso de hacer $e = 0$ es equivalente a lo indicado en la instrucción 7 de Fermat. Esto era precisamente lo que se hacía al aplicar el método, a pesar de que antes era necesario dividir por e, lo que resultaba algo contradictorio.

Debemos observar que el método de Fermat da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco distingue máximos de mínimos. Es un método puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos $a = x$, $e = \triangle x$, y pongamos $f(x) = x(b - x)$.

1 – 5 $f(x + \triangle x) - f(x) \sim 0.$

6 $\dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} \sim 0.$

7, 8 $\left(\dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}\right)_{\triangle x = 0} = 0$

Para funciones derivables podemos interpretar todo esto como que el valor de x que hace máximo o mínimo a $f(x)$ es la solución de resolver la ecuación

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = 0$$

Sin embargo, esto significa extrapolar demasiado el contenido estricto del método. Lo que estamos haciendo es interpretar con nuestra mirado de hoy lo que hizo Fermat. En primer lugar, Fermat no pensaba en una cantidad como una función, y por eso habla de "cantidad máxima o mínima", no de una función que alcance un máximo o un mínimo. Fermat no tiene clara la noción de variable independiente. Él está pensando en una ecuación algebraica con dos incógnitas que interpreta como segmentos, es decir, magnitudes lineales dadas. Fermat no decía nada acerca de que e fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el

método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico. Además, la condición 6 no tiene sentido en esta interpretación. Los problemas a los que Fermat aplicó su método son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

6.8.2.2. El método de las tangentes de Fermat

En la misma memoria antes referida, Fermat, determina la subtangente a una parábola haciendo uso de su método para máximos y mínimos. Su razonamiento es como sigue.

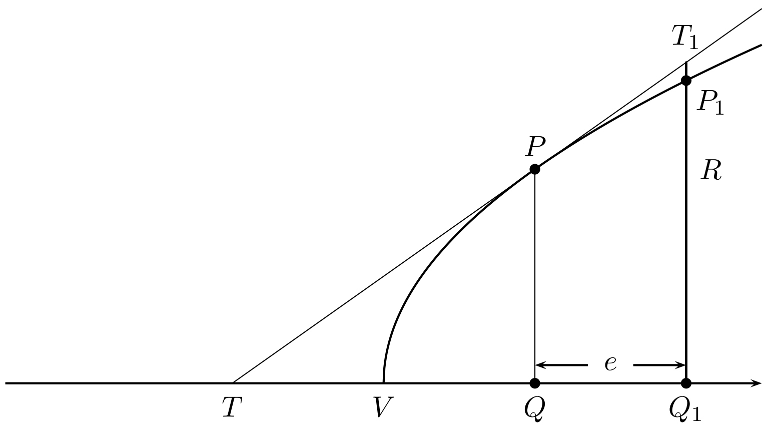


Figura 6.11. Cálculo de la subtangente

En la figura (6.12), el segmento TQ es la subtangente a la parábola en un punto dado P. El vértice de la parábola es V. Teniendo en cuenta que los triángulos TQP y TQ_1P_1 son semejantes, resulta

$$\frac{T_1Q_1}{PQ} = \frac{TQ_1}{TQ} \tag{6.35}$$

Teniendo en cuenta ahora la propiedad de la parábola

$$\frac{VQ_1}{VQ} = \frac{P_1Q_1^2}{PQ^2}$$

y que $P_1Q_1 < T_1Q_1$, deducimos que:

$$\frac{VQ_1}{VQ} < \frac{TQ_1^2}{TQ^2} \tag{6.36}$$

Pongamos ahora $VQ = a$, que es la abscisa de la parábola en P, conocida porque se conoce P. Hagamos también $TQ = x$ que es la subtangente que queremos calcular, y $QQ_1 = e$. La igualdad (6.36) se expresa por:

$$\frac{a+e}{a} < \frac{(x+e)^2}{x^2} \Longleftrightarrow ax^2 + ex^2 < ax^2 + 2aex + ae^2$$

Fermat aplica su método de máximos y mínimos y sustituye esta desigualdad por la *adigualdad*

$$ax^2 + ex^2 \sim ax^2 + 2aex + ae^2$$

Cancelando términos y dividiendo por e obtenemos

$$x^2 \sim 2ax + ae$$

Eliminando ahora el término que queda en e, igualando y simplificando por x, se obtienes que $x = 2a$, resultado ya conocido de la Antigüedad y que expresa que la subtangente es el doble de la abscisa.

Realmente no se entiende bien la razón de por qué Fermat usa su método de máximos y mínimos para calcular tangentes y Descartes hizo una dura crítica de esta forma de proceder. Para responder a estas críticas, Fermat desarrolló, en una memoria de 1638, un procedimiento bastante general para calcular tangentes que, con notación actual, podemos resumir como sigue. Sea $P = (x, y)$ un punto de una curva $f(x, y) = 0$ y sea $P_1 = (x+e, y_1)$ otro punto de la curva próximo a P como en la figura (6.11). Llamemos $b = TQ$, la subtangente en P. Teniendo en cuenta que $PQ = y$, la igualdad (6.35) se escribe como

$$T_1Q_1 = \frac{y(b+e)}{b}$$

Como T_1Q_1 es casi igual a $y_1 = P_1Q_1$, Fermat escribe

$$f\left(x+e, \frac{y(b+e)}{b}\right) \sim 0$$

y a esta *adigualdad* le aplica su método para máximos y mínimos. Es fácil ver que ello conducirá a una expresión para b dada por

$$b = -\frac{y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$$

Que, usando que la tangente viene dada por y/b, podemos escribir, viendo y como función (implícita) de x, en la forma familiar

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

La idea de "*adigualdad*" en Fermat puede interpretarse algo así como "cantidades infinitamente próximas". De alguna forma Fermat está considerando cantidades infinitesimales.

Es tentador expresar en términos actuales las ideas de Fermat para calcular tangentes. Esencialmente, dado un punto $P = (a, f(a))$ en una curva $y = f(x)$, se trata de calcular la pendiente de la curva en P. Sea QQ_1 un incremento de TQ en una cantidad E. Ya que los triángulos TQP y PRT_1 son semejantes, se tiene

$$\frac{PQ}{TQ} = \frac{T_1R}{E}$$

Pero, dice Fermat, T_1R es casi igual a P_1R; por tanto tenemos la *adigualdad*

$$\frac{PQ}{TQ} \sim \frac{P_1Q_1 - QP}{E}$$

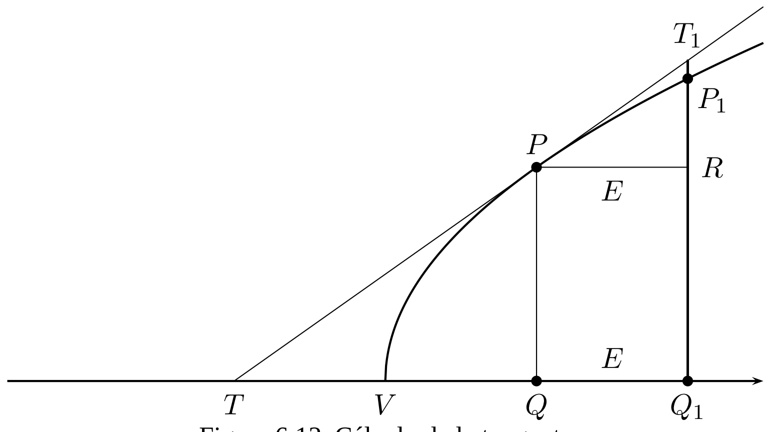


Figura 6.12. Cálculo de la tangente

Poniendo $PQ = f(a)$, la igualdad anterior puede escribirse como:

$$\frac{f(a)}{TQ} \sim \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Ahora, dice Fermat, se cancelan términos iguales en $f(a + E) - f(a)$, se divide por E y finalmente, se ignoran los términos que aún contengan E (lo que equivale a hacer $E = 0$), y el resultado es la pendiente de la tangente en P. Está claro que el procedimiento que indica Fermat es equivalente a calcular

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Naturalmente, a esta interpretación se le pueden hacer las mismas observaciones que hicimos a la interpretación análoga del método para máximos y mínimos.

6.48 Ejemplo. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $a = 2$. Entonces $f(2) = 3$. Pongamos $c = TQ$ la longitud de la subtangente. Tenemos la *adigualdad*:

$$\frac{3}{c} = \frac{f(2+E) - f(2)}{E} = \frac{2E + E^2}{E} = 2 + E$$

Haciendo $E = 0$ se obtiene $3/c = 2$, por la que la subtangente es $c = 3/2$ y el valor de la pendiente de la tangente es $3/c = 2$ que, efectivamente es igual a la derivada de f en $x = 2$. ♦

6.8.2.3. El método de Roberval y de Torricelli para las tangentes

En 1630 Roberval y Torricelli descubrieron independientemente un método para calcular tangentes por medio de consideraciones cinemáticas. Este método se apoya en dos ideas básicas: la primera es la de considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente, y la segunda es la de considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto. Si la razón entre las velocidades de los dos movimientos es conocida, la dirección del movimiento resultante se

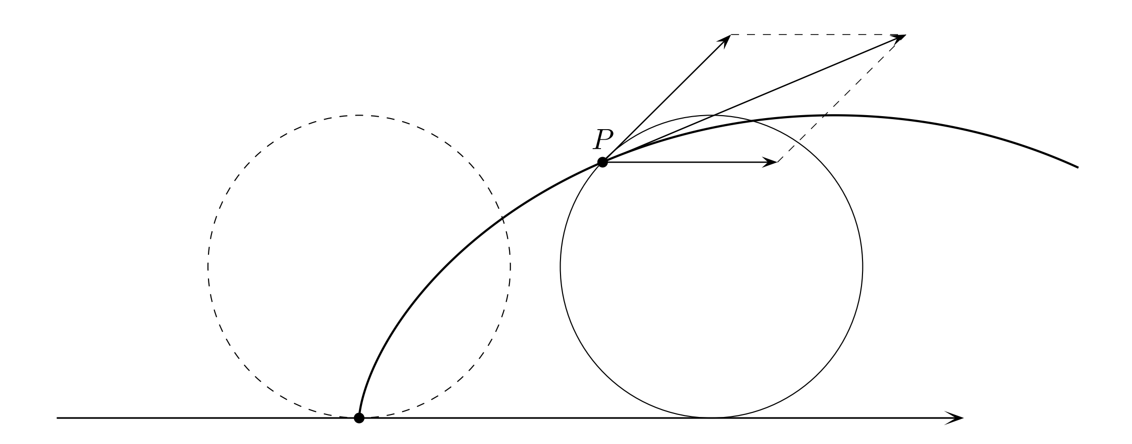


Figura 6.13. Tangente a la cicloide

puede hallar mediante la ley del paralelogramo. Ya en la antigüedad, Arquímedes había usado un método análogo para trazar la tangente a su espiral.

Consideremos una cicloide, esto es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar. El punto que genera la cicloide tiene una velocidad angular igual a la velocidad de avance horizontal, por tanto, su tangente en un punto P se obtiene sumando el vector tangente a la circunferencia generadora en P y un vector horizontal en P, y ambos vectores tienen igual módulo.

Naturalmente, esta idea de la tangente solamente podía aplicarse a curvas mecánicas, si bien tenía la virtud de relacionar geometría y dinámica siguiendo las ideas de Galileo.

6.8.2.4. El triángulo diferencial de Barrow

Isaac Barrow (1630 - 1677) también dio un método para calcular tangentes. Barrow era un admirador de los geómetras antiguos y editó las obras de Euclides, Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras *Lectiones Opticae* (1669) y *Lectiones Geometricae* (1670) en la edición de las cuales colaboró Newton. El tratado *Lectiones Geometricae* se considera una de las principales aportaciones al Cálculo. En él Barrow quiso hacer una puesta al día de todos los últimos descubrimientos, principalmente de problemas de tangentes y cuadraturas. Barrow hace un tratamiento detallado de todos estos problemas incluyendo conceptos como tiempo y movimiento y usando métodos infinitesimales y métodos de indivisibles.

Una de las herramientas a las que saca gran partido es al triángulo característico o triángulo diferencial.

Partiendo del triángulo PRQ, que resulta de un incremento PR, como este triángulo es semejante al PNM, resulta que la pendiente de la tangente PM/MN es igual a QR/PR. Barrow afirma que cuando el arco PP_1 es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento PQ de la tangente en P. El triángulo PRP_1 de la figura de la derecha, en el cual PP_1 es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el *triángulo*

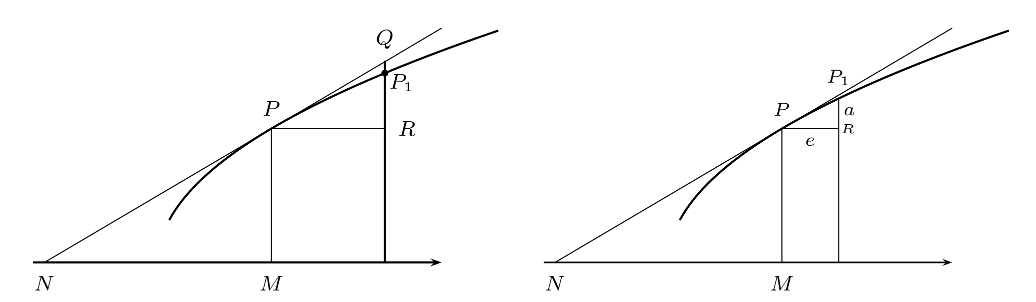


Figura 6.14. Triángulo diferencial

característico o diferencial. Ya había sido usado mucho antes por Pascal y otros en problemas de cuadraturas.

En la Lección X de *Lectiones*, Barrow calcula la tangente a una curva, dada por una ecuación polinómica $f(x, y) = 0$, en un punto de la misma $P = (x, y)$ de la forma siguiente. Pongamos $P_1 = (x + e, y + a)$ un punto de la curva próximo a P y sustituyamos estas coordenadas en la ecuación $f(x, y) = 0$. En palabras de Barrow:

> Rechacemos todos los términos en los que no hay a o e (porque se anulan unos a otros por la naturaleza de la curva); rechacemos todos los términos en los que a o e están por encima de la primera potencia, o están multiplicados ambos (porque, siendo infinitamente pequeños, no tienen valor en comparación con el resto).

Después de estas operaciones se puede calcular el cociente a/e que es la pendiente de la curva en el punto P.

6.49 Ejemplo. Consideremos la curva $x^3 + y^3 = r^3$ y sigamos el método de Barrow para calcular su pendiente en un punto $P = (x, y)$ de la misma. Como el punto $P_1 = (x + e, y + a)$ está en la curva se tiene:

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 = r^3$$

Esto es

$$x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + y^3 + y^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 = r^3$$

Simplificamos usando que $x^3 + y^3 = r^3$ y eliminando las potencias de a y e de grado mayor que uno, y obtenemos

$$3x^2e + 3y^2a = 0$$

de donde resulta la pendiente:

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$$

♦

Observa que este procedimiento equivale a quedarse con la aproximación lineal de la función en el punto P y eso es como reemplazar el triángulo PRP_1 en la figura de la izquierda por el triángulo diferencial.

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente a/e. Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.

6.8.3. Los inventores del Cálculo

El método de Fermat para el cálculo de valores máximos o mínimos y la técnica para el cálculo de tangentes que, esencialmente, consistía en calcular el cociente:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

realizando las operaciones algebraicas necesarias para desarrollar y simplificar el numerador y después dividir por h para, finalmente, hacer $h=0$, fueron aplicados en una gran variedad de situaciones. La relación entre ambos tipos de problemas acabó siendo bien entendida: los valores extremos se obtenían en los puntos donde la pendiente de la tangente se anulaba. Así mismo, de la multitud de casos particulares estudiados, emergieron ciertas regularidades que llevaron a reformular las citadas técnicas de forma más general. De esta forma, aunque en el 1660 no se disponía de un concepto general de derivada ni se conocía la relación crucial entre problemas de tangentes y de áreas, se habían desarrollado bastantes métodos eficaces, aunque no rigurosos, para resolver muchos tipos de problemas de cálculo. Solamente faltaba realizar la gran síntesis de todo el trabajo realizado desde 1630. Eso es lo que hicieron Newton y Leibniz.

La invención del Cálculo es uno de los grandes logros de la humanidad. El Cálculo se ha convertido en la *lingua franca* de todas las ciencias. Ha sido, y sigue siendo, una herramienta fundamental para la comprensión científica de la Naturaleza.

En el último tercio del siglo XVII, Newton (en 1664 - 1666) y Leibniz (en 1675), de forma independiente cada uno, inventaron el Cálculo. Esto quiere decir que:

- Unificaron y resumieron en dos conceptos generales, el de integral y derivada, la gran variedad de técnicas diversas y de problemas que se abordaban con métodos particulares.
- Desarrollaron un simbolismo y unas reglas formales de “cálculo” que podían aplicarse a funciones algebraicas y trascendentes, independientes de cualquier significado geométrico, que hacía fácil, casi automático, el uso de dichos conceptos generales.
- Reconocieron la relación inversa fundamental entre la derivación y la integración.

6.8.4. Newton y el cálculo de fluxiones



Figura 6.15. Newton

Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados *Anni Mirabiles* 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como *bachelor of arts* en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida.

Newton llamó a nuestra derivada una *fluxión* – una razón de cambio o flujo; Leibniz vio la derivada como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó el *cociente diferencial*. Newton hizo sus primeros descubrimientos diez años antes que Leibniz quien, sin embargo, fue el primero en publicar sus resultados. A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas. A finales de ese mismo año, el método de fluxiones, es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el método inverso de fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal. Newton tenía 24 años, había nacido el día de Navidad de 1642.

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow.

Una segunda presentación del Cálculo es la que realiza Newton en el libro *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, escrito hacia 1671 y que se publicó mucho después en 1736. Newton considera cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las que llama *fluentes*. Después se introducen las razones de cambio instantáneas de las fluentes, a las que llama *fluxiones*, que son las derivadas respecto al tiempo de las fluentes. Newton representaba a las primeras por letras $x, y, z, \dots$ y a las segundas por letras punteadas $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$. Los incrementos de las fluentes $x, y, z, \dots$, los representa por medio de las correspondientes fluxiones en la forma $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$, y los llama *momentos*, donde o es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo. Newton desarrolló una serie de algoritmos y redujo muchos problemas como determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arcos, centros de gravedad etc., a dos problemas fundamentales que pueden formularse tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

Problema 1 Determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado. De otro modo: dada la relación entre las cantidades fluentes, determinar la relación de las fluxiones.

Problema 2 Dada la velocidad de movimiento determinar el camino recorrido en un tiempo dado. Matemáticamente: determinar la relación entre las fluentes dada la relación entre las fluxiones.

Hay que notar que Newton no piensa en términos de funciones con el significado actual de ese término, sino que imagina curvas o superficies descritas por las variables, o sea, considera relaciones entre las fluentes del tipo $f(x, y, z, \dots) = 0$, donde f para él es una expresión analítica finita o infinita. Por tanto, el primer problema planteado puede verse como un problema de derivación implícita: supuesta conocida la expresión analítica que satisfacen las fluentes $f(x, y, z, \dots) = 0$, obtener la expresión analítica $F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots) = 0$ que satisfacen las fluxiones. Para este problema, Newton introdujo un algoritmo que sistematizaba los cálculos necesarios. Por ejemplo, sea la curva de ecuación

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituyendo x e y por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ respectivamente, tenemos:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - a(x^2 + 2\dot{x}ox + \dot{x}^2o^2) + \\ + a(xy + \dot{x}oy + \dot{y}ox + \dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}ox^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

Teniendo en cuenta ahora que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dividiendo por o y despreciando los demás términos que contengan a o, resulta

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Esta es la relación que satisfacen las fluxiones. A partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ en cualquier punto (x, y) de la misma, que viene dada por:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Como ya hemos indicado, Newton aplica los resultados sobre fluentes y fluxiones a la resolución de multitud de problemas. Por ejemplo, con respecto a los problemas de máximos y mínimos, escribe:

> Cuando una cantidad es la más grande o la más pequeña, en ese momento su fluir ni crece ni decrece: si creciera, eso probaría que era menor y que lo que sigue sería más grande que lo que ahora es, y recíprocamente pasaría si decreciera. Así, calcúlese su fluxión como se ha explicado en el problema 1 e iguálese a cero.

De nuevo, Newton usa el teorema fundamental del cálculo para realizar cuadraturas. Escribe:

> Problema 9: Determinar el área de cualquier curva propuesta.
>
> La resolución del problema está basada en el establecimiento de la relación entre la cantidad fluente y su fluxión (problema 2).

Newton reduce la integración al proceso inverso del cálculo de fluxiones, esto es, al cálculo de primitivas.

El problema 2, es mucho más difícil que el problema 1, pues se trata de resolver una ecuación diferencial que puede ser muy general. Newton consideró varias posibilidades resolviendo algunos casos particulares. Para ello utilizó técnicas de cálculo de primitivas y de desarrollos en serie.

En *De Quadratura Curvarum*, escrita en 1676 y publicada en 1704, Newton propone fundamentar su cálculo de fluxiones en lo que llama *razones primera y última de incrementos evanescentes*. De esa forma se refiere Newton a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables, y su objetivo es determinarlos en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero (“razón primera”) o se anulan (“razón última”). Un ejemplo ayudará a entender el significado de estas ideas. En la introducción de la citada obra, Newton calcula la fluxión de x^n. Para ello, considera un incremento o de forma que x pasa a $x + o$. Entonces x^n se convierte en

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

Los incrementos de x y x^n, a saber,

$$o \quad \text{y} \quad nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

están entre sí en la misma razón que

$$1 \quad \text{a} \quad nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \cdots$$

Dice Newton "dejemos ahora que los incrementos se anulen y su última proporción será 1 a nx^{n-1}: por tanto, la fluxión de la cantidad x es a la fluxión de la cantidad x^n como $1 : nx^{n-1}$".

Hay distintas interpretaciones de las razones que llevaron a Newton a exponer su cálculo de una u otra forma. La más extendida es que su intención era conseguir una fundamentación rigurosa del mismo. La primera exposición, basada en el concepto de cantidad infinitesimal, entendida como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula, presentaba problemas de coherencia lógica de los que Newton era muy consciente. En sus propias palabras, su cálculo estaba *"concisamente explicado más que exactamente demostrado"*.

En *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1671), el concepto básico es el de cantidad en movimiento o que fluye continuamente en el tiempo. Las magnitudes están generadas por el movimiento continuo y no por agregación de cantidades infinitesimales; la idea básica es la de continuidad tal como se observa en los procesos de la Naturaleza. Quizás Newton pretendía de esta forma evitar el uso de "infinitesimales estáticos o geométricos", pero lo que realmente hizo fue sustituirlos por los infinitesimales de tiempo usados para definir los momentos de las fluentes. Conviene advertir que lo que Newton considera es la abstracción matemática análoga al tiempo, es decir, una magnitud independiente imaginaria abstracta que fluye uniformemente y con la que se relacionan todas las fluentes. Puede verse aquí un intento de Newton por evitar los problemas matemáticos del continuo (infinitesimales, indivisibles) y trasladarlos al mundo físico, a la continuidad de los procesos naturales y al movimiento. Por otra parte, Newton aceptaba como algo dado la idea intuitiva de velocidad instantánea de las fluentes, no le pareció preciso definirla.

En *Quadrature of Curves* (1676), Newton expresa su propósito de abandonar por completo el uso de cantidades infinitesimales. Manifiesta en este sentido que *"errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi"*, esto es, que en matemáticas ni siquiera los errores más pequeños pueden ser admitidos. Y eso es justamente lo que se hacía cuando se despreciaban en los cálculos cantidades infinitesimales. Seguidamente, enuncia su teoría de las *"razones primera y última de cantidades evanescentes"*. Estas ideas señalan claramente al concepto matemático de límite. Lo que expresa, a su manera, Newton es, en términos actuales, el límite de un cociente de funciones que se anulan. Pero estamos en el siglo XVII y se necesitarán casi 200 años para precisar matemáticamente el concepto de límite. Debemos notar que Newton usa dicho concepto a partir de la intuición mecánica del movimiento.

> Por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera, ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes, la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen.

Newton tenía su particular idea de "límite".

> Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tiende a acercarse siempre las razones de

> cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum.

La teoría de las razones últimas puede verse como una teoría cinemática de límites. Con esta teoría, Newton pretendía recuperar el rigor de la geometría de la Antigüedad.

> [. . .] investigar las razones primera y última de cantidades finitas, nacientes o evanescentes, está en armonía con la geometría de los antiguos; y me he esforzado en probar que, en el método de fluxiones, no es necesario introducir en la geometría cantidades infinitamente pequeñas.

Otros autores opinan que estos tres métodos empleados por Newton responden, más que a fundamentar con rigor su cálculo, a distintos propósitos. Así, la teoría de fluxiones proporciona métodos heurísticos de descubrimiento y algoritmos útiles para el calculo; la teoría de "razones primera y última" serviría al propósito de proporcionar demostraciones convincentes y el uso de los infinitésimos serviría para proporcionar atajos a las pruebas más rigurosas. Newton usó simultáneamente estas tres aproximaciones en la resolución de una gran variedad de problemas.

Newton realizó también contribuciones importantes en la teoría de ecuaciones, donde podemos destacar las "identidades de Newton" para la suma de las potencias de las raíces de una ecuación polinómica, y a la teoría de curvas, siendo notable su clasificación de las curvas de tercer grado.

> *Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.* Leibniz

Las tres obras consideradas, escritas entre 1666 y 1676, se publicaron ya en el siglo XVIII, por eso la primera noticia impresa de la teoría de fluxiones apareció, de forma bastante circunstancial, en la obra magna de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cuya primera edición se hizo en 1687. Los *Principia* consta de tres libros escritos en el estilo tradicional a la manera de los *Elementos* de Euclides, y su lenguaje es principalmente el de la geometría sintética.

Los *Principia* están considerados como la obra científica más importante de todos los tiempos y una hazaña intelectual incomparable por sus logros y sus consecuencias. En dicha obra Newton estable los fundamentos de la mecánica y enuncia las tres célebres leyes del movimiento, así como la ley de la gravitación universal. En los dos primeros libros, se estudia el movimiento de los cuerpos en el vacío y en un medio resistente. Newton deduce matemáticamente las tres leyes que Kepler había obtenido empíricamente. En el libro III, titulado *Sobre el Sistema del Mundo*, Newton desarrolla la mecánica celeste. Hace un detallado estudio de los movimientos de la Luna, explicando las causas de las mareas. Calcula la masa del Sol con respecto a la de la Tierra, estudia la precesión de los equinoccios, predice el achatamiento de la Tierra por los polos . . . .

En los *Principia* el mundo aparece como un sistema ordenado y armonioso en el que todo, los cielos, la tierra y el mar, obedecen unas pocas leyes matemáticas fundamentales. A partir de Newton quedará claro que no hay diferencias entre un mundo sublunar y otro supralunar, ni entre la Tierra y el Cielo; las leyes de la Naturaleza no hacen estas distinciones y en todas partes del Universo los procesos obedecen a las mismas leyes naturales inexorables.

El Universo newtoniano es un Cosmos diáfano y sereno ofrecido a la exploración racional del hombre. La gran obra de Newton proporcionará a la Ilustración, en el siglo XVIII, la base científica necesaria para acabar con una concepción conservadora y absolutista del poder político apoyada en dogmáticas concepciones religiosas.

El prestigio y admiración que gozó Newton en vida queda reflejado en las palabras de Alexander Pope:

> *Nature, and Nature's Laws lay hid in Night:*
> *God said,* Let Newton be – *and All was light.*

Y ¿qué pensaba el propio Newton de sí mismo? Escuchemos sus palabras, ya casi al final de su vida.

> No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero a mí me parece haber sido solamente como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte al encontrar de vez en cuando una piedra más pulida o una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad yace ante mí completamente desconocido.

Newton murió en la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster entre los grandes hombres de Inglaterra.

6.8.5. Leibniz y el cálculo de diferencias



Figura 6.16. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nació en Leipzig (Alemania) en el seno de una piadosa familia luterana. A los quince años entró en la Universidad de su ciudad natal donde estudió una gran variedad de materias incluyendo derecho, teología, filosofía y matemáticas. Se doctoró a la edad de 21 años en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, donde le fue ofrecido un puesto de profesor que él rechazó.
A lo largo de su vida, Leibniz realizó múltiples actividades. Como abogado y diplomático trabajó para el Príncipe elector arzobispo de Maguncia y, desde 1676 hasta su muerte, para los Duques de Brunswick-Luneburgo (conocidos como príncipes electores de Hanover desde 1692), lo que le llevó a viajar por gran parte de Europa. Inventó una máquina de calcular, la primera máquina de este tipo capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Como ingeniero trabajó en prensas hidráulicas, molinos de viento y desarrolló proyectos para drenar el agua de las minas de plata de las montañas de Harz en la Baja Sajonia. Como historiador escribió la historia de la casa de Brunswick, realizando muchas investigaciones genealógicas. Trabajó también como bibliotecario en la ciudad de Hanover.

Leibniz fue un pensador profundo. Como filósofo se propuso la creación de un álgebra del pensamiento humano, algo así como un lenguaje simbólico universal para escribir los razonamientos con símbolos y fórmulas, cuyas reglas de combinación permitieran reducir todo discurso racional a cálculos rutinarios. Esto explica el gran interés de Leibniz en desarrollar una notación matemática apropiada para su cálculo; de hecho, su notación, muy superior a la de Newton, es la que usamos actualmente. Leibniz fundó la Academia de Ciencias de Berlín en 1700 y fue su primer presidente; también fue uno de los fundadores de la primera revista científica alemana, el *Acta Eruditorum*.

Aunque Leibniz publicó poco, mantuvo correspondencia con más de 600 eruditos y se han conservado sus manuscritos que están en el archivo que lleva su nombre en la ciudad de Hannover. Las contribuciones de Leibniz al álgebra (determinantes, resolución de ecuaciones), la historia natural, la geología y la lingüística son también importantes.

En 1672, estando en París en misión diplomática, Leibniz se dedicó intensamente al estudio de la matemática superior teniendo como guía al matemático y físico Christian Huygens (1629 - 1695). En los años 1673 y 1676 realizó, también en misión diplomática, dos viajes a Londres donde tuvo acceso al manuscrito de Newton *De Analysi,* circunstancia que se usó para acusar, hoy sabemos que sin motivo alguno, a Leibniz de plagio cuando se produjo la agria controversia sobre la prioridad en el descubrimiento del Cálculo. Los progresos matemáticos realizados por Leibniz en estos cuatro años fueron extraordinarios.

En las matemáticas de Leibniz son importantes los estudios sobre sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas. Dada una sucesión de números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

Podemos formar la sucesión de sus diferencias primeras:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1, b_3 = a_3 - a_2, b_4 = a_4 - a_3, \dots, b_n = a_n - a_{n-1}, \dots$$

Leibniz se había dado cuenta de la relación:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_n$$

lo que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. Esta sencilla idea, cuando se lleva al campo de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz que es el de "diferencial", el cual tuvo para él diferentes significados en distintas épocas.

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Con una tal curva se asocia una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ donde los puntos (x_i, y_i) están todos ellos en la curva y son algo así como los "vértices" de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x es llamada la *diferencial* de x y se representa por $\mathrm{d}x$, significado análogo tiene $\mathrm{d}y$. El diferencial $\mathrm{d}x$ es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con x, de hecho es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por $\mathrm{d}s$. Resulta así el *triángulo característico* de Leibniz que es el mismo que ya había sido considerado por Barrow.

Curiosamente, los términos "abscisa", "ordenada" y "coordenadas", tan propios de la geometría analítica, no fueron usados nunca por Descartes sino que son debidos a Leibniz; y mientras que nosotros hablamos de "diferenciales", Leibniz siempre hablaba de "diferencias".

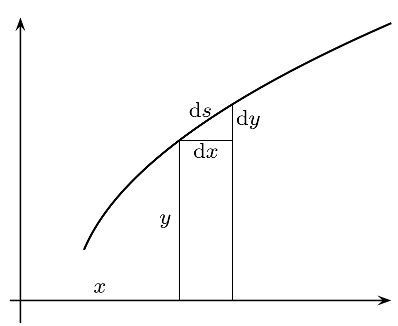


Figura 6.17. Triángulo característico

El triángulo característico tiene lados infinitesimales $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}s$ y se verifica la relación $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$. El lado $\mathrm{d}s$ sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de dicha tangente viene dada por $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó *cociente diferencial*. Leibniz nunca consideró la derivada como un límite.

Leibniz investigó durante algún tiempo hasta encontrar las reglas correctas para diferenciar productos y cocientes. Dichas reglas se expresan fácilmente con su notación diferencial:

$$\mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\,, \qquad \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$

La manera en que Leibniz llegó a estas fórmulas pudo ser como sigue. Consideremos

$$z_n = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

Entonces

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} y_j + y_{n+1}\sum_{j=1}^{n} x_j \tag{6.37}$$

Si interpretamos, al estilo de Leibniz, que x_j e y_j son diferencias de valores consecutivos de las cantidades x e y respectivamente, entonces los valores de dichas cantidades vendrán dados por las sumas respectivas $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ e $y = \sum_{j=1}^{n+1} y_j$, mientras que $\mathrm{d}x = x_{n+1}$ y $\mathrm{d}y = y_{n+1}$ por ser diferencias de valores consecutivos. De la misma forma, $z_{n+1} - z_n$ sería la diferencial de $z = xy$. Por tanto, la igualdad 6.37 es interpretada por Leibniz en la forma $\mathrm{d}(xy) = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$, lo que lleva a la regla para la diferencial de un producto.

A partir de la regla para la diferencial de un producto, Leibniz obtuvo la regla correspondiente para la diferencial de un cociente $z = \frac{x}{y}$. Poniendo $x = zy$ se tiene que $\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}y$, de donde despejando $\mathrm{d}z$, resulta:

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x - \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y}{y} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$

Además, dicha notación tiene una gran potencialidad heurística, como ya hemos visto al estudiar la derivada de una función compuesta.

Consideremos ahora una curva como la de la figura 6.18 con una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad. La suma de las ordenadas es una aproximación de la

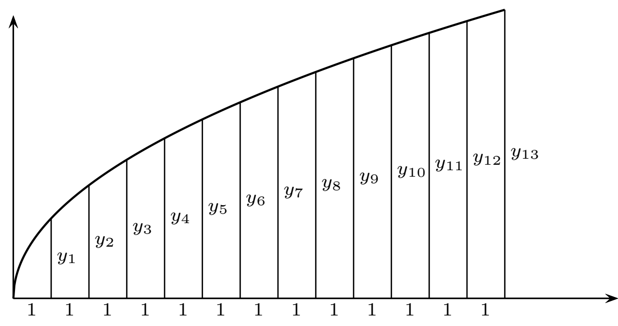


Figura 6.18. Aproximación de una cuadratura

cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto más pequeña se elija la unidad 1, tanto mejor serán estas aproximaciones. Leibniz razonaba que si la unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, estas aproximaciones se harían exactas, esto es, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. Como las operaciones de tomar diferencias y sumar son recíprocas entre sí, dedujo Leibniz que el cálculo de cuadraturas y de tangentes también eran operaciones inversas una de otra.

Las investigaciones de Leibniz sobre la integración y el origen de sus notaciones para la integral y los diferenciales, pueden seguirse con todo detalle en una serie de manuscritos del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675. Nos ocuparemos de ello en el capítulo dedicado a la integración. En 1676 Leibniz ya había obtenido prácticamente todos los resultados descubiertos por Newton un poco antes.

La primera publicación sobre cálculo diferencial fue el artículo de Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractals nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus,* que fue publicado en *Acta Eruditorum* hace ya más de tres siglos, en 1684. En este trabajo, Leibniz definía el diferencial $\mathrm{d}y$ de forma que evitaba el uso de las sospechosas cantidades infinitesimales. Poco después, en 1686, Leibniz publicó un trabajo con sus estudios sobre la integración.

Reconocido hoy día como un genio universal, Leibniz vivió sus últimos años en Hannover en un aislamiento cada vez mayor y murió el 14 de noviembre de 1716. A su entierro solamente asistió su secretario.

6.8.6. Desarrollo del cálculo diferencial

Aunque las publicaciones de Leibniz eran breves y difíciles de leer, su cálculo, más sencillo de entender que el de Newton y provisto de una excelente notación, triunfó pronto en el continente europeo logrando grandes éxitos, mientras que en Inglaterra la fidelidad a la teoría de fluxiones y a la notación newtoniana condujo a un cierto aislamiento, agravado por sentimientos nacionales y la disputa sobre la prioridad, y no consiguió éxitos comparables a los del continente.

Los hermanos Jakob y Johann Bernouilli, matemáticos y profesores de la universidad de Basilea, estudiaron los trabajos de Leibniz con quien iniciaron una productiva correspondencia. A partir de 1690 publicaron una serie de trabajos en el *Acta Eruditorum* y en otras revistas, poniendo de manifiesto que el cálculo de Leibniz era una herramienta poderosa con la que había que contar. Para divulgar dicha herramienta era preciso un buen libro de texto que explicara con detalle los pormenores del nuevo cálculo. Dicho libro apareció bien pronto, en 1696, y su autor fue el matemático y noble francés Guillaume François, marqués de L'Hôpital. El título del libro, del que ya hemos dado noticia en anteriores capítulos, era *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Hoy sabemos que los resultados originales que aparecen en dicho libro son debidos no a L'Hôpital sino a su profesor Johann Bernouilli.

En su libro, L'Hôpital desarrollaba el cálculo diferencial tal como había sido concebido por Leibniz, es decir, usando cantidades infinitesimales para las que se establecían ciertas reglas de cálculo. La definición de diferencial es como sigue: *"La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de manera continua, se llama la diferencial de esta cantidad"*. Para trabajar con infinitésimos se establece la siguiente regla: *"Dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra"*.

Los escritos de los Bernouilli, Leibniz y L'Hôpital popularizaron el cálculo leibniziano y ya en la primera década del siglo XVIII otros matemáticos se interesaron por él. La potencialidad del concepto de derivada se puso de manifiesto en las aplicaciones del cálculo a la física newtoniana.

Para no hacer excesivamente larga esta exposición, voy a resumir muy esquemáticamente los puntos clave en el desarrollo del cálculo diferencial.

- El descubrimiento en 1715 por Brook Taylor de las llamadas series de Taylor, que se convirtieron en una herramienta básica para el desarrollo del cálculo y la resolución de ecuaciones diferenciales.
- El extraordinario trabajo, tanto por su asombrosa amplitud como por sus notables descubrimientos, de Leonhard Euler (1707 - 1783) que, sin duda, es la figura principal de las matemáticas en el siglo XVIII. En sus tres grandes tratados, escritos en latín, *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentiales* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768), Euler dio al cálculo la forma que conservó hasta el primer tercio del siglo XIX. El cálculo, que inicialmente era un cálculo de variables o, más exactamente, de cantidades geométricas variables, y de ecuaciones, se fue transformando, por influencia de Euler, en un cálculo de funciones.
- La propuesta de Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) de fundamentar el cálculo sobre un álgebra formal de series de potencias. Si bien la idea de Lagrange de evitar el uso de límites no era acertada, su propuesta, concretada en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), tuvo el efecto de liberar el concepto de derivada de sus significaciones más tradicionales. De hecho, la terminología "función derivada", así como la notación $f'(x)$ para representar la derivada de una función f, fueron introducidas por Lagrange en dicho texto. A partir de este momento la derivada deja de ser algo de naturaleza imprecisa (fluxión o cociente diferencial) y empieza a ser considerada simplemente como una función.
- Los problemas planteados por las series de Fourier. Dichas series hacen sus primeras apariciones a mitad del siglo XVIII en relación con el problema de la cuerda vibrante, y nacen oficialmente en el trabajo de Joseph Fourier (1768 - 1830) *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Tales series plantean problemas relacionados con las ideas centrales del análisis: el concepto de función, el significado de la integral y los procesos de convergencia.
- El proceso de "algebraización del análisis" que tiene lugar en los dos últimos tercios del siglo XIX y que culmina con la fundamentación del análisis sobre el concepto de límite (Bolzano, Cauchy, Weierstrass) y la teoría de los números reales (Dedekind, Cantor). Lo esencial de este proceso ya ha sido considerado en el capítulo anterior.

Si el tema te interesa, puedes encontrar mucha más información en las referencias citadas al principio.

Capítulo 7

Sucesiones

7.1. Introducción

Las sucesiones aparecen de manera natural en muchos cálculos que responden a un esquema iterativo. Por ejemplo, al dividir 2 entre 3 obtenemos $\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{10}+\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10}$, igualdad que podemos usar ahora para obtener

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^2},$$

y de nuevo

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10^2}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^3}.$$

Y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n\in\mathbb{N}$ la igualdad:

$$\frac{2}{3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^n}.$$

Escribiendo $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k}$ tenemos que $0<\dfrac{2}{3}-x_n=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^n}$. Observa que, aunque los números x_n son *todos ellos distintos* de $2/3$, dada una cota de error arbitrariamente pequeña, $\varepsilon>0$, y tomando $n_0\in\mathbb{N}$ de manera que $\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^{n_0}}<\varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n\geqslant n_0$ se verifica que $|x_n-2/3|<\varepsilon$, lo que se expresa escribiendo $2/3=\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$.

El ejemplo anterior está relacionado con la expresión decimal de $2/3$ que, como todos sabemos, es un decimal periódico con período igual a 6, lo que suele escribirse $2/3 = 0,\widehat{6}$ igualdad en la que, según se dice a veces, el símbolo $0,\widehat{6}$ debe interpretarse como que el 6 *se repite infinitas veces*. ¿Qué quiere decir esto? Lo que está claro es que, por mucho tiempo y paciencia que tengamos, nunca podremos escribir *infinitos* 6 uno detrás de otro... bueno, podríamos escribir algo como

$$\frac{2}{3} = 0,\widehat{6} = 0,6666666...(\text{ infinitos } 6)$$

lo que tampoco sirve de mucho pues seguimos sin saber cómo se interpreta esta igualdad. Pues bien, para dar un significado matemático a lo que se quiere expresar con esa igualdad hay que recurrir al concepto de límite de una sucesión tal como hemos hecho antes.

Veamos otro ejemplo en esta misma línea. Vamos a intentar calcular aproximaciones racionales de $\sqrt{10}$. Si partimos inicialmente de un número $x > \sqrt{10}$, tendremos que $\dfrac{10}{x} < \sqrt{10} < x$. Pongamos $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{10}{x}\right)$. Entonces, en virtud de la desigualdad de las medias, $\sqrt{10} < y$, y como también $y < x$, deducimos que y está más cerca de $\sqrt{10}$ que x. Podemos ahora repetir este proceso sustituyendo x por y obteniendo una nueva aproximación mejor de $\sqrt{10}$. Nótese que si x es racional también lo será y. Esto sugiere que, partiendo de un valor inicial, por ejemplo $x_1 = 4$, calculemos $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{10}{x_1}\right)$, y después $x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{10}{x_2}\right)$, y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$ un número x_n tal que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right)$$

con $x_1 = 4$. Con una calculadora manual obtenemos enseguida los valores $x_2 = 3,25$; $x_3 = 3,1634615$; $x_4 = 3,1622779$ con seis cifras decimales exactas:

$$0 < x_4 - \sqrt{10} = \frac{x_4^2 - 10}{x_4 + \sqrt{10}} < \frac{x_4^2 - 10}{6} < \frac{0,000005}{6} < \frac{1}{10^6}$$

es decir, x_4 coincide con $\sqrt{10}$ hasta la sexta cifra decimal. De hecho, como $x_n > \sqrt{10}$ tenemos que:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right) - \sqrt{10} < \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{10})$$

de donde se sigue que $0 < x_{n+1} - \sqrt{10} < \dfrac{1}{2^n}(x_1 - \sqrt{10}) < \dfrac{1}{2^n}$, por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, y tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n \geqslant n_0$ se verifica que $|x_n - \sqrt{10}\,| < \varepsilon$, lo que simbólicamente se expresa escribiendo $\sqrt{10} = \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$.

En los ejemplos anteriores hemos dado por supuesto que ya tienes cierta familiaridad con los conceptos de “sucesión” y de “límite de una sucesión” de los cuales vamos a ocuparnos a continuación con detalle.

7.2. Sucesiones de números reales

7.1 Definición. Sea A un conjunto no vacío. Una **sucesión** de elementos de A es una *aplicación* del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una *aplicación* del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Por ahora, solamente consideraremos sucesiones de números reales por lo que nos referiremos a ellas simplemente como "sucesiones".

Notación. Dada una sucesión, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele representarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra). La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe interpretarse como la *aplicación* que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n. Cuando no hay posibilidad de confusión, escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Conviene insistir en que $\{x_n\}$ es, por definición, la *aplicación* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ dada por $n \mapsto x_n$.

No hay que confundir la sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación, con su *conjunto imagen*, que es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los números x_n, el cual se representa por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son sucesiones distintas con el mismo conjunto imagen.

El número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión; para $n = 1, 2, 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión. Una forma apropiada de considerar una sucesión es como un vector con infinitas componentes (los términos de la sucesión), de esta forma no te quedará duda de que las sucesiones $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son distintas pues se corresponden con los vectores $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ y $(1, -1, 1, -1, \dots)$.

7.2.1. Sucesiones convergentes

7.2 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge** a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \;: n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \tag{7.1}$$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Teniendo en cuenta que la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ equivale a la doble desigualdad $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ o, lo que es igual, $x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, la definición anterior lo que dice es que $\{x_n\}$ converge a x cuando, dado cualquier intervalo abierto $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en dicho intervalo.

El número natural m_ε, cuya existencia se afirma en la definición anterior, cabe esperar que dependa del número $\varepsilon > 0$, lo que explica la notación empleada. Lo usual es que m_ε tenga que ser tanto más grande cuanto más pequeño sea el número $\varepsilon > 0$. Conviene observar que si p es un número natural tal que $p > m_\varepsilon$, entonces para p, al igual que para m_ε, se verifica que si n es cualquier número natural mayor o igual que p se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Es decir, si $\{x_n\}$

converge a x, entonces para cada $\varepsilon > 0$ dado hay, de hecho, *infinitos* números naturales m_ε para los que se satisface la condición 7.1.

La definición 7.2 es típica del Análisis pues en ella se está definiendo *una igualdad*, a saber, $\lim\{x_n\} = x$, en términos de *desigualdades*: $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre que $n \geqslant m_\varepsilon$. Observa también que, de la definición dada, se deduce enseguida que $\{x_n\} \to x$ es lo mismo que $\{x_n - x\} \to 0$.

Veamos con unos sencillos, pero importantes ejemplos, cómo se usa la definición 7.2 para probar que una sucesión converge.

7.3 Ejemplo. *La sucesión* $\{1/n\}$ *es convergente a cero.*

Para probarlo, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifique que $|1/n - 0| = 1/n < \varepsilon$. Como $1/n \leqslant 1/m$ siempre que $n \geqslant m$, bastará tomar como número m cualquier natural que verifique que $1/m < \varepsilon$, es decir, $m > 1/\varepsilon$. Que, efectivamente, hay números naturales, m, que verifican la condición $m > 1/\varepsilon$ cualquiera sea el número $\varepsilon > 0$ dado, es justamente lo que dice la propiedad arquimediana (5.9) del orden de $\mathbb{R}$. Pues bién, cualquier $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1/\varepsilon$ nos sirve como apropiado m_ε, pero parece razonable tomar el más pequeño de todos ellos que será la parte entera de $1/\varepsilon$ más una unidad, es decir, $m_\varepsilon = E(1/\varepsilon) + 1$. Hemos demostrado así que $\lim\{1/n\} = 0$. ◆

7.4 Ejemplo. *Dado un número real* $x \in]-1, 1[$*, se verifica que la sucesión de las potencias de* x*,* $\{x^n\}$*, converge a cero.*

En efecto, como $|x| < 1$ podemos escribir $|x|$ en la forma $|x| = 1/(1+\rho)$ para conveniente $\rho > 0$ (de hecho $\rho = \frac{1-|x|}{|x|}$ pero eso no interesa ahora). Dado $\varepsilon > 0$, puesto que

$$|x^n - 0| = |x|^n = \frac{1}{(1+\rho)^n} \leqslant \frac{1}{1+n\rho} < \frac{1}{n\rho}$$

bastará tomar un m_ε tal que $\frac{1}{\rho m_\varepsilon} < \varepsilon$, por ejemplo, $m_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\rho\varepsilon}\right) + 1$, para garantizar que $|x^n - 0| < \varepsilon$ siempre que $n \geqslant m_\varepsilon$. ◆

7.5 Ejemplo. *Dado* $x \in]-1, 1[$*, se verifica que la sucesión* $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$*, llamada* ***serie geométrica de razón*** x*, converge a* $\dfrac{1}{1-x}$.

En efecto, como

$$\left| 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$$

poniendo, igual que antes, $|x| = 1/(1+\rho)$ para conveniente $\rho > 0$, y teniendo en cuenta que $0 < 1 - |x| \leqslant 1 - x$, y el ejemplo anterior deducimos que:

$$\left| 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - \frac{1}{1-x} \right| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|}|x|^n = \frac{1}{\rho}|x|^n < \frac{1}{n\rho^2}$$

por lo que, dado $\varepsilon > 0$ para todo $n \geqslant m_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon\rho^2}\right) + 1$ se verifica que

$$\left| 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - \frac{1}{1-x} \right| < \varepsilon.$$

◆

Si demostrar, aplicando la definición 7.2, que una sucesión dada es convergente puede ser complicado, suele serlo todavía más probar, usando dicha definición, que una sucesión no converge.

7.6 Ejemplo. *La sucesión* $\{(-1)^n\}$ *no es convergente.*

En efecto, sea $x\in\mathbb{R}$ y definamos $\varepsilon_x = \text{máx}\{|1-x|/2, |1+x|/2\}$. Claramente $\varepsilon_x > 0$. Puesto que $|(-1)^{2m}-x| = |1-x|$, $|(-1)^{2m+1}-x| = |1+x|$ y alguno de estos números es mayor que ε_x deducimos que, dado $x\in\mathbb{R}$, se verifica que *existe* un número $\varepsilon_x > 0$, tal que *cualquiera sea* $m\in\mathbb{N}$ se verifica que *hay algún* natural n, por ejemplo $n = 2m$ o $n = 2m+1$, mayor que m y para el que no se verifica que $|(-1)^n - x| < \varepsilon_x$. Es decir, hemos probado que $\{(-1)^n\}$ no converge a x. Puesto que en nuestro razonamiento x puede ser cualquier número real concluimos, finalmente, que $\{(-1)^n\}$ no es convergente. ♦

Conviene precisar algunas expresiones de uso frecuente al tratar con sucesiones.

- Cuando se dice que una cierta propiedad se satisface por *todos los términos de una sucesión* $\{x_n\}$ *a partir de uno en adelante*, lo que se quiere decir es que existe $m\in\mathbb{N}$, tal que para todo $n \geqslant m$ el número x_n satisface dicha propiedad.
- Cuando se dice que una cierta propiedad se satisface por *infinitos términos de una sucesión* $\{x_n\}$, lo que se quiere decir es que el conjunto de todos los **números naturales** n, tales que x_n satisface dicha propiedad, es infinito.
- Cuando se dice que una cierta propiedad se satisface por *un número finito de términos de una sucesión* $\{x_n\}$, lo que se quiere decir es que el conjunto de todos los **números naturales** n, tales que x_n satisface dicha propiedad, es finito.

El siguiente resultado, muy sencillo, es también muy útil.

7.7 Proposición. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión y* x *un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) $\{x_n\}$ *converge a* x.

ii) Para todo intervalo abierto I *que contiene a* x *se verifica que todos los términos de la sucesión* $\{x_n\}$ *a partir de uno en adelante están en* I.

Demostración. Que *ii)* implica *i)* es consecuencia inmediata del comentario que sigue a la definición 7.2. Probaremos que *i)* implica *ii)*. Dado un intervalo abierto I tal que $x\in I$, existirá un número $\varepsilon > 0$ (que dependerá del intervalo I) tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq I$. Para dicho $\varepsilon > 0$ existe, por hipótesis, un número natural m tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ y, por tanto, $x_n\in I$. □

Observa que en la definición 7.2 no se exige que el límite sea único, por ello si $\{x_n\}$ converge a x es lícito preguntar si puede haber otro número real y *distinto* de x tal que $\{x_n\}$ también converja a y. La respuesta es que no. En efecto, si $\{x_n\} \to x$, dado $y \neq x$, hay intervalos abiertos I, J tales que $x\in I$, $y\in J$ e $I\cap J = \emptyset$ (por ejemplo las semirrectas $]\leftarrow, \frac{x+y}{2}[$ y $]\frac{x+y}{2}, \rightarrow[$). Sabemos, por la proposición anterior, que todos los términos de $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante están en I, por tanto sólo puede haber un número finito de términos en

J. Concluimos, en virtud de la misma proposición, que $\{x_n\}$ no converge a y. Hemos probado que si $\{x_n\}$ es convergente, el número real $\lim\{x_n\}$ está determinado de manera única.

7.8 Proposición. *Una sucesión convergente tiene un único límite.*

Para estudiar la convergencia de una sucesión dada no suele ser lo más aconsejable usar, de entrada, la definición 7.2. Es preferible intentar primero otros caminos. Generalmente lo que suele hacerse en la práctica consiste en relacionar dicha sucesión con otras más sencillas o que ya han sido previamente estudiadas y deducir de dicha relación si nuestra sucesión es o no es convergente y, cuando lo sea, el valor de su límite. Por ello son de gran utilidad los resultados que siguen en los que se estudia cómo se comportan las sucesiones convergentes respecto de las estructuras algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

7.2.2. Sucesiones convergentes y estructura de orden de $\mathbb{R}$

La siguiente estrategia, útil para probar desigualdades, se usa con frecuencia.

7.9 Estrategia. Sean x e y números reales. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $x \leqslant y$.
b) Para todo número $z > y$ se verifica que $x < z$.
c) Para todo número $\varepsilon > 0$, se verifica que $x < y + \varepsilon$.

Demostración. Es evidente que a) $\longrightarrow$ b) $\longrightarrow$ c). Probemos que c) $\longrightarrow$ a). Supuesto que para todo número $\varepsilon > 0$, se verifica que $x < y + \varepsilon$ debe ocurrir que $x \leqslant y$ pues, en otro caso, si fuera $y < x$, tomando $\varepsilon = x - y$ debería verificarse que $x < y + \varepsilon = y + (x - y) = x$, esto es, $x < x$ lo que es contradictorio. □

7.10 Proposición. *Supongamos que* $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ *y que existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geqslant m$ *se tiene que* $x_n \leqslant y_n$. *Entonces se verifica que* $x \leqslant y$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, probaremos que $x < y + \varepsilon$. Por hipótesis existen números naturales m_1 y m_2 tales que para todo $p \geqslant m_1$ se tiene que $x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2$ y todo $q \geqslant m_2$ se tiene que $y - \varepsilon/2 < y_q < y + \varepsilon/2$. Tomando un número natural $n \geqslant \max\{m, m_1, m_2\}$, se verifican las dos desigualdades anteriores y también la del enunciado, luego:

$$x - \varepsilon/2 < x_n \leqslant y_n < y + \varepsilon/2 \quad \longrightarrow \quad x < y + \varepsilon.$$

Como queríamos probar. □



Respecto al resultado anterior, conviene advertir que *aunque las desigualdades sean estrictas no puede asegurarse que* $\lim\{x_n\} = x$ *sea estrictamente menor que* $\lim\{y_n\} = y$. Por ejemplo, si $x_n = 0$ e $y_n = 1/n$, es claro que $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pero $x = 0 = y$.

7.11 Proposición (Principio de las sucesiones encajadas). *Supongamos que* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *son sucesiones tales que* $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ *y existe un número natural* m_0 *tal que para todo* $n \geqslant m_0$ *se verifica que* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, *entonces la sucesión* $\{y_n\}$ *es convergente y* $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existen m_1, m_2 tales que para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$

$$\alpha - \varepsilon < x_p < \alpha + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \alpha - \varepsilon < z_q < \alpha + \varepsilon \tag{7.2}$$

Sea $m_3 = \text{máx}\{m_0, m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_3$ las desigualdades (7.2) se cumplen para $p = q = n$. Además como $n \geqslant m_0$ se tiene que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m_3$ se verifica que:

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < \alpha + \varepsilon,$$

y, por tanto, $\alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\{y_n\} = \alpha$. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si cambiamos arbitrariamente un número finito de términos de una sucesión, la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

7.12 Corolario. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones cuyos términos son iguales a partir de uno en adelante, es decir, hay un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ es $x_n = y_n$. Entonces $\{x_n\}$ converge si, y sólo si, $\{y_n\}$ converge en cuyo caso las dos sucesiones tienen igual límite.*

El principio de las sucesiones encajadas es de gran utilidad y se usa con mucha frecuencia. Naturalmente, cuando apliquemos dicho principio a un caso concreto, la sucesión $\{y_n\}$ del enunciado será la que queremos estudiar y tendremos que ser capaces de "inventarnos" las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ de manera que se cumplan las condiciones del enunciado. Veamos un ejemplo.

7.13 Ejemplo. *La sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ es convergente a 1.*

Pongamos $y_n = \sqrt[n]{n}$. La elección de $\{x_n\}$ es inmediata: $x_n = 1$. Un poco más difícil es la elección de $\{z_n\}$. Para ello apliquemos la desigualdad de las medias a los números $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = x_n = \sqrt{n}$ para obtener que para todo $n \geqslant 2$ es:

$$\sqrt[n]{n} \leqslant \frac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{7.3}$$

Por tanto tomando $z_n = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, es inmediato que $\lim\{z_n\} = 1$ y concluimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\lim\{\sqrt[n]{n}\} = 1$. ♦

7.2.3. Sucesiones monótonas

7.14 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Acotada si su conjunto imagen está mayorado y minorado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decreciente si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Monótona si es creciente o decreciente.

Estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.

Observa que si una sucesión $\{x_n\}$ es creciente (resp. decreciente) entonces se verifica que $x_m \leqslant x_n$ (resp. $x_m \geqslant x_n$) siempre que $m \leqslant n$.

Conviene advertir que cuando se dice que una sucesión es monótona *no se excluye* la posibilidad de que, de hecho, sea estrictamente monótona. Es por ello que, en general, suele hablarse de sucesiones monótonas y tan sólo cuando tiene algún interés particular se precisa si son estrictamente monótonas.

7.15 Proposición. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$. Todos los términos de $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante estarán en el intervalo $]x-1, x+1[$, es decir, hay un número $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n - x| < 1$, lo que implica que

$$|x_n| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \qquad \text{para todo } n \geqslant m.$$

Tomando $M = \max\{1+|x|, |x_1|, \cdots, |x_m|\}$, tenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

La proposición anterior es útil a veces para probar que una sucesión *no* es convergente: para ello basta probar que no está acotada.

7.16 Ejemplo. *La sucesión $\{H_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

no es convergente.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \geqslant \\ &\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = 1+\frac{n}{2} \end{aligned} \tag{7.4}$$

de donde se deduce que la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n} 1/k\}$ no está mayorada. Esta sucesión recibe el nombre de **serie armónica**. ♦

La proposición recíproca de la anterior no es cierta: la sucesión $\{(-1)^n\}$ es acotada y *no* es convergente. No obstante, hay un caso especial muy importante en que sí es cierta la recíproca.

7.17 Teorema. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión* $\{x_n\}$ *es:*

i) Creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$*, donde* $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$*, donde* $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Probaremos $i)$ quedando la demostración de $ii)$ como ejercicio. La hipótesis de que $\{x_n\}$ es mayorada garantiza, en virtud del principio del supremo, la existencia del número real $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tiene que existir un término x_m de la sucesión tal que $\beta - \varepsilon < x_m$. Puesto que la sucesión es creciente para todo $n \geqslant m$ se verificará que $x_m \leqslant x_n$, y por tanto $\beta - \varepsilon < x_n$. En consecuencia $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$ para todo $n \geqslant m$. Hemos probado así que $\lim\{x_n\} = \beta$. □

7.18 Ejemplo. La sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, es convergente.

En efecto, como

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0$$

se sigue que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, es una sucesión creciente. Además

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \overset{(n}{\cdots} + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

por lo que también está mayorada. Concluimos, por el teorema anterior, que dicha sucesión es convergente. ♦

7.2.3.1. El número e

En el ejercicio 29 hemos probado que la sucesión $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente y que la sucesión $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente. Como $0 < y_n$, se sigue que $\{y_n\}$ es convergente. Puesto que

$$x_n = y_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = y_n \frac{n}{n+1}$$

se sigue que $\{x_n\}$ también es convergente y $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$. El valor común de este límite es un número real que se representa con el símbolo e. Como consecuencia del teorema 7.17, se verifica que:

$$\mathrm{e} = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\} = \inf\left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} : m \in \mathbb{N}\right\}$$

En particular, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}} \tag{7.5}$$

7.2.4. Sucesiones convergentes y estructura algebraica de $\mathbb{R}$

En los resultados anteriores han intervenido de manera esencial las propiedades de la estructura de orden de $\mathbb{R}$. Vamos a estudiar ahora el comportamiento de las sucesiones convergentes respecto de la adición y el producto de números reales. Los resultados que vamos a obtener, conocidos tradicionalmente con el nombre de *álgebra de límites*, son básicos para el estudio de la convergencia de sucesiones.

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

7.19 Proposición. *El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.*

Demostración. Sea $\lim\{x_n\} = 0$, e $\{y_n\}$ acotada. Sea $c > 0$ tal que $|y_n| \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural m tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n| < \varepsilon/c$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m$, se verifica que $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \dfrac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$, lo que prueba que $\lim\{x_n y_n\} = 0$. □

7.20 Proposición (Álgebra de límites). *Supongamos que* $\lim\{x_n\} = x$ *y* $\lim\{y_n\} = y$. *Entonces se verifica que:*

$$\lim\{x_n + y_n\} = x + y, \quad \lim\{x_n y_n\} = xy\,.$$

Si además suponemos que $y \neq 0$, *entonces* $\lim\{x_n/y_n\} = x/y$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad y - \varepsilon/2 < y_q < y + \varepsilon/2 \tag{7.6}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Sea $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_0$ las desigualdades (7.6) se cumplen para $p = q = n$, por lo que, sumándolas término a término, deducimos que $x+y-\varepsilon < x_n+y_n < x+y+\varepsilon$ cualquiera sea $n \geqslant m_0$, lo que prueba que $\lim\{x_n+y_n\} = x+y$.

Teniendo en cuenta que, por las proposiciones 7.15 y 7.19, se verifica que $\lim\{(x_n - x)y_n\} = \lim\{x(y_n - y)\} = 0$, y la igualdad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y)$$

deducimos que $\lim\{x_n y_n - xy\} = 0$, es decir, $\lim\{x_n y_n\} = xy$.

Finalmente, para probar que $\lim\{x_n/y_n\} = x/y$, probaremos que la sucesión

$$\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right\}$$

converge a cero, para lo cual, teniendo en cuenta que $\lim\{x_n y - y_n x\} = xy - yx = 0$, bastará probar que la sucesión $\{1/y_n\}$ está acotada. Puesto que $\lim\{y_n\} = y$, se deduce de la desigualdad

$$||y_n| - |y|| \leqslant |y_n - y|$$

que $\lim\{|y_n|\} = |y|$. Existirá, por tanto, un número $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_0$ es $|y_n| > |y|/2$. Pongamos

$$K = \max\left\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \dots, \frac{1}{|y_{m_0}|}, \frac{2}{|y|}\right\}.$$

Se tiene entonces que $\dfrac{1}{|y_n|} \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado así que la sucesión $\{1/y_n\}$ está acotada, lo que concluye la demostración del teorema. □

7.21 Observación. Hay que leer con atención las hipótesis del teorema anterior para no hacer un uso incorrecto del mismo. En particular, no hay que olvidar que *la suma de dos sucesiones no convergentes puede ser una sucesión convergente*. Por ejemplo, las sucesiones $x_n = n$, $y_n = -n$, no son convergentes pues no están acotadas, pero su suma $x_n + y_n = 0$ es, evidentemente, convergente. Por tanto, *antes de escribir* $\lim\{x_n + y_n\} = \lim\{x_n\} + \lim\{y_n\}$, hay que asegurarse de que estos últimos límites existen, es decir, que las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ convergen, pues pudiera ocurrir que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ fuera convergente y no lo fueran las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Análogamente, basta considerar las sucesiones $x_n = y_n = (-1)^n$, para convencerse de que *el producto de dos sucesiones no convergentes puede ser una sucesión convergente* y, en consecuencia, antes de descomponer una sucesión como producto de otras dos, debes asegurarte de que estas sucesiones convergen.

7.2.5. Sucesiones parciales. Teorema de Bolzano–Weierstrass

7.22 Definición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** o una **subsucesión** de $\{x_n\}$. Observa que $\{x_{\sigma(n)}\}$ no es otra cosa que la composición de las aplicaciones $\{x_n\}$ y σ, esto es, $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\} \circ \sigma$.

Se dice que un número real x es un **valor de adherencia** de la sucesión $\{x_n\}$ si hay alguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a x.

7.23 Ejemplo. Sea, como de costumbre, $E(x)$ el mayor entero menor o igual que x. La sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = n/5 - E(n/5)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene a $0, 1/5, 2/5, 3/5$ y $4/5$, como valores de adherencia.

En efecto, basta considerar que para cada $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, la sucesión parcial $\{x_{5n-j}\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada por $x_{5n} = 0$, para $j = 0$, y $x_{5n-j} = 1 - j/5$ para $j = 1, 2, 3, 4$. ♦

Es fácil probar por inducción que si σ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ entonces se verifica que $\sigma(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\lim\{x_n\} = x$, y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que $|x_n - x| < \varepsilon$. Puesto que $\sigma(n) \geqslant n$, deducimos que para todo $n \geqslant m_0$ se tiene $\sigma(n) \geqslant m_0$, y por tanto, $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$. Hemos probado así el siguiente resultado.

7.24 Proposición. *Si* $\lim\{x_n\} = x$, *toda sucesión parcial de* $\{x_n\}$ *también converge a* x. *En particular, una sucesión convergente tiene como único valor de adherencia su límite.*

7.25 Estrategia. Como consecuencia de la proposición anterior, para probar que una sucesión *no* converge, es suficiente probar que tiene alguna sucesión parcial no convergente o que tiene dos sucesiones parciales que convergen a límites diferentes.

Por ejemplo, para la sucesión $x_n = (-1)^n$ se tiene que $x_{2n} = 1$ y $x_{2n-1} = -1$. Por tanto dicha sucesión no es convergente.

Observa que hay sucesiones, la de los números naturales por ejemplo, que no tienen *ningún* valor de adherencia. También puede ocurrir que una sucesión *tenga un único valor de adherencia y no sea convergente*. Por ejemplo, la sucesión dada por $x_n = (1 + (-1)^n)n + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, no es convergente y tiene a 0 como único valor de adherencia. Vamos a ver a continuación que estos comportamientos no pueden darse con sucesiones acotadas.

7.26 Lema. *Toda sucesión tiene una sucesión parcial monótona.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant x_p \quad \text{para todo } p > n\}$$

Podemos visualizar el conjunto A como sigue. Consideremos en el plano los segmentos de extremos (n, x_n) y $(n+1, x_{n+1})$, $n = 1, 2, 3, \dots$

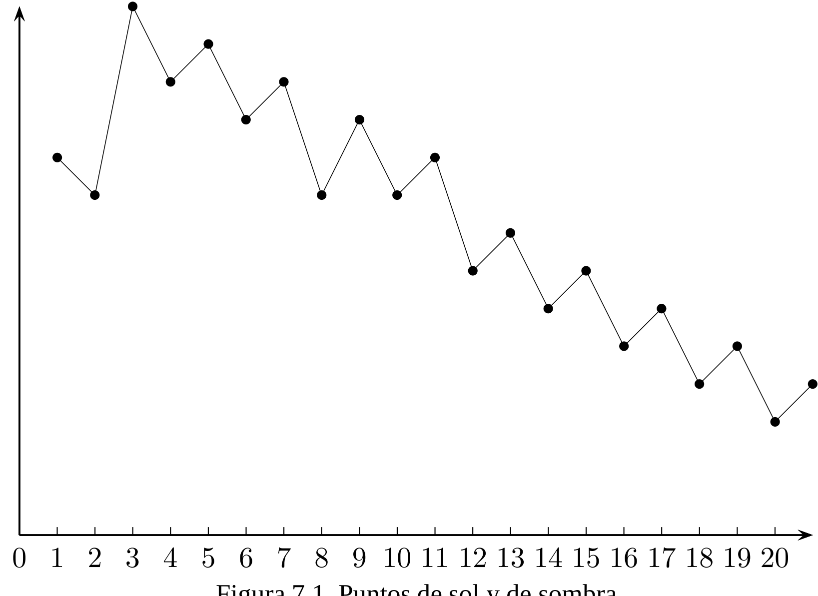


Figura 7.1. Puntos de sol y de sombra

Resulta así una línea poligonal infinita y podemos imaginar que dicha línea es el perfil de una cordillera cuyas cumbres y valles son los puntos (n, x_n). Imaginemos ahora que los rayos de luz del Sol, paralelos al eje de abscisas, iluminan dicha cordillera por el lado derecho (el Sol estaría, pues, situado en el infinito del eje de abscisas positivo). Pues bien, un número natural n pertenece al conjunto A si el punto (n, x_n) está iluminado y no pertenece a A si dicho punto está en sombra.

Supongamos que A es infinito. Entonces podemos definir una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente y tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\sigma(1) = \text{mín}(A) \\ &\sigma(n+1) = \text{mín}\{p \in A : \sigma(n) < p\} \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

es decir la aplicación σ va eligiendo los elementos de A de menor a mayor empezando por el primero. Resulta ahora evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente, porque todos los puntos $(\sigma(n), x_{\sigma(n)})$ están iluminados y, por tanto, ninguno de ellos puede hacerle sombra a uno anterior.

Si A es finito podemos suponer que $A = \varnothing$. En tal caso, para todo $n \in \mathbb{N}$ hay algún $p > n$ tal que $x_n < x_p$ (pues todo punto (n, x_n) está en sombra). Podemos definir ahora una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\sigma(1) = 1 \\ &\sigma(n+1) = \text{mín}\{p \in \mathbb{N} : \sigma(n) < p \ \text{ y } \ x_{\sigma(n)} < x_p\} \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Es evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es creciente, pues cada punto $(\sigma(n), x_{\sigma(n)})$ deja en la sombra al anterior. □

El siguiente resultado es uno de los más importantes en la teoría de sucesiones de números reales.

7.27 Teorema (Teorema de Bolzano - Weierstrass). *Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. En virtud el lema anterior, hay una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que es monótona, dicha sucesión parcial está acotada por estarlo $\{x_n\}$ y, por tanto, es convergente. □

Si volvemos a leer la definición de sucesión convergente, parece que para estudiar la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ debemos ser capaces de "adivinar", de alguna manera, su posible límite. De hecho, una idea bastante extendida consiste en pensar que es lo mismo probar la convergencia de una sucesión que calcular su límite. Esto no es del todo correcto; son relativamente pocas las sucesiones convergentes cuyo límite puede efectivamente calcularse. Cuando se estudia la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$, la mayoría de las veces, lo que conocemos es, justamente, la sucesión y, naturalmente, se desconoce su posible límite el cual pudiera, incluso, no existir. Por ello interesa tener *criterios de convergencia intrínsecos a la sucesión*, es decir, que no hagan intervenir a un objeto en principio *extraño* a ella como es su posible límite. Conocemos ya un criterio de convergencia intrínseco para sucesiones *monótonas*. Usando dicho criterio hemos probado en el ejemplo 7.18 la convergencia de una sucesión *sin necesidad de conocer su límite*.

7.2.6. Condición de Cauchy. Teorema de completitud de $\mathbb{R}$

A continuación vamos a establecer un criterio intrínseco de convergencia para sucesiones que es más general pues puede aplicarse a cualquier sucesión. Este criterio fué formulado

por Bolzano en 1817 y también, independientemente, por Cauchy en 1821, y establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión. Dicha condición se conoce con el nombre de *condición de Cauchy.*

7.28 Definición. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la **condición de Cauchy**, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

7.29 Teorema (**Teorema de completitud de $\mathbb{R}$**). *Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy. Probemos primero que $\{x_n\}$ está acotada. La condición de Cauchy implica que hay $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_{m_0}| < 1$ para todo $p \geqslant m_0$, y como $|x_p| \leqslant |x_p - x_{m_0}| + |x_{m_0}|$, deducimos que $|x_p| < 1 + |x_{m_0}|$ para $p \geqslant m_0$. En consecuencia si definimos $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{m_0}|, 1+|x_{m_0}|\}$, obtenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que hay un número real x y una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a x. Probaremos que $\{x_n\}$ también converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_q| < \varepsilon/2$ siempre que $p, q \geqslant n_o$. También existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon/2$ siempre que $n \geqslant n_1$. Sea $m = \max\{n_o, n_1\}$. Para todo $n \geqslant m$ se tiene que $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$ por lo que

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$.

Recíprocamente, si $\{x_n\}$ es convergente y $\lim\{x_n\} = x$, dado $\varepsilon > 0$, hay un número $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural $n \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Deducimos que si p, q son números naturales mayores o iguales que m_ε entonces

$$|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy. $\square$

7.30 Observación. La condición de Cauchy para sucesiones dada en la definición 7.28, puede también expresarse de una manera equivalente, aunque formalmente distinta, como sigue.

Una sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todo $p \geqslant m_\varepsilon$ y *para todo número natural* h, se verifica que $|x_{p+h} - x_p| < \varepsilon$.

Equivalentemente, una sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy si, y sólo si, la sucesión $\{\rho_n\}$ dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$\rho_n = \sup\{|x_{n+h} - x_n| : h \in \mathbb{N}\}$$

converge a cero.

Puesto que, evidentemente, para cada $h \in \mathbb{N}$ se tiene que $|x_{n+h} - x_n| \leqslant \rho_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy entonces se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_{n+h} - x_n\} = 0$


para cada $h \in \mathbb{N}$. Es importante observar que una sucesión $\{x_n\}$ puede verificar esta última condición y no ser convergente, es decir, no satisfacer la condición de Cauchy. Un ejemplo de ello lo proporciona la serie armónica, esto es, la sucesión $\{H_n\}$ dada por $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Hemos visto en el ejemplo 7.16 que dicha sucesión no es convergente y, por tanto, no verifica la condición de Cauchy. Sin embargo, *fijado un número natural* $h \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$0 < H_{n+h} - H_n = \frac{1}{n+h} + \frac{1}{n+h-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \frac{h}{n}$$

y, como $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\frac{h}{n}\right\} = 0$, deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \{H_{n+h} - H_n\} = 0$.

Observa que si hacemos $h = 2^{2(m+n)} - n$ entonces, como consecuencia de la desigualdad 7.4, $H_{2^p} > 1 + p/2$, tenemos:

$$H_{n+h} - H_n = H_{2^{2(m+n)}} - H_n > H_{2^{2(m+n)}} - n > 1 + m + n - n = m + 1$$

lo que prueba que el conjunto $\{H_{n+h} - H_n : h \in \mathbb{N}\}$ ni siquiera está mayorado para ningún $n \in \mathbb{N}$.

7.2.7. Límites superior e inferior de una sucesión

Acabaremos esta parte del capítulo, esencialmente teórica, introduciendo dos conceptos, que también tienen un interés principalmente teórico, que usaremos más adelante para formular algunos criterios de convergencia para series.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$$

El conjunto A_n está formado por todos los términos de la sucesión a partir del que ocupa el lugar n-ésimo. Como $A_n \subseteq A_1$ y, por hipótesis, A_1 es un conjunto acotado, A_n también está acotado. Pongamos

$$\alpha_n = \inf(A_n), \qquad \beta_n = \sup(A_n).$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, $\beta_{n+1} \leqslant \beta_n$. Por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\{\beta_n\}$ es decreciente. Además $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por el teorema 7.17, concluimos que ambas sucesiones son convergentes. El número $\alpha = \lim\{\alpha_n\}$ se llama **límite inferior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\liminf\{x_n\}$ y también $\underline{\lim}\{x_n\}$. El número $\beta = \lim\{\beta_n\}$ se llama **límite superior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\limsup\{x_n\}$ y también por $\overline{\lim}\{x_n\}$. Nótese que $\alpha \leqslant \beta$ y además α y β vienen dados por $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\beta = \inf\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$.

7.31 Teorema. *Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ acotada, $\alpha = \liminf\{x_n\}$, $\beta = \limsup\{x_n\}$. Supongamos que $\{x_n\}$ es convergente con $\lim\{x_n\} = x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \geqslant m_0$ es $x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2$. Por tanto $x - \varepsilon/2$ es un minorante de $A_{m_0} = \{x_p : p \geqslant m_0\}$ y, en

consecuencia, $x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha_{m_0}$. También, por análogas razones, $\beta_{m_0} \leqslant x + \varepsilon/2$. Como además $\alpha_{m_0} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_{m_0}$, resulta que:

$$x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha_{m_0} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_{m_0} \leqslant x + \varepsilon/2. \tag{7.7}$$

De donde se sigue que $\beta - \alpha \leqslant \varepsilon$. Hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ es $\beta \leqslant \alpha + \varepsilon$ lo que, como ya sabemos, implica que $\beta \leqslant \alpha$ y, en consecuencia $\alpha = \beta$. Deducimos ahora de las desigualdades (7.7) que, para todo $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha = \beta \leqslant x + \varepsilon/2$ y, por tanto, $x \leqslant \alpha = \beta \leqslant x$, o sea, $x = \alpha = \beta$.

Recíprocamente, supongamos que $\alpha = \beta$. Dado $\varepsilon > 0$, todos los términos de cada una de las sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ estarán en el intervalo $]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[=]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$ a partir de uno de adelante. Luego $\alpha - \varepsilon < \alpha_{m_0} \leqslant \beta_{m_0} < \alpha + \varepsilon$ para algún $m_0 \in \mathbb{N}$. Puesto que para $n \geqslant m_0$ se verifica que $\alpha_{m_0} \leqslant x_n \leqslant \beta_{m_0}$, concluimos que $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$ para todo $n \geqslant m_0$. Hemos probado así que $\{x_n\}$ es convergente y $\lim\{x_n\} = \alpha = \beta$. □

7.2.8. Ejercicios propuestos

308. Dado $\varepsilon > 0$, calcula $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifique $|x_n - x| < \varepsilon$ donde x_n, x vienen dados en cada caso por:

a) $x_n = \dfrac{2n+3}{3n-50}$, $x = \dfrac{2}{3}$; *b)* $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, $x = 0$

c) $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$, $x = 1$; *d)* $x_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $x = 0$

e) $x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$, $x = 0$; *f)* $x_n = n^2 a^n$ $(|a| < 1), x = 0$

Sugerencia. Como consecuencia del binomio de Newton, para $x - 1 \geqslant 0$ se verifica que $x^n = (1+(x-1))^n \geqslant 1+n(x-1)$. Esta desigualdad, convenientemente usada, permite resolver con facilidad los casos b), c), d) y e).

309. Sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales. Prueba que un número real, β, es el supremo de A si, y sólo si, β es un mayorante de A y hay alguna sucesión de puntos de A que converge a β.

310. Supuesto que $\lim\{x_n\} = x$, prueba que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

311. a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que para todo $n \geqslant p$ es $|x_{n+1}| \leqslant \rho|x_n|$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números no nulos verificando que $\lim \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lambda$, donde $0 \leqslant \lambda < 1$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

Aplicación. Dados $a \in]-1,1[$, $k \in \mathbb{N}$, prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \{n^k a^n\} = 0$.

312. Estudia la convergencia de las sucesiones siguientes.

$$a)\ x_n = \frac{2n+(-1)^n(n+2)}{7n+3} \qquad b)\ x_n = n\left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n$$

$$c)\ x_n = n^2\left(\frac{1+n}{3n}\right)^n \qquad d)\ x_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}\ \ (a>0, b>0)$$

$$e)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \qquad f)\ x_n = \frac{x^n}{n!}\ \ (x\in\mathbb{R})$$

$$g)\ x_n = \sqrt{n^2+3n+2}\ -\ n \qquad h)\ x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)$$

Sugerencia. En algunos casos puede usarse el principio de las sucesiones encajadas o el ejercicio anterior.

313. Sea $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$. Prueba que $x_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Deduce que $\lim\{x_n\} = 0$.

Sugerencia. Relaciona $\frac{k}{k+1}$ con $\frac{k+1}{k+2}$.

314. Supongamos que $\{a_n\}\to 0$. Justifica, usando derivadas, que $\lim \dfrac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \dfrac{1}{2}$.

315. Sean $a_0, a_1, \dots, a_p$ números reales cuya suma es igual a cero. Justifica que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\right\} = 0$$

Sugerencia. Saca factor común $\sqrt{n}$, resta $a_0+a_1+\cdots+a_p$ y usa el ejercicio anterior.

316. Estudia la convergencia de la sucesión:

$$x_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

317. Prueba que la sucesión dada por $x_1 = 0$ y para $n \geqslant 2$:

$$x_n = \log(\log n) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}$$

es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$.

318. Dados $0 < a_1 < b_1$, definamos para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Justifica que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama *media aritmético-geométrica* de a_1 y b_1).

319. Dados $0 < a_1 < b_1$, definamos para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n+b_n}.$$

Justifica que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama *media aritmético-armónica* de a_1 y b_1).

320. Dados $a, b\in\mathbb{R}$ con $0 < a < b$, definamos:

$$a_1 = a,\, a_2 = b, \quad a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}a_n}{a_{n+1} + a_n}.$$

a) Prueba que las sucesiones $\{a_{2n}\}$ y $\{a_{2n-1}\}$ son monótonas.

b) Prueba que $|a_{2n} - a_{2n-1}| \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$.

c) Justifica que $\{a_n\}$ converge y calcula su límite.

321. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones.

a) $x_1 = 1,\, x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$.

b) $x_1 = 3,\, x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$.

c) $x_1 = 1,\, x_{n+1} = \dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}$.

d) Dado $a \in]-2,-1[$, definimos $x_1 = a,\, x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{x_n + 4}$.

e) Dado $a > 0$, definimos $x_1 = \sqrt{a},\, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

f) $x_1 = 0,\, x_{n+1} = \dfrac{1}{3 - x_n^2}$.

g) Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, definimos $x_1 = a,\, x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$.

h) Dado $a\in\mathbb{R}$, definimos $x_1 = a,\, x_{n+1} = \dfrac{1}{4} + (x_n)^2$.

i) Dado $a \in]-2, 1[$, definimos $x_1 = a,\, 3x_{n+1} = 2 + (x_n)^3$.

Sugerencia. Estudia en cada caso monotonía y acotación. La convergencia puede depender del valor inicial de a.

322. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n), \qquad y_n = x_n - \frac{1}{n}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente e $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Deduce que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Dicho número se llama la *constante de Euler*, se representa por la letra griega γ.

a) Deduce que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log(n)} = 1$.

b) Justifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right\} = \log 2$.

c) Justifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \log 2$.

323. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{s(n)}\}$ que convergen a un mismo número x y tales que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a x.

324. Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que las sucesiones parciales $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{3n}\}$, son convergentes. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

325. ¿Puede existir alguna sucesión acotada, $\{x_n\}$, verificando que $|x_n - x_m| \geqslant 10^{-75}$ siempre que $n \neq m$? Razona tu respuesta.

326. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $M > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

Sugerencia. Teniendo en cuenta que para todos $n, h \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\rho^{n+h-1} + \rho^{n+h-2} + \cdots + \rho^n < \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

deduce que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

327. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho |x_n - x_{n-1}|$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

Sugerencia. Justifica que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ donde M es una constante independiente de n.

328. Sea I un intervalo cerrado (puede ser $I = \mathbb{R}$); $f : I \to \mathbb{R}$ una función, y supongamos que hay un número $\alpha \in]0,1[$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|, \qquad \text{para todos } x, y \text{ en } I. \tag{7.8}$$

Se dice entonces que f es una **función contractiva** en I. Supongamos además que $f(x) \in I$ para todo $x \in I$. Dado un punto $a \in I$, definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in I$ que es el único punto fijo de f, es decir, $f(x) = x$.

b) Justifica que si la función f es derivable en I y se verifica que hay un número $\alpha \in]0,1[$ tal que $|f'(x)| \leqslant \alpha$ para todo $x \in I$, entonces f es contractiva en I.

329. Estudia la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$a)\ x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}\,; \qquad b)\ x_1 = \sqrt{2},\ \ x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}.$$

330. Supongamos que la ecuación $x^2 = bx + a$ tiene dos raíces reales distintas α y β. Dados dos números reales λ y μ, definamos $\{x_n\}$ por:

$$x_1 = \lambda + \mu,\ \ x_2 = \lambda\alpha + \mu\beta,\ \ x_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n$$

Prueba que $x_n = \lambda\alpha^{n-1} + \mu\beta^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicaciones. i) La sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = x_2 = 1,\ \ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

se llama **sucesión de Fibonacci**. Calcula explícitamente x_n.

ii) Estudia la convergencia de la sucesión definida para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ \ x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n).$$

iii) Dados $a, b\in\mathbb{R}^+$, estudia la convergencia de la sucesión definida por:

$$a_1 = a,\ a_2 = b, \quad x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}.$$

331. Prueba que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica la desigualdad

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

Sugerencia. Recuerda la definición del número e.

332. a) Prueba que la sucesión $\{u_n\}$ definida para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

es convergente.

b) Justifica que para todo $x \geqslant 0$ se verifica que:

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \log(1+x) \leqslant x.$$

c) Utiliza dicha desigualdad para calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\{u_n\}$.

333. a) Justifica, para $x > -1$, la desigualdad $\dfrac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \dfrac{x}{2}$.

b) Usa dicha desigualdad para calcular el límite de la sucesión $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right)$.

334. Dado $0 < \lambda < 1$, estudia la convergencia de la sucesión $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda^k)$.

Sugerencia. La desigualdad de las medias puede ser útil.

335. Sea $x_n = 1+(-1)^n+(-1)^n\dfrac{1}{n}$ y $A = \{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. Calcula $\lim\sup\{x_n\}$, $\lim\inf\{x_n\}$, $\sup(A)$ e $\inf(A)$.

7.2.9. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 155 Dado $\varepsilon > 0$, calcula $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifique $|x_n - x| < \varepsilon$ donde x_n, x vienen dados en cada caso por:

$a)$ $x_n = \dfrac{2n+3}{3n-50}$, $x = \dfrac{2}{3}$; $\qquad b)$ $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, $x = 0$

$c)$ $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$, $x = 1$; $\qquad d)$ $x_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $x = 0$

$e)$ $x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$, $x = 0$; $\qquad f)$ $x_n = n^2a^n$ $(|a| < 1), x = 0$

Sugerencia. Como consecuencia del binomio de Newton, para $x-1\geqslant 0$ se verifica que $x^n=(1+(x-1))^n\geqslant 1+n(x-1)$. Esta desigualdad, convenientemente usada, permite resolver con facilidad los casos b), c), d) y e).

Solución. Como regla general, en este tipo de ejercicios hay que "trabajar hacia atrás", esto es, se calcula y simplifica $|x_n-x|$ y se convierte la desigualdad $|x_n-x|<\varepsilon$ en otra equivalente a ella de la forma $n>\varphi(\varepsilon)$ donde $\varphi(\varepsilon)$ es un número que depende de ε. Basta entonces tomar m_ε como la parte entera de $\varphi(\varepsilon)$ más 1, $m_\varepsilon=E\big(\varphi(\varepsilon)\big)+1$, con lo cual para todo $n\geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $n<\varphi(\varepsilon)$ y, por tanto, $|x_n-x|<\varepsilon$.

Este procedimiento admite muchos atajos. Hay que tener en cuenta que no se pide calcular el m_ε "óptimo", es decir, el menor valor posible de m_ε para el cual se verifica que $n\geqslant m_\varepsilon\longrightarrow |x_n-x|<\varepsilon$, sino que se pide calcular cualquier valor de m_ε para el cual sea cierta dicha implicación. Para ello es suficiente con obtener, a partir de la desigualdad $|x_n-x|<\varepsilon$, otra desigualdad del tipo $n>\varphi(\varepsilon)$ de forma que se verifique la implicación $n>\varphi(\varepsilon)\longrightarrow |x_n-x|<\varepsilon$.

En este procedimiento hay que quitar valores absolutos. Esto siempre puede hacerse porque la desigualdad $|x_n-x|<\varepsilon$ equivale a las dos desigualdades $-\varepsilon<x-n-x<\varepsilon$. Con frecuencia, el número x_n-x es siempre positivo o siempre negativo para todo $n\geqslant n_0$, lo que permite quitar directamente el valor absoluto y sustituirlo por la correspondiente desigualdad.

Por supuesto, en estos ejercicios hay que trabajar con un valor genérico de $\varepsilon>0$, es decir, no está permitido considerar valores particulares de ε porque se trata de probar que una cierta desigualdad es válida para todo $\varepsilon>0$.

La verdad es que se tarda más en escribir lo anterior que en hacer el ejercicio porque las sucesiones que se dan son muy sencillas y la sugerencia muy útil.

a) Tenemos que

$$|x_n-x|=\left|\frac{2n+3}{3n-50}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{109}{9n-150}\right|.$$

El denominador es positivo para todo $n>17$. Pongamos $n=17+k$ donde $k\in\mathbb{N}$. Entonces

$$|x_n-x|=\frac{109}{9n-150}=\frac{109}{3+9k}<\frac{109}{9k}<\frac{13}{k}.$$

Deducimos que para que se tenga $|x_n-x|<\varepsilon$ es suficiente que tomar $n=17+k$ donde k se elige de forma que $\frac{13}{k}<\varepsilon$, es decir, $k>\frac{13}{\varepsilon}$. Por tanto, poniendo $m_\varepsilon=18+E(\frac{13}{\varepsilon})$ podemos asegurar que para todo $n\geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_n-x|<\varepsilon$.

Observa que las acotaciones $\frac{109}{3+9k}<\frac{109}{9k}<\frac{13}{k}$ no son imprescindibles; de hecho, podemos despejar k de la desigualdad $\frac{109}{3+9k}<\varepsilon$, pero las acotaciones hechas facilitan este paso (aunque se obtiene un valor de k mayor).

b) Tenemos que:

$$0<x_n-0=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

Pongamos $z_n = \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1$. Tenemos que $z_n \geqslant 0$ y, usando la sugerencia dada:

$$(1+z_n)^3 = 1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + 3z_n \longrightarrow z_n \leqslant \frac{1}{3n}$$

Deducimos que:

$$x_n = \sqrt[3]{n}\, z_n \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Por tanto:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon \longrightarrow x_n < \varepsilon \longrightarrow |x_n - 0| = x_n < \varepsilon$$

La desigualdad $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon$ se verifica para todo $n > \frac{1}{27\varepsilon^3}$. Por tanto, es suficiente tomar $m_\varepsilon = 1 + E\big(\frac{1}{27\varepsilon^3}\big)$.

Observa que la acotación $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ no es imprescindible; de hecho, podemos despejar n en la desigualdad $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < \varepsilon$, pero la acotación anterior facilita este paso (aunque se obtiene un valor mayor para n).

c) Sea $a > 1$. Entonces $1 < \sqrt[n]{a}$. Pongamos $z_n = |x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Tenemos que:

$$(1+z_n)^n = a > 1 + nz_n \longrightarrow z_n < \frac{a-1}{n}$$

Deducimos que:

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon \longrightarrow z_n = |x_n - 1| < \varepsilon$$

La desigualdad $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$ se verifica para todo $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. Por tanto, es suficiente tomar $m_\varepsilon = 1 + E\big(\frac{a-1}{\varepsilon}\big)$.

Si $0 < a < 1$, poniendo $b = \frac{1}{a}$ y usando lo ya visto, tenemos que:

$$0 < 1 - \sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} < \sqrt[n]{b} - 1 < \frac{b-1}{n} = \frac{1-a}{a}\frac{1}{n}$$

De donde se sigue que podemos tomar $m_\varepsilon = 1 + E\big(\frac{1-a}{a\varepsilon}\big)$.

e) Sea $x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$. Tenemos que:

$$0 < x_n = |x_n - 0| = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) = n\sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Pongamos $z_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1$. Tenemos que $z_n > 0$ y:

$$(1+z_n)^n = 1 + \frac{1}{n} > 1 + nz_n \longrightarrow z_n < \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto, usando la desigualdad 7.3, tenemos que:

$$|x_n - 0| = n\sqrt[n]{n}z_n < \frac{1}{n}\sqrt[n]{n} < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)0\frac{1}{n} + \frac{2}{n\sqrt[n]{n}} \leqslant \frac{3}{n}$$

Deducimos que tomando $m_\varepsilon = 1 + E\big(\frac{3}{\varepsilon}\big)$, entonces para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_n - 0| < \varepsilon$. ☺

Ejercicio resuelto 156 Sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales. Prueba que un número real, β, es el supremo de A si, y sólo si, β es un mayorante de A y hay alguna sucesión de puntos de A que converge a β.

Solución. Supongamos que $\beta = \sup(A)$. Entonces β es, claro está, un mayorante de A. Veamos que hay una sucesión de puntos de A que converge a β. Como β es el mínimo mayorante de A, ningún número menor que β puede ser mayorante de A. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, como $\beta - \varepsilon < \beta$, tiene que haber algún $a_\varepsilon \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a_\varepsilon$. En particular, para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ tiene que haber algún $a_n \in A$ tal que $\beta - \frac{1}{n} < a_n$ y, por supuesto, $a_n \leqslant \beta$. Deducimos así la existencia de una sucesión, $\{a_n\}$, de puntos de A que verifica $\beta - \frac{1}{n} < a_n \leqslant \beta$. Es claro que $\{a_n\} \to \beta$.

La afirmación recíproca te la dejo apara que la hagas tú. ☺

Ejercicio resuelto 157 Supuesto que $\lim\{x_n\} = x$, prueba que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

Solución. Los elementos de A son los términos de la sucesión junto con el límite de la misma. Observa que el conjunto A puede ser finito o infinito. El caso en que A es finito es trivial porque sabemos que todo conjunto finito tiene máximo y mínimo. Conviene considerar, por tanto, que A es infinito. La idea para hacer este ejercicio es la siguiente: aún siendo A infinito, todos sus elementos están en un intervalo de la forma $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, con la posible excepción de un número finito de elementos de A que pueden quedar fuera de dicho intervalo. Para probar que A tiene máximo debemos fijarnos en los elementos más grandes de A. Dichos elementos deberían estar a la derecha del número $x + \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Pero no tiene por qué haber ningún elemento de A en estas condiciones, y eso pasa justamente cuando x es el mayor elemento de A, en cuyo caso x sería el máximo de A.

Esto lleva a razonar de la siguiente forma. Si x es el máximo de A, hemos acabado. En otro caso, tiene que haber algún elemento en A, digamos $a \in A$ que sea mayor que x, $a > x$. Tomemos un $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon < a$ (por ejemplo $\varepsilon = (a-x)/2$). Entonces, todos los elementos de A están en $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ excepto un número finito de ellos que quedan fuera de dicho intervalo; además, como $a > x + \varepsilon$, el conjunto $B = \{u \in A : u > x + \varepsilon\}$ no es vacío ($a \in B$), es finito y, evidentemente, se tiene que $\max(B) = \max(A)$. ☺

Ejercicio resuelto 158

a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que para todo $n \geqslant p$ es $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números no nulos verificando que $\lim \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lambda$, donde $0 \leqslant \lambda < 1$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

Aplicación. Dados $a \in]-1,1[$, $k \in \mathbb{N}$, prueba que $\lim\limits_{n\to\infty}\{n^k a^n\} = 0$.

Solución. *a)* Podemos hacer este apartado de dos maneras. La primera consiste en darse cuenta de que la hipótesis $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$ para todo $n \geqslant p$, junto con que $0 < \rho < 1$, implica que la sucesión $\{|x_{n+p}|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y, como es de números positivos, tiene que converger a un número $\alpha \geqslant 0$. Por tanto $\lim\{|x_n|\} = \alpha$. La desigualdad $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$ implica que $\alpha \leqslant \rho\alpha$ y, como $0 < \rho < 1$, la única posibilidad para que dicha desigualdad se cumpla es que $\alpha = 0$.

Otra forma consiste en escribir para $n > p$:

$$|x_{n+1}| = \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}\frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|}\cdots\frac{|x_{p+1}|}{|x_p|}|x_p| \leqslant \rho^{n-p+1}|x_p| = \rho^{n+1}\frac{|x_p|}{\rho^p} = M\rho^{n+1}$$

donde hemos puesto $M = \frac{|x_p|}{\rho^p}$ que es una constante que no depende de n. La desigualdad anterior, teniendo en cuenta que, por ser $0 < \rho < 1$, se verifica que $\rho^n \to 0$, implica que $|x_n| \to 0$.

b) Tomando $\varepsilon > 0$ de forma que $\rho = \lambda + \varepsilon < 1$ (basta tomar $\varepsilon = (1 - \lambda)/2$), se sigue que hay un número $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant p$ se verifica que:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leqslant \rho \longrightarrow |x_{n+1}| \leqslant \rho|x_n|.$$

Y, por lo visto en el apartado anterior, concluimos que $\{x_n\} \to 0$.

La aplicación que se propone en este ejercicio es un resultado importante que debes memorizar.

Pongamos $x_n = n^k a^n$, donde se entiende que k es un número natural fijo y a es un número real con $|a| < 1$. Tenemos que:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k |a| \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |a| < 1.$$

Y podemos aplicar el resultado del punto anterior para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty}\{n^k a^n\} = 0$.

Ejercicio resuelto 159 Estudia la convergencia de las sucesiones siguientes.

$a)\ x_n = \dfrac{2n + (-1)^n(n+2)}{7n+3}$ $\quad b)\ x_n = n\left(\dfrac{1+(-1)^n}{3}\right)^n$

$c)\ x_n = n^2\left(\dfrac{1+n}{3n}\right)^n$ $\quad d)\ x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\ \ (a > 0, b > 0)$

$e)\ x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$ $\quad f)\ x_n = \dfrac{x^n}{n!}\ \ (x \in \mathbb{R})$

$g)\ x_n = \sqrt{n^2+3n+2} - n$ $\quad h)\ x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right)$

Sugerencia. En algunos casos puede usarse el principio de las sucesiones encajadas o el ejercicio anterior.

Solución. *a)* Tenemos que $\{x_{2n}\} \to 3/7$, $\{x_{2n-1}\} \to 1/7$. Luego $\{x_n\}$ no converge porque tiene dos sucesiones parciales que convergen a límites distintos.

b) Tenemos que $0 \leqslant x_n \leqslant n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ y, como $n\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ por lo visto en el ejercicio anterior, se sigue que $\{x_n\} \to 0$.

d) Sea $\alpha = \operatorname{máx} a, b$. Entonces $\alpha \leqslant x_n \leqslant \sqrt[n]{2}\alpha$. Como $\sqrt[n]{2} \to 1$, concluimos que $\{x_n\} \to \alpha$.

e) Tenemos que:

$$\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n+n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$, el principio de las sucesiones encajadas implica que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}=1$.

h)

$$\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)=\frac{n^2+\sqrt{n}-n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{2}\,n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}}+1}\to\sqrt{2}$$

☺

Ejercicio resuelto **160** Estudia la convergencia de la sucesión:

$$x_n=2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solución. Estudiaremos la monotonía y acotación. Tenemos que:

$$x_{n+1}-x_n=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}}>$$

$$>\frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}}{\sqrt{n+1}}=0.$$

Por tanto $x_{n+1}>x_n$ y la sucesión es estrictamente creciente. Además:

$$x_{k+1}-x_k=2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Sumando estas desigualdades para $1\leqslant k\leqslant n-1$ obtenemos que $x_n-x_1<1-\frac{1}{\sqrt{n}}<1$, de donde se sigue que $x_n<2$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por tanto es convergente.

Alternativamente, aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x)=2\sqrt{x}$ en el intervalo $[k,k+1]$ tenemos que hay algún número $c\in]k,k+1[$ tal que:

$$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{c}}$$

Como $k<c<k+1$ se verifica que:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{c}}<\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Deducimos que:

$$0<2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Y volvemos a obtener las acotaciones anteriores de forma más cómoda. ☺

Ejercicio resuelto 161 Prueba que la sucesión dada por $x_1 = 0$ y para $n \geqslant 2$:

$$x_n = \log(\log n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k}$$

es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$.

Solución. Tenemos que:

$$x_{k+1} - x_k = \log(\log(k+1)) - \log(\log k) - \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = \log(\log x))$ en el intervalo $[k, k+1]$ para $k \geqslant 2$, tenemos que hay algún número $c \in]k, k+1[$ tal que:

$$\log(\log(k+1)) - \log(\log k) = \frac{1}{c \log c}.$$

Como $k < c < k+1$ se verifica que:

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \frac{1}{c \log c} < \frac{1}{k \log k}.$$

Deducimos que:

$$0 < x_{k+1} - x_k < \frac{1}{k \log k} - \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}.$$

Esta desigualdad prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente. Además, sumando las desigualdades anteriores desde $k = 2$ hasta $k = n$ resulta que:

$$x_{n+1} - x_2 < \frac{1}{2\log 2} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} < \frac{1}{2\log 2} \longrightarrow x_{n+1} < x_2 + \frac{1}{2\log 2} = \log(\log 2).$$

Por tanto, la sucesión está mayorada y, como es creciente, es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$. ☺

Ejercicio resuelto 162 Dados $0 < a_1 < b_1$, definamos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Justifica que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama *media aritmético-geométrica* de a_1 y b_1).

Solución. Teniendo en cuenta que la media geométrica de dos números es menor que su media aritmética, y que ambas están comprendidas entre dichos números, se sigue que $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. Volvemos a razonar ahora igual con $a_2 < b_2$ para obtener que $a_2 < a_3 < b_3 < b_2$. Este proceso puede continuarse indefinidamente. Deducimos que $\{a_n\}$ es creciente y $\{b_n\}$ es decreciente. Además, ambas están acotadas porque para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_1 < a_n < b_n < b_1$. Por tanto, ambas convergen. Pongamos $\{a_n\} \to a$ y $\{b_n\} \to b$. De la igualdad $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ se sigue que $a = \dfrac{a+b}{2}$, de donde se obtiene que $a = b$. ☺

Ejercicio resuelto **163** Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones.

a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$.

b) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$.

c) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}$.

d) Dado $a \in]-2,-1[$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{x_n + 4}$.

e) Dado $a > 0$, definimos $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

f) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3 - x_n^2}$.

g) Dado $a > 0$, $a \neq 1$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$.

h) Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{4} + (x_n)^2$.

i) Dado $a \in]-2,1[$, definimos $x_1 = a$, $3x_{n+1} = 2 + (x_n)^3$.

Sugerencia. Estudia en cada caso monotonía y acotación. La convergencia puede depender del valor inicial de a.

Solución. En este tipo de ejercicios puede ser útil calcular de entrada, cuando sea posible y bajo el supuesto de que la sucesión sea convergente, el límite de la sucesión. Después deberemos probar que efectivamente la sucesión converge.

a) Supuesto que $\{x_n\} \to \alpha$, de la igualdad $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, se sigue que $\alpha = \sqrt{3\alpha}$, por lo que $\alpha = 3$. Observa que no hemos probado que $\{x_n\}$ sea convergente. Lo que hemos probado es que, suponiendo que $\{x_n\}$ sea convergente, entonces su límite es 3. Este dato nos ayudará en lo que sigue. Por ejemplo, como $x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{3}$, podemos sospechar que $\{x_n\}$ es creciente. En tal caso debería verificarse que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Empezaremos probando esta desigualdad.

Tenemos que $x_1 = 1 < 3$; supuesto que $x_n < 3$ deducimos que $x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{9} = 3$. Luego, por inducción, concluimos que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $\{x_n\}$ es creciente. Tenemos que:

$$3x_n = x_{n+1}^2 = x_{n+1}x_{n+1} < 3x_{n+1} \quad \longrightarrow \quad x_n < x_{n+1}$$

por tanto, la sucesión es estrictamente creciente y, como está mayorada por 3, es convergente y, por lo visto al principio, su límite es 3. ☺

b) Supuesto que $\{x_n\} \to \alpha$, de la igualdad $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$, se sigue que $\alpha = \dfrac{3+3\alpha}{3+\alpha}$, de donde resulta que $\alpha^2 = 3$, por lo que deberá ser $\alpha = \sqrt{3}$ ya que el límite debe ser un número no negativo pues, evidentemente, todos los términos de la sucesión son positivos. Observa que no hemos probado que $\{x_n\}$ sea convergente. Lo que hemos probado es que, suponiendo que $\{x_n\}$ sea convergente, entonces su límite es $\sqrt{3}$. Este dato nos ayudará en lo que sigue. Por ejemplo, como $x_1 = 3 > x_2 = 2$, podemos sospechar que $\{x_n\}$ es decreciente. En tal caso debería verificarse que $x_n > \sqrt{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Empezaremos probando esta desigualdad.

Claramente $x_1 = 3 > \sqrt{3}$. Por otra parte:

$$x_{n+1} > \sqrt{3} \iff \frac{3+3x_n}{3+x_n} > \sqrt{3} \iff 3+3x_n > 3\sqrt{3}+\sqrt{3}x_n \iff$$
$$\iff x_n\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) > 3(\sqrt{3}-1) \iff x_n > \sqrt{3}$$

Por tanto, si $x_n > \sqrt{3}$ también es $x_{n+1} > \sqrt{3}$. Luego, por inducción, concluimos que $x_n > \sqrt{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $\{x_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0 \quad \longrightarrow \quad x_{n+1} < x_n$$

por tanto, la sucesión es estrictamente decreciente y, como está minorada por $\sqrt{3}$, es convergente y, por lo visto al principio, su límite es $\sqrt{3}$. ☺

7.32 Estrategia. Para estudiar las sucesiones recurrentes pueden usarse técnicas de derivadas; para ello hay que expresar la sucesión recurrente en la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, donde la función f generalmente es fácil de obtener a partir de la definición de la sucesión. En nuestro caso, tenemos que $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$, por lo que deberemos considerar la función $f(x) = \dfrac{3+3x}{3+x}$. Con ello, tenemos que $x_{n+1} = f(x_n)$. Esta relación, junto con $x_1 = 3$ determina la sucesión. Seguidamente, hay que elegir un intervalo donde la función f va a estar definida. Tenemos que elegir dicho intervalo de forma que la función tome valores en él. En nuestro caso, la elección es fácil pues, si $x \geqslant 0$ también es $f(x) \geqslant 0$, por ello vamos a considerar que f está definida en $\mathbb{R}_o^+$. Podemos volver a enunciar nuestro ejercicio como sigue.

Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \geqslant 0$ por $f(x) = \dfrac{3+3x}{3+x}$. Definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = 3$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Estudiar la convergencia de $\{x_n\}$.

Lo primero que debemos observar es que la sucesión está bien definida pues $x_1 = 3 > 0$ y, supuesto que $x_n > 0$, también es $x_{n+1} = f(x_n) > 0$ por lo que tiene sentido $f(x_{n+1})$. Si la sucesión converge, su límite debe ser un número $\alpha \geqslant 0$ y, por ser f continua, f permuta con el límite, por lo que debe verificarse que

$$\alpha = \lim\{x_{n+1}\} = \lim\{f(x_n)\} = f(\lim\{x_n\}) = f(\alpha).$$

De donde se obtiene que $\alpha = \sqrt{3}$.

Para estudiar la monotonía calculamos la derivada de f. Tenemos que $f'(x) = \dfrac{6}{(3+x)^2}$. Como $f'(x) > 0$, se sigue que f es estrictamente creciente. Como $x_1 = 3 > x_2 = f(x_1) = 2$ y, al ser creciente, f conserva las desigualdades, se sigue que $x_2 = f(x_1) > f(x_2) = x_3$. Este proceso puede seguirse indefinidamente, esto es, la misma relación de orden que hay entre dos términos consecutivos se conserva siempre:

$$x_n > x_{n+1} \quad \longrightarrow \quad x_{n+1} = f(x_n) > f(x_{n+1}) = x_{n+2}.$$

Obtenemos así que $\{x_n\}$ es decreciente. Además, como es de términos positivos, está minorada, luego es convergente. Su límite ya sabemos que es $\sqrt{3}$.

Observa que, al proceder de esta forma, podemos probar muy fácilmente el decrecimiento de la sucesión, sin necesidad de probar previamente que $x_n > \sqrt{3}$.

Las sucesiones recurrentes del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ donde f es una función continua, cuando son convergentes, $\{x_n\} \to \alpha$, su límite viene dado por $\alpha = f(\alpha)$, es decir, es un *punto fijo* de la función f.

e) Definamos $f : \mathbb{R}^+_o \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt{a+x}$. La sucesión está dada por $x_1 = \sqrt{a}$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Como f es continua, si la sucesión es convergente, su límite debe ser un punto fijo de f, es decir, debe ser solución de la ecuación $\alpha = f(\alpha)$, lo que implica que $\alpha^2 = a + \alpha$ y deducimos que

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

donde hemos elegido la solución positiva de la ecuación. Puesto que $x_1 = \sqrt{a} < x_2 = \sqrt{2a}$ y, evidentemente, f es estrictamente creciente, se sigue $x_2 = f(x_1) < f(x_2) = x_3$ y, en general, $x_n < x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Veamos que está mayorada. Probaremos que $x_n < \alpha$. Claramente $x_1 = \sqrt{a} < \alpha$. Supongamos que $x_n < \alpha$. Entonces:

$$x_{n+1}^2 = a + x_n < a + \alpha = \alpha^2 \quad \longrightarrow \quad x_{n+1} < \alpha$$

Concluimos, por inducción, que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por tanto converge y su límite es α.

Para $a = 1$, tenemos que:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{lím} \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

☺

f) Tenemos que $x_1 = 0$ y $x_{n+1} = \dfrac{1}{3-x_n^2}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{3-x^2}$. La sucesión que nos dan está definida por $x_1 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. La derivada de f viene dada por $f'(x) = \dfrac{2x}{(3-x^2)^2}$. Debemos considerar definida la función f en un intervalo I que contenga el 0 (porque $x_2 = f(0) = 1/3$) y de forma que $f(I) \subset I$. Como $f(0) = 1/3$ debe estar en I, deberá ser $I \subset [0, \sqrt{3}[$. Como f es creciente en $[0, \sqrt{3}[$ y $f(1) = 1/2$, se sigue que $f([0,1]) \subset [0,1/2] \subset [0,1]$.

Consideraremos en lo que sigue que la función f está definida en el intervalo $[0,1]$. Como $f([0,1]) \subset [0,1]$ y los valores de la sucesión $\{x_n\}$ son valores de f obtenidos por aplicación reiterada de f a partir del valor inicial $x_1 = 0 \in [0,1]$, dichos valores están siempre en $[0,1]$. Por tanto $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es estrictamente creciente en $[0,1]$ y $x_1 = 0 < x_2 = f(0) = 1/3$, se sigue que $x_2 = f(x_1) < f(x_2) = x_3$ y, en general, supuesto que $x_{n-1} < x_n$, se sigue que $x_n = f(x_{n-1}) < f(x_n) = x_{n+1}$. Luego $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Como está acotada, concluimos que $\{x_n\}$ es convergente. Sea $\{x_n\} \to \alpha$. Como $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, se sigue que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Además, como f es continua en $[0,1]$, α debe ser un punto fijo de f, esto es, $f(\alpha) = \alpha$. Deducimos que α verifica la ecuación $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$.

Las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ no son inmediatas de calcular pero podemos decir algunas cosas sobre ellas. Pongamos $h(x) = x^3 - 3x + 1$. Tenemos que $h(-2) = -1 < 0$, $h(0) = 1 > 0$, $h(1) = -1 < 0$ y $h(2) = 3 > 0$. Deducimos que en cada uno de los intervalos $]-2, 0[$, $]0, 1[$ y $]1, 2[$ hay una única raíz de la ecuación. Por tanto, la sucesión dada converge a la única raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ que está en $]0, 1[$. ☺

g) Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$. Tenemos, evidentemente, que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{a}{x^2}\right)$ donde, en principio, $x > 0$. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,\frac{x^3 - a}{x^3}$$

Deducimos que $f'(x) < 0$ para $0 < x < \sqrt[3]{a}$ y $f'(x) > 0$ para $x > \sqrt[3]{a}$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $]0, \sqrt[3]{a}]$ y estrictamente creciente en $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$. Concluimos que en $\sqrt[3]{a}$ la función f tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$. Como todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ son (con la posible excepción del primero $x_1 = a$) valores que toma f en puntos de $\mathbb{R}^+$, se sigue que $x_n > f(\sqrt[3]{a})$ para todo $n \geqslant 2$. Un calculo inmediato da $f(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$, es decir, resulta que $\sqrt[3]{a}$ es un punto fijo de f en $\mathbb{R}^+$. Como f es continua en $\mathbb{R}^+$, si $\{x_n\}$ es convergente dicho punto debe ser el límite de $\{x_n\}$. Pero antes debemos probar que $\{x_n\}$ es convergente.

Para estudiar la monotonía debemos tener en cuenta que como $x_n > \sqrt[3]{a}$ para todo $n \geqslant 2$, todos los términos de la sucesión están en el intervalo $I = [\sqrt[3]{a}, +\infty[$. No es por eso restrictivo suponer que $a > 1$ (porque si fuera $0 < a < 1$, podemos eliminar el primer término de la sucesión lo que no afecta para nada a su estudio). Comparemos x_1 con x_2. Tenemos que:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{3}\left(a - \frac{a}{a^2}\right) - a = \frac{2a^2 + 1}{3a} - a = \frac{1 - a^2}{3a} < 0$$

Por tanto se tiene que $x_2 < x_1$ y, como f es estrictamente creciente en I, las desigualdades se conservan por f, luego, supuesto que $x_n < x_{n-1}$, se tiene también que $x_{n+1} = f(x_n) < f(x_{n-1}) = x_n$. Resulta así que $\{x_n\}$ es decreciente. Además es de términos positivos (de hecho mayores que $\sqrt[3]{a}$), luego $\{x_n\}$ es convergente y su límite es $\sqrt[3]{a}$. ☺

h) Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{4} + x^2$. Tenemos que $f(x) \geqslant \frac{1}{4}$. Como los términos de la sucesión dada, con la posible excepción del primero, son todos ellos valores de f, se cumple que $x_n \geqslant \frac{1}{4}$ para todo $n \geqslant 2$. No es restrictivo por eso suponer que $a \geqslant \frac{1}{4}$. Pongamos $I = [1/4, +\infty[$. Tenemos que $f(I) \subset I$. Como $f'(x) = 2x$, se sigue que f es estrictamente creciente en I. Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ será monótona creciente si $x_1 \leqslant x_2$ y será monótona decreciente si $x_2 < x_1$. Tenemos que:

$$x_1 \leqslant x_2 \iff a \leqslant a^2 + \frac{1}{4} \iff 0 \leqslant a^2 + \frac{1}{4} - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

Deducimos que se verifica $x_1 \leqslant x_2$ y, por tanto, la sucesión es creciente. Cuando dicha sucesión esté mayorada será convergente y su límite debe ser un punto fijo de f en I.

Tenemos que $f(x) = x$ es lo mismo que $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, esto es, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, cuya única solución es $x = 1/2$. En consecuencia, la sucesión $\{x_n\}$ será convergente a $\frac{1}{2}$ solamente cuando $x_n \leqslant \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, $a^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$, que equivale a que $a^2 \leqslant \frac{1}{4}$, esto es, $|a| \leqslant \frac{1}{2}$ y, como $a \geqslant \frac{1}{4}$, resulta que debe ser $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. Deducimos también que para $a > \frac{1}{2}$, la sucesión no puede ser convergente y, al ser creciente, no está mayorada. Observa que cuando $a = \frac{1}{2}$ resulta la sucesión constante $x_n = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ☺

Ejercicio resuelto **164** Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n), \qquad y_n = x_n - \frac{1}{n}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente e $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Deduce que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Dicho número se llama la *constante de Euler*, se representa por la letra griega γ.

a) Deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log(n)} = 1$.

b) Justifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right\} = \log 2$.

c) Justifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \log 2$.

Solución. Tenemos que:

$$x_n - x_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Desigualdad que es consecuencia de que $\log(1 + x) < x$ para todo $x > 0$. También podemos tomar logaritmos en las desigualdades 7.5 para obtener que:

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Deducimos que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente. Tenemos también:

$$y_n - y_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < 0.$$

Deducimos que $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_1 < x_n < y_n < y_1$, por lo que ambas sucesiones están acotadas. Concluimos que dichas sucesiones convergen. Como $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, deducimos que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$.

a)

$$\frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log(n)} = \frac{\log n + x_n}{\log n} = 1 + \frac{x_n}{\log n}.$$

Como $\{x_n\}$ es convergente y $\dfrac{1}{\log n} \to 0$, se sigue que $\dfrac{x_n}{\log n} \to 0$.

b) Pongamos $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Tenemos que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n = x_{2n} + \log(2n) - x_n + \log n = x_{2n} - x_n + \log 2$$

Como $\{x_{2n}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ se tiene que $\{x_{2n} - x_n\} \to \gamma - \gamma = 0$.

c) Pongamos $A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} A_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n \end{aligned}$$

Por el apartado anterior, tenemos que $\lim\{A_{2n}\} = \log 2$. Como $A_{2n-1} = A_{2n} + \frac{1}{2n}$, deducimos que también $\lim\{A_{2n-1}\} = \log 2$. Concluimos que (ver ejercicio resuelto 165) $\lim\{A_n\} = \log 2$.

La sucesión $\{A_n\}$ se llama **serie armónica alternada**.

7.33 Estrategia. Para calcular límites donde interviene la serie armónica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

puede ser conveniente escribir dicha sucesión como $H_n = \log n + \gamma_n$ donde $\{\gamma_n\} \to \gamma$.

Ejercicio resuelto 165 Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{s(n)}\}$ que convergen a un mismo número x y tales que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a x.

Solución. Dado $\varepsilon > 0$, existen números naturales m_ε y n_ε tales que $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ y $|x_{s(n)} - x| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_\varepsilon$. Sea $p = \max\{m_\varepsilon, n_\varepsilon\}$ y pongamos $A = \{\sigma(n) : n \geqslant p\} \cup \{s(n) : n \geqslant p\}$. Como, por hipótesis es $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, se sigue que el conjunto $B = \mathbb{N} \setminus A$ es finito pues $B \subset \{\sigma(n) : 1 \leqslant n < p\} \cup \{s(n) : 1 \leqslant n < p\}$. Definamos $m = \max(B) + 1$. Para $q \geqslant m$ se tiene que $q \notin B$, o sea, $q \in A$, es decir, q es de la forma $q = \sigma(n)$ o $q = s(n)$ con $n \geqslant p$, en cualquier caso se verifica que $|x_q - x| < \varepsilon$.

Este resultado suele aplicarse cuando $\sigma(n) = 2n$ y $s(n) = 2n - 1$, es decir, a las sucesiones parciales de los términos pares e impares. Cuando sabemos que $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ convergen a un mismo número, podemos concluir que $\{x_n\}$ converge a dicho número.

Este resultado puede generalizarse de manera fácil. Por ejemplo si $\{x_{3n}\}$, $\{x_{3n-1}\}$ y $\{x_{3n-2}\}$ convergen todas a un mismo número, también $\{x_n\}$ converge a dicho número. ☺

Ejercicio resuelto 166 Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $M > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

Sugerencia. Teniendo ahora en cuenta que para todos $n, h \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\rho^{n+h-1} + \rho^{n+h-2} + \cdots + \rho^n < \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

deduce que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

Solución. Sean $n, h \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$|x_{n+h} - x_n| = \left| \sum_{k=1}^{h-1} (x_{n+k+1} - x_{n+k}) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{h-1} |x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leqslant M \sum_{k=0}^{h-1} \rho^{n+k} =$$

$$= M\rho^n \sum_{k=0}^{h-1} \rho^k = M\rho^n \frac{1-\rho^h}{1-\rho} < \rho^n \frac{M}{1-\rho} = K\rho^n$$

Donde hemos puesto $K = \dfrac{M}{1-\rho}$, que es una constante independiente de n y de h. Deducimos que:

$$K\rho^n < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad |x_{n+h} - x_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } h \in \mathbb{N}$$

Dado $\varepsilon > 0$, determinamos m_ε por la condición de que $\rho^{m_\varepsilon} < \varepsilon/K$. Entonces para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ y *para todo* $h \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x_{n+h} - x_n| < \varepsilon$, lo que prueba que la sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. ☺

Ejercicio resuelto 167 Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho |x_n - x_{n-1}|$ para todo $n > p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

Sugerencia. Justifica que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ donde M es una constante independiente de n.

Solución. Es muy fácil, basta iterar la desigualdad del enunciado. Sea $n > p$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho |x_n - x_{n-1}| \leqslant \rho^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \rho^{n-p} |x_{p+1} - x_p| = M\rho^n.$$

Donde $M = \dfrac{|x_{p+1} - x_p|}{\rho^p}$ es una constante independiente de n. El ejercicio anterior nos dice que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente. ☺

Ejercicio resuelto 168 Sea I un intervalo cerrado (puede ser $I = \mathbb{R}$); $f : I \to \mathbb{R}$ una función, y supongamos que hay un número $\alpha \in]0,1[$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|, \qquad \text{para todos } x, y \text{ en } I. \tag{7.9}$$

Se dice entonces que f es una **función contractiva** en I. Supongamos además que $f(x) \in I$ para todo $x \in I$. Dado un punto $a \in I$, definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in I$ que es el único punto fijo de f, es decir, $f(x) = x$.

b) Justifica que si la función f es derivable en I y se verifica que hay un número $\alpha \in]0,1[$ tal que $|f'(x)| \leqslant \alpha$ para todo $x \in I$, entonces f es contractiva en I.

Solución. a) Es consecuencia inmediata del ejercicio anterior.

b) Es consecuencia inmediata del teorema del valor medio. 

Ejercicio resuelto **169** Estudia la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$a)\ x_1=1,\ \ x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}\ ; \qquad b)\ x_1=\sqrt{2},\ \ x_{n+1}=\sqrt{2-x_n}.$$

Solución. a) Consideremos la función dada por $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. La sucesión que nos piden estudiar es la sucesión de iteradas de dicha función a partir del valor inicial $x_1=1$. Como $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}<0$, la función f es estrictamente decreciente. Por tanto, la sucesión $x_{n+1}=f(x_n)$ no es monótona. Pues si, por ejemplo es $x_{n-1}<x_n$, como f, al ser decreciente, invierte las desigualdades, se tendrá que $x_n=f(x_{n-1})>f(x_n)=x_{n+1}$.

Es evidente que $x_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por tanto $1+x_n>1\longrightarrow x_{n+1}<1$, luego $x_n\leqslant 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, de donde $1+x_n\leqslant 2\longrightarrow x_{n+1}\geqslant\frac{1}{2}$. Deducimos que todos los términos de la sucesión están en el intervalo $I=[1/2,+\infty[$. Para $x\geqslant 1/2$ se tiene que $|f'(x)|\leqslant\frac{4}{9}$. Podemos aplicar, por tanto, el ejercicio anterior y deducimos que $\{x_n\}$ es convergente. Además, su límite es el único punto fijo de f en I, que viene dado por $x=\dfrac{1}{1+x}\longrightarrow x^2+x-1=0$, de donde, $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. ☺

Ejercicio resuelto **170** Supongamos que la ecuación $x^2=bx+a$ tiene dos raíces reales distintas α y β. Dados dos números reales λ y μ, definamos $\{x_n\}$ por:

$$x_1=\lambda+\mu,\ \ x_2=\lambda\alpha+\mu\,\beta,\ \ x_{n+2}=bx_{n+1}+ax_n$$

Prueba que $x_n=\lambda\alpha^{n-1}+\mu\beta^{n-1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Aplicaciones. i) La sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$x_1=x_2=1,\ \ x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$$

se llama **sucesión de Fibonacci**. Calcula explícitamente x_n.

ii) Estudia la convergencia de la sucesión definida para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$x_1=a,\ x_2=b,\ \ x_{n+2}=\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n).$$

Solución. La igualdad $x_n=\lambda\alpha^{n-1}+\mu\beta^{n-1}$ es cierta para $n=1$ y para $n=2$. Sea $n\in\mathbb{N}$, con $n\geqslant 2$, y supongamos que la igualdad se verifica para todo $k\in\mathbb{N}$ con $k\leqslant n$. Entonces, teniendo en cuenta que $\alpha^2=b\alpha+a$ y $\beta^2=b\beta+a$, tenemos que:

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=bx_n+ax_{n-1}=b\lambda\alpha^{n-1}+b\mu\beta^{n-1}+a\lambda\alpha^{n-2}+a\mu\beta^{n-2}=\\&=\lambda(b\alpha+a)\alpha^{n-2}+\mu(b\mu+a)\beta^{n-2}=\lambda\alpha^n+\mu\beta^n\end{aligned}$$

Lo que prueba la igualdad para $n+1$. Concluimos, por inducción, que la igualdad es cierta para todo $n\in\mathbb{N}$.

i) Como $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, deducimos que $a=b=1$. Por tanto, α y β son las raíces de $x^2=x+1$, las cuales vienen dadas por:

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\qquad\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Calculemos λ y μ por las condiciones $x_1 = 1 = \lambda + \mu =, x_2 = 1 = \lambda\alpha + \mu\beta$. Fácilmente se obtiene que:

$$\lambda = \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Deducimos, por lo antes visto, que:

$$x_n = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

iii) Pongamos $x_1 = a^1 b^0$, $x_2 = a^0 b^1$, $x_n = a^{p_n} b^{q_n}$. Entonces:

$$x_{n+2} = a^{p_{n+2}} b^{q_{n+2}} = a^{\frac{1}{2}(p_{n+1}+p_n)} b^{\frac{1}{2}(q_{n+1}+q_n)}.$$

Tenemos las ecuaciones:

$$p_1 = 1,\; p_2 = 0,\; 2p_{n+2} = p_{n+1} + p_n, \qquad q_1 = 0,\; q_2 = 1,\; 2q_{n+2} = q_{n+1} + q_n$$

Ambas ecuaciones son de la forma $2x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ por lo que $a = b = 1$ y α y β son las raíces de $2x^2 = x + 1$. Por tanto $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$. En consecuencia:

$$p_n = \lambda_1 + \mu_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad q_n = \lambda_2 + \mu_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

Debemos ahora calcular λ_1, μ_1 y λ_2, μ_2 para que se verifiquen las respectivas condiciones iniciales $p_1 = 1, p_2 = 0$ y $q_1 = 0, q_2 = 1$. Fácilmente se obtiene que $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\mu_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, $\mu_2 = -\frac{2}{3}$. Deducimos que:

$$x_n = a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} b^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \longrightarrow a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{ab^2}.$$



7.3. Sucesiones divergentes. Indeterminaciones en el cálculo de límites

Las sucesiones que no son convergentes pueden tener comportamientos muy variados. Por ejemplo, una sucesión acotada que tenga dos valores de adherencia diferentes no es convergente, los términos de dicha sucesión se aproximan a un valor de adherencia o al otro, antiguamente se decía que la sucesión "oscilaba" entre estos valores. Pero una sucesión acotada no convergente puede tener muchos valores de adherencia. No debes hacerte una idea demasiado esquemática de las sucesiones. En el capítulo 5 hemos visto que el conjunto de los números racionales es numerable, esto significa que es posible escribir todos los números racionales como los términos de una sucesión y también podemos hacerlo con los racionales que están en el intervalo $[0,1]$. Pongamos $\mathbb{Q} \cap [0,1] == \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. La sucesión $\{r_n\}$ es acotada y, como consecuencia de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (proposición 5.11), dicha sucesión tiene como valores de adherencia *todos* los puntos del intervalo $[0,1]$.

Vamos a estudiar ahora un tipo muy particular de sucesiones *no convergentes* pero que presentan una gran regularidad.

7.34 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es **positivamente divergente**, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es **negativamente divergente**, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K < 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

Diremos que una sucesión es **divergente** para indicar que es positivamente o negativamente divergente.



7.35 Observación. Es importante que te des cuenta de que "divergente" no es sinónimo de "no convergente". Las sucesiones acotadas no convergentes no son tampoco divergentes. Sin embargo, muchos textos usan la expresión "sucesión divergente" con el significado de "sucesión no convergente". También es lamentablemente frecuente llamar "sucesiones oscilantes" a las sucesiones acotadas no convergentes. No te dejes confundir: una sucesión o es convergente o no es convergente. Un *tipo especial de sucesiones no convergentes* son las sucesiones positivamente divergentes y negativamente divergentes. Eso es todo, lo demás son ganas de confundir al lector.

En la siguiente proposición se exponen algunas propiedades elementales, pero importantes, de las sucesiones divergentes. Puesto que $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si $\{-x_n\} \to -\infty$, es suficiente enunciar dichas propiedades para sucesiones positivamente divergentes.

7.36 Proposición. *i)* $\{|x_n|\} \to +\infty$ *si, y sólo si,* $\{1/x_n\} \to 0$.

ii) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión acotada es una sucesión positivamente divergente.

iii) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

iv) El producto de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

v) El producto de una sucesión positivamente divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión positivamente divergente.

Frecuentemente hay que estudiar la convergencia o divergencia de una suma o producto de dos sucesiones precisamente cuando las reglas que hemos visto en secciones anteriores no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ no está determinado por el de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Por ejemplo, si sabemos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, ¿qué podemos decir del comportamiento de la sucesión $\{x_n + y_n\}$? Respuesta: absolutamente nada. Baste para convencerse de ello la consideración de los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll}
x_n = 2n, & y_n = -n; & \{x_n + y_n\} = \{n\} \to +\infty \\
x_n = n, & y_n = -2n; & \{x_n + y_n\} = \{-n\} \to -\infty \\
x_n = n+1, & y_n = -n; & \{x_n + y_n\} = \{1\} \to 1 \\
x_n = (-1)^n + n, & y_n = (-1)^n - n; & \{x_n + y_n\} = \{2(-1)^n\}
\end{array}$$

En consecuencia, las sucesiones del tipo $\{x_n+y_n\}$ donde $\{x_n\}\to+\infty$, $\{y_n\}\to-\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty-\infty$".

Análogamente, si sabemos que $\{x_n\}\to 0$ y que $\{y_n\}$ es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n y_n\}$; la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$". Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos sucesiones divergentes o de dos sucesiones que convergen a cero, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

El siguiente resultado permite resolver en muchas ocasiones indeterminaciones de la forma "∞/∞".

7.37 Teorema (**Criterio de Stolz**). *Sea $\{y_n\}$ una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que*

$$\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}\to L$$

donde $L\in\mathbb{R}$, o $L=+\infty$, o $L=-\infty$. Entonces se verifica también que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}\to L\,.$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $L\in\mathbb{R}$. Dado $\varepsilon>0$, existe, por hipótesis, un número natural k, tal que para todo $n\geqslant k$ se verifica que

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Así todas las fracciones

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k},\ \frac{x_{k+2}-x_{k+1}}{y_{k+2}-y_{k+1}},\cdots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},\ \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

se encuentran comprendidas entre $L-\varepsilon/2$ y $L+\varepsilon/2$, por lo que, usando el ejercicio 8, obtenemos que:

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_k}{y_{n+1}-y_k}<L+\frac{\varepsilon}{2}\tag{7.10}$$

cualquiera sea $n\geqslant k$. Teniendo en cuenta ahora la igualdad

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-L=\frac{x_k-Ly_k}{y_{n+1}}+\left(1-\frac{y_k}{y_{n+1}}\right)\left(\frac{x_{n+1}-x_k}{y_{n+1}-y_k}-L\right)$$

deducimos que:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-L\right|\leqslant\left|\frac{x_k-Ly_k}{y_{n+1}}\right|+\left|\frac{x_{n+1}-x_k}{y_{n+1}-y_k}-L\right|.\tag{7.11}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\big\{(x_k-Ly_k)/y_{n+1}\big\}=0$, existe un número natural q tal que, para todo $n\geqslant q$, se verifica

$$\left|\frac{x_k-Ly_k}{y_{n+1}}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Teniendo en cuenta (7.10) y (7.11), deducimos que para todo $n \geqslant \text{máx}\{k, q\}$ se verifica que

$$\left| \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - L \right| < \varepsilon.$$

Hemos probado, pues, que $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n/y_n\} = L$.

Supongamos ahora que $L = +\infty$. En tal caso, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se tendrá que $x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0$, por lo que la sucesión $\{x_n\}$ es, a partir de un término en adelante, estrictamente creciente. Supondremos, pues no es restrictivo hacerlo, que dicha sucesión es toda ella estrictamente creciente y que $x_{q+1} - x_q > y_{q+1} - y_q$ para todo $q \in \mathbb{N}$. Sumando estas desigualdades desde $q = 1$ hasta $q = n$, resulta $x_{n+1} - x_1 > y_{n+1} - y_1$. Y, como $\{y_n\} \to +\infty$, deducimos que $\{x_n\} \to +\infty$. Podemos usar ahora lo ya probado, intercambiando las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, para obtener que

$$\lim \left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\} = \lim \left\{ \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \right\} = 0.$$

De donde se sigue que $\{x_n/y_n\} \to +\infty$.

El caso $L = -\infty$ se reduce al previo cambiando la sucesión $\{x_n\}$ por $\{-x_n\}$. □

Es importante observar que, aún en las hipótesis del Criterio de Stolz, puede ocurrir que $\left\{ \dfrac{x_n}{y_n} \right\}$ sea convergente pero no lo sea $\left\{ \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \right\}$; es decir, el Criterio de Stolz da una condición suficiente pero no necesaria para la convergencia o divergencia de $\{x_n/y_n\}$ (ver ejercicio 178).

Observa que el criterio de Stolz recuerda a la regla de L'Hôpital donde las derivadas han sido sustituidas por las diferencias consecutivas. Del Criterio de Stolz se deducen dos útiles criterios para estudiar la convergencia de sucesiones de medias aritméticas o geométricas.

7.38 Proposición (Criterio de la media aritmética). *Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica que*

$$\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\} \to L.$$

Demostración. Basta aplicar el Criterio de Stolz a las sucesiones $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $y_n = n$. □

7.39 Proposición (Criterio de la media geométrica). *Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que*

$$\left\{ \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \right\} \to L.$$

Demostración. Lo afirmado se deduce del criterio de la media aritmética teniendo en cuenta que

$$\log\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \right) = \frac{\log(a_1) + \log(a_2) + \cdots + \log(a_n)}{n}$$

y la proposición 7.46. □

7.40 Corolario. *Supongamos que* $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L$ *donde* $\{x_n\}$ *es una sucesión de números positivos y* L *es un número real o bien* $L = +\infty$*. Entonces se verifica que* $\{\sqrt[n]{x_n}\} \to L$*.*

Demostración. Basta aplicar el criterio de la media geométrica a la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

7.3.1. Sucesiones y límite funcional

El siguiente resultado establece una relación entre límite funcional y límite de sucesiones que es de gran utilidad práctica, pues proporciona una estrategia general para calcular límites de sucesiones y permite utilizar para ello las técnicas conocidas para calcular límites funcionales.

7.41 Proposición. *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función y sean* $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$*. Equivalen las afirmaciones:*

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ *de puntos de* A *tal que* $\{x_n\} \to a$ *con* $x_n \neq a$*, se verifica que* $\{f(x_n)\} \to L$*.*

Demostración. $i) \longrightarrow ii)$. Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y sea $\{x_n\} \to a$ con $x_n \in A$ y $x_n \neq a$. Debemos probar que $sucf(x_n) \to L$. Consideremos el caso en que a y L son números reales. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como $\{x_n\} \to a$, existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|x_n - a| < \delta$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n \in A$, $x_n \neq a$ y $|x_n - a| < \delta$; en consecuencia, se verificará que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\{f(x_n)\} \to L$.

Para probar que $ii) \longrightarrow i)$, probaremos que $noi) \longrightarrow noii)$. Que f no tiene límite en a igual a L, quiere decir que *existe* un $\varepsilon_0 > 0$, tal que *para todo* $\delta > 0$ hay *algún punto* $x_\delta \in A$, con $x_\delta \neq a$ y $|x_\delta - a| < \varepsilon_0$ pero $|f(x_\delta) - L| \geqslant \varepsilon_0$. Tomando para cada $n \in \mathbb{N}$ $\delta = \frac{1}{n}$, obtenemos un $x_n \in A$ con $x_n \neq a$ y $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ pero $|f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon_0$. Claramente se tiene que $\{x_n\} \to a$, con $x_n \in A$ y $x_n \neq a$ pero $\{f(x_n)\}$ no converge a L.

Los demás casos en que o bien a o L son infinitos se hacen de manera parecida. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que todo límite funcional que conozcas te va a permitir resolver *muchos* límites de sucesiones. En particular, de la lista de límites básicos que debes conocer se deducen los siguientes resultados.

7.42 Proposición. *Para toda sucesión* $\{x_n\} \to 0$ *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,sen} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \operatorname{sen} x_n}{(x_n)^3} = \frac{1}{6} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \alpha \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n - x_n}{(x_n)^3} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n) - x_n}{x_n^2} = \frac{-1}{2}$$

7.43 Estrategia. Una estrategia para calcular límites de sucesiones consiste en convertir el límite de la sucesión que tienes que calcular en un caso particular de un límite funcional. El por qué de esta estrategia es que para calcular límites de funciones disponemos de muchas más herramientas que las que tenemos para trabajar directamente con sucesiones.

Según esta estrategia, para calcular el límite de una sucesión $\{y_n\}$ lo que hay que hacer es relacionar dicho límite con un límite funcional. Debemos inventarnos una función, f, y una sucesión convergente, $\{x_n\} \to a$, de forma que se tenga $y_n = f(x_n)$. Entonces, podemos asegurar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$, también es $\lim\{y_n\} = \alpha$.

7.44 Ejemplo. Se trata de calcular el límite de la sucesión $y_n = \dfrac{\log(n)}{n(\sqrt[n]{n}-1)}$.

Para ello nos fijamos en que en el denominador aparece $\sqrt[n]{n}-1$. Poniendo $x_n = \sqrt[n]{n}$, sabemos que $x_n \to 1$. La sucesión cuyo límite queremos calcular recuerda el límite funcional $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-1} = 1$. Pongamos $f(x) = \dfrac{\log x}{x-1}$. Como caso particular de este límite funcional, tenemos que $f(x_n) \to 1$, y es claro que $y_n = f(x_n)$. Hemos probado así que $y_n \to 1$ y todo lo que hemos tenido que hacer es relacionar dicho límite con un límite funcional que ha resultado ser (cosa muy frecuente) una derivada: la derivada de la función $\log x$ en el punto $x = 1$. ♦

Teniendo en cuanta la caracterización de la continuidad, el siguiente resultado es un caso particular de la proposición 7.41.

7.45 Proposición. *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función y sea* $a \in A$. *Equivalen las afirmaciones:*

i) f *es continua en* a.

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ *de puntos de* A *tal que* $\{x_n\} \to a$, *se verifica que* $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Podemos expresar este resultado como sigue: *la continuidad permuta con el límite secuencial*, esto es, si f es continua entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)$$

Recogemos seguidamente algunas importantes propiedades de las sucesiones divergentes de logaritmos y exponenciales. Todas ellas se deducen, teniendo en cuenta la proposición 7.41, de las correspondientes propiedades de las funciones exponencial y logaritmo natural (proposición 4.50).

7.46 Proposición.

- $\{x_n\} \to x \Longleftrightarrow \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \Longleftrightarrow \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \Longleftrightarrow \{e^{x_n}\} \to 0$.

Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ *se verifica que:*

- $\{x_n\} \to x > 0 \Longleftrightarrow \{\log(x_n)\} \to \log x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \Longleftrightarrow \{\log(x_n)\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to 0 \Longleftrightarrow \{\log(x_n)\} \to -\infty$.

7.3.2. Sucesiones asintóticamente equivalentes

7.47 Definición. Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Por ejemplo, las sucesiones $\{\log n\}$ y $\{n(\sqrt[n]{n} - 1)\}$ son asintóticamente equivalentes.

El siguiente resultado nos dice que para estudiar la convergencia de un producto de varias sucesiones podemos sustituir las que queramos por otras que sean asintóticamente equivalentes, sin que ello afecte a la convergencia o divergencia del producto ni a su eventual límite.

7.48 Proposición. *Sean* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sucesiones asintóticamente equivalentes y* $\{z_n\}$ *una sucesión cualquiera. Se verifica que:*

i) $\{x_n z_n\}$ *es convergente si, y sólo si,* $\{y_n z_n\}$ *es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.*

ii) $\{x_n z_n\}$ *es divergente si, y sólo si,* $\{y_n z_n\}$ *es divergente, en cuyo caso ambas sucesiones son divergentes del mismo tipo.*

En particular, $\{x_n\}$ *es convergente (resp. divergente) si, y sólo si,* $\{y_n\}$ *es convergente (resp. divergente), en cuyo caso ambas tienen igual límite (resp. son divergentes del mismo tipo).*

Demostración. Las afirmaciones hechas en $i)$ y $ii)$ son consecuencia de que

$$\lim \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \lim \left\{\frac{y_n}{x_n}\right\} = 1.$$

Si, por ejemplo, $\{y_n z_n\}$ es convergente, entonces como:

$$\{x_n z_n\} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \{y_n z_n\},$$

se sigue que $\{x_n z_n\}$ también es convergente y tiene el mismo límite que $\{y_n z_n\}$.

El mismo razonamiento prueba que si $\{x_n\}$ es divergente entonces también $\{y_n\}$ es divergente del mismo tipo.

La afirmación hecha al final del enunciado es consecuencia de lo anterior tomando $z_n = 1$. □



7.49 Observación. Es importante observar que en una suma de sucesiones no se puede, en general, sustituir una sucesión por otra asintóticamente equivalente. Por ejemplo, si $x_n = n+1$, $y_n = n + 1/n$ y $z_n = -n$, es claro que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ pero $\{x_n + z_n\} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es asintóticamente equivalente a $\{y_n + z_n\} = \{1/n\}$.

7.3.3. Sucesiones de potencias

Hay otras indeterminaciones que surgen al considerar *sucesiones de potencias*, es decir, sucesiones de la forma $\{x_n^{y_n}\}$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos e $\{y_n\}$ es una sucesión cualquiera de números reales. Puesto que

$$x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n)),$$

teniendo en cuenta la proposición 7.46, la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n^{y_n}\}$ vendrá determinada por la de $\{y_n \log(x_n)\}$; la cual, a su vez, está determinada en todos los casos por el comportamiento de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, excepto cuando dicha sucesión $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo “ $0\,\infty$”, lo que ocurre en los siguientes casos.

a) $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación “1^∞”)

b) $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación “∞^0”)

c) $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación “ 0^0”)

El siguiente resultado, que es la versión para sucesiones del criterio de equivalencia logarítmica para límites funcionales, permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “ $0\,\infty$”.

7.50 Teorema (Criterio de equivalencia logarítmica). *Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:*

- $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L \Longleftrightarrow \lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty \Longleftrightarrow \{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to 0 \Longleftrightarrow \{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Demostración. Puesto que $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$, las afirmaciones hechas en el enunciado se deducen de la proposición 7.46, sin más que tener en cuenta que, como $\{x_n\} \to 1$, las sucesiones $\{\log(x_n)\}$ y $\{x_n - 1\}$ son asintóticamente equivalentes, por lo que, en virtud de la proposición 7.48, si una de las sucesiones $\{y_n \log(x_n)\}$ e $\{y_n(x_n - 1)\}$ es convergente (resp. divergente a $+\infty$ o a $-\infty$), la otra también es convergente con igual límite (resp. divergente a $+\infty$ o a $-\infty$). □

Los ejercicios que siguen son de cálculo de límites de sucesiones. Deberás usar los criterios de Stolz y de las medias aritmética y geométrica y el criterio de equivalencia logarítmica. En general, debes seguir la estrategia básica de relacionar un límite de una sucesión con un límite funcional apropiado.

7.3.4. Ejercicios propuestos

336. Supongamos que $\{x_n\} \to 0$, siendo $-1 < x_n \neq 0$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Justifica, usando derivadas, que $\{(1+x_n)^\alpha - 1\}$ es asintóticamente equivalente a $\{\alpha x_n\}$.

337. Prueba que la sucesión $\{\log n!\}$ es asintóticamente equivalente a $\{n \log n\}$.

338. Justifica que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1+1/n^\alpha} - 1\right\}$ es asintóticamente equivalente a $\left\{1/n^{\alpha+1}\right\}$, donde $\alpha > 0$.

339. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

a) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha > -1$.

b) $x_n = \sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)} - n$, donde $k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

c) $x_n = \left(\dfrac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}\right)^n$ donde $a > 0$, $b > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

d) $x_n = \left(\dfrac{1 + 2^{p/n} + 3^{p/n} + \cdots + p^{p/n}}{p}\right)^n$, donde $p \in \mathbb{N}$.

e) $x_n = n\left(\dfrac{1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \dfrac{1}{k+1}\right)$, donde $k \in \mathbb{N}$.

f) $x_n = \left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}$

g) $x_n = n\left[\left(1 + \dfrac{1}{n^3 \log(1+1/n)}\right)^n - 1\right]$

h) $x_n = \dfrac{1}{n}\left(n + \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n-2}{3} + \cdots + \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{1}{n} - \log(n!)\right)$

340. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

$a)\ x_n = \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)}$ $\qquad b)\ x_n = \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{\mathrm{e}}\cdots\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}$

$c)\ x_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{\log n}{n}\right)^n$ $\qquad d)\ x_n = \left(\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n \log n}$

$e)\ x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1 + \dfrac{1}{j}\right)^j$ $\qquad f)\ x_n = \dfrac{(2\sqrt[n]{n} - 1)^n}{n^2}$

$g)\ x_n = \log n\left[\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right]$ $\qquad h)\ x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}\ (p, q \in \mathbb{N})$

$i)\ x_n = \left(\dfrac{5\sum_{k=1}^{n} k^4}{n^5}\right)^n$ $\qquad j)\ x_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$

$k)\ x_n = n\dfrac{\sqrt[n]{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n\operatorname{sen}(1/n)}$ $\qquad l)\ x_n = \dfrac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$

341. Sabiendo que $\{a_n\} \to a$, calcula el límite de las sucesiones:

a) $x_n = n(\sqrt[n]{a_n} - 1)$

b) $x_n = \dfrac{\exp(a_1) + \exp(a_2/2) + \cdots + \exp(a_n/n) - n}{\log n}$

c) $x_n = \dfrac{a_1 + a_2/2 + \cdots + a_n/n}{\log n}$

342. Calcula los límites de las sucesiones:

$a)\ \dfrac{n\log(1+1/n)-1}{(1+1/n)^n - \mathrm{e}},\quad b)\ n\left(\sqrt[n]{2-1/n}-1\right),\quad c)\ n^2\dfrac{n^{1/n^2}-1}{\log(n)},\quad d)\ H_n\left(n^{1/H_n^2}-1\right)$

Donde $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

Sugerencia. Usa equivalencias asintóticas apropiadas.

343. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}^+$. Calcula el límite de la sucesión $\sqrt[n]{\dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}}$.

344. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos, α un número real, y supongamos que $\{n^\alpha x_n\} \to L \in \mathbb{R}_o^+$. Calcula el límite de la sucesión $n^\alpha \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

345. Sean a, b números positivos; definamos $x_k = a+(k-1)b$ para cada $k\in\mathbb{N}$ y sea G_n la media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y A_n su media aritmética. Calcula el límite de la sucesión $\dfrac{G_n}{A_n}$.

346. Sea $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, $x \neq y$. Definamos $z_{2n-1} = x_n$, y $z_{2n} = y_n$. Justifica que la sucesión

$$\left\{\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\right\}$$

es convergente.

347. Definamos $\{x_n\}$ por:

$$x_{3m} = \frac{1}{2^{3m-1}3^m}, \quad x_{3m-1} = \frac{1}{2^{3m-3}3^{m-2}}, \quad x_{3m-2} = \frac{1}{2^{3m-4}3^m}.$$

Calcula el límite de la sucesión $\sqrt[n]{x_n}$ y justifica que la sucesión $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ no converge.

348. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de números positivos verificando que $\{(x_n)^n\} \to x > 0$ $\{(y_n)^n\} \to y > 0$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, con $\alpha+\beta = 1$, calcula $\lim(\alpha x_n + \beta y_n)^n$.

349. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente, y sea $\{b_n\} \to L$, donde L puede ser un número real o $\pm\infty$. Justifica que

$$\left\{\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right\} \to L.$$

Aplicación. Supuesto que $\{x_n\} \to x$, calcula $\lim \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x_k$.

350. Dadas dos funciones polinómicas P, Q, tales que el grado de Q es mayor o igual que el grado de P y $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, justifica que la sucesión $\left\{\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right\}$ es convergente y calcula su límite.

351. a) Sea $f : [a,b] \to]a,b]$ creciente y continua. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por $x_1 = a$ y $x_{n+1} = f(x_n)$, converge a un punto $u \in]a,b]$ tal que $f(u) = u$.

b) Dado $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$, estudia la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ definida por:

$$z_1 = \alpha, \quad z_{n+1} = \alpha + z_n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

352. a) Justifica las desigualdades

$$0 < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < x \ \ (x > 0); \quad x < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < 0 \ \ (x < 0).$$

b) Dado $x \neq 0$ definamos $x_1 = x$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \log \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n}.$$

Estudia la convergencia de $\{x_n\}$.

353. Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por $f(x) = \log x - x + 2$.

1. Prueba que f tiene exactamente dos ceros, α y β, con $\alpha < 1 < \beta$.
2. Dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se define la siguiente sucesión por recurrencia:

$$x_{n+1} = \log x_n + 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada que converge a β.

354. Dado un número $\alpha \in]0, \pi[$, se define la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_1 = \operatorname{sen} \alpha$, $x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n$.

(a) Justifica que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite.

(b) Calcula el límite de la sucesión $z_n = \dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}$

7.3.5. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 171 Prueba que $\{\log n!\}$ es asintóticamente equivalente a $\{n \log n\}$.

Solución. Pongamos $x_n = n \log n$, $y_n = \log n!$. Aplicaremos el criterio de Stolz para calcular el límite de la sucesión $\{\frac{x_n}{y_n}\}$. Tenemos que:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)\log(n+1) - n \log n}{\log(n+1)} = \frac{n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log(n+1)} + 1$$

Teniendo en cuenta que $n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to 1$ y que $\log n\to+\infty$, obtenemos que $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}\to 1$ y, por el criterio de Stolz, concluimos que $\{\frac{x_n}{y_n}\}\to 1$. ☺

Ejercicio resuelto 172 Justifica que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1+1/n^\alpha}-1\right\}$ es asintóticamente equivalente a $\left\{1/n^{\alpha+1}\right\}$, donde $\alpha>0$.

Solución. Pongamos $x_n=\sqrt[n]{1+1/n^\alpha}$. Como $1\leqslant x_n\leqslant\sqrt[n]{2}$, deducimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\{x_n\}\to 1$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}=1$, porque dicho límite es la derivada en 1 de la función logaritmo. Por tanto, en virtud de la proposición 7.41, para toda sucesión $\{z_n\}\to 1$ se verifica que $\lim\dfrac{\log(z_n)}{z_n-1}=1$, esto es, $z_n-1\sim\log(z_n)$. Análogamente, se tiene que $\log(1+u_n)\sim u_n$ para toda sucesión $\{u_n\}\to 0$. Deducimos que:

$$x_n-1\sim\log(x_n)=\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\sim\frac{1}{n}\frac{1}{n^\alpha}=\frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

Ejercicio resuelto 173 Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

a) $x_n=\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha>-1$.

b) $x_n=\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)}\;-\;n$, donde $k\in\mathbb{N}$, $a_j\in\mathbb{R}$, $1\leqslant j\leqslant k$.

c) $x_n=\left(\dfrac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta}\right)^n$ donde $a>0$, $b>0$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha+\beta\neq 0$.

d) $x_n=\left(\dfrac{1+2^{p/n}+3^{p/n}+\cdots+p^{p/n}}{p}\right)^n$, donde $p\in\mathbb{N}$.

e) $x_n=n\left(\dfrac{1+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\dfrac{1}{k+1}\right)$, donde $k\in\mathbb{N}$.

f) $x_n=\left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}$

g) $x_n=n\left[\left(1+\dfrac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n-1\right]$

h) $x_n=\dfrac{1}{n}\left(n+\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n-2}{3}+\cdots+\dfrac{2}{n-1}+\dfrac{1}{n}-\log(n!)\right)$

Solución. a) Pongamos $x_n=\frac{u_n}{v_n}$. Aplicamos el criterio de Stolz, lo cual puede hacerse porque, al ser $\alpha>-1$ se tiene que $n^{\alpha+1}$ es una sucesión estrictamente creciente.

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\frac{1}{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}-1\right]}$$

Usando las equivalencias asintóticas $x_n-1\sim\log(x_n)$, válida cuando $\{x_n\}\to 1$, y $\log(1+u_n)\sim u_n$, válida cuando $\{u_n\}\to 0$, tenemos que:

$$n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}-1\right]\sim n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}=(\alpha{+}1)n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim(\alpha{+}1)n\frac{1}{n}=\alpha{+}1.$$

Deducimos que $\lim \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \frac{1}{\alpha+1}$ y, por el criterio de Stolz, $\lim x_n = \frac{1}{\alpha+1}$.

b)Tenemos que:

$$\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)} - n = n\left(\sqrt[k]{\big(1+\frac{a_1}{n}\big)\big(1+\frac{a_2}{n}\big)\cdots\big(1+\frac{a_k}{n}\big)} - 1\right) \sim$$
$$\sim n\frac{1}{k}\log\left[\big(1+\frac{a_1}{n}\big)\big(1+\frac{a_2}{n}\big)\cdots\big(1+\frac{a_k}{n}\big)\right] =$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} n\log\big(1+\frac{a_j}{n}\big) \to \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} n\log\big(1+\frac{a}{n}\big) = a$.

c) Es una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$, donde

$$u_n = \frac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta}, \qquad v_n = n$$

Claramente $u_n \to 1$, por lo que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n-1) = n\left(\frac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta} - 1\right) = n\left(\frac{\alpha(\sqrt[n]{a}-1)+\beta(\sqrt[n]{b}-1)}{\alpha+\beta}\right) =$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}n(\sqrt[n]{a}-1) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}n(\sqrt[n]{b}-1) \to$$
$$\to \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\log a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\log b = \log\left(a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right)$$

Deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$.

d) Es una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$, donde

$$u_n = \frac{1+2^{\frac{p}{n}}+3^{\frac{p}{n}}+\cdots+p^{\frac{p}{n}}}{p}, \qquad v_n = n$$

Claramente $u_n \to 1$, por lo que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n-1) = n\left(\frac{1+2^{\frac{p}{n}}+3^{\frac{p}{n}}+\cdots+p^{\frac{p}{n}}}{p} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{p}\Big(n\big(2^{\frac{p}{n}}-1\big)+n\big(3^{\frac{p}{n}}-1\big)+\cdots+n\big(p^{\frac{p}{n}}-1\big)\Big)$$

Teniendo en cuenta que $\lim n(\sqrt[n]{a}-1) = \log a$, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(u_n-1) = \log 2+\log 3+\cdots+\log n = \log n! \;\longrightarrow\; \lim\{x_n\} = n!.$$

f) Es una sucesión de potencias $x_n = u_n^{v_n}$, donde:

$$u_n = \frac{3}{4}\frac{1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}, \quad v_n = n^2.$$

La base $\{u_n\}$ converge a 1, pues aplicando Stolz con $a_n = 1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$ y $b_n = n^3$, tenemos:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} = \frac{4n^2+4n+1}{3n^2+3n+1} \to \frac{4}{3}.$$

Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n-1) = n^2\left(\frac{3}{4}\frac{1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}-1\right) =$$
$$= \frac{3}{4}\frac{3\big(1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\big)-4n^3}{n}$$

Apliquemos ahora el criterio de Stolz con $z_n = 3\big(1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\big) - 4n^3$,$w_n = n$. Tenemos:

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{w_{n+1}-w_n} = 3(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 + 4n^3 = -1.$$

Deducimos que $v_n(u_n-1) \to -\frac{3}{4}$ y, por tanto, $\lim\{x_n\} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}^3}}$.

g) $x_n = n\left[\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n - 1\right]$. Pongamos $z_n = \left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n$. La sucesión $\{z_n\}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Tenemos que:

$$n\frac{1}{n^3\log(1+1/n)} = \frac{1}{n}\frac{1}{n\log(1+1/n)} \to 0 \quad\longrightarrow\quad z_n \to 1.$$

En consecuencia:

$$x_n \sim n\log(z_n) = n^2\log\left(1+\frac{1}{n^3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) \sim n^2\frac{1}{n^3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Luego $\lim\{x_n\} = \lim \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$ ☺

Ejercicio resuelto 174 Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

$a)\ x_n = \dfrac{\log\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\big)}{\log(\log n)}$

$b)\ x_n = \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{\mathrm{e}}\cdots\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}$

$c)\ x_n = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{\log n}{n}\right)^n$

$d)\ x_n = \left(\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n}$

$e)\ x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j$

$f)\ x_n = \dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$

$g)\ x_n = \log n\left[\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right]$

$h)\ x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}\ \ (p,q\in\mathbb{N})$

$i)\ x_n = \left(\dfrac{5\sum_{k=1}^{n}k^4}{n^5}\right)^n$

$j)\ x_n = \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$

$k)\ x_n = n\dfrac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1-n\operatorname{sen}(1/n)}$

$l)\ x_n = \dfrac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$

Solución. a) Usaremos la estrategia 7.33. Pongamos $H_n = \log n + x_n$ donde $\{x_n\} \to \gamma$. Tenemos que:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)} = \frac{\log(\log n + x_n)}{\log(\log n)} = \frac{\log\left(\log n\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)\right)}{\log(\log n)} =$$

$$= \frac{\log(\log n) + \log\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)}{\log(\log n)} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)}{\log(\log n)} \to 1.$$

7.51 Observación. Hemos visto en el ejercicio resuelto 164 que $H_n \sim \log n$, pero de aquí no puede deducirse directamente que $\log(H_n) \sim \log(\log n)$ que es lo que hemos probado. La razón es que no es cierto en general que si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ también sea $\log(x_n) \sim \log(y_n)$. Por ejemplo, las sucesiones $\{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\}$ y $\{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}\}$ son asintóticamente equivalentes porque ambas convergen a 1, pero sus logaritmos son las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}$ y $\{\frac{1}{n^2}\}$ que no son asintóticamente equivalentes.

En general, no hay garantías de que una equivalencia asintótica entre sucesiones se conserve por una determinada función.

c) Tomando logaritmos tenemos que:

$$\log x_n = n\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right) - \log n = n\left(\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right) - \frac{\log n}{n}\right)$$

Esta expresión es de la forma $\log(1+u_n) - u_n$ donde $u_n \to 0$. Recordemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Tenemos que:

$$\log x_n = \frac{\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right) - \frac{\log n}{n}}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^2}\,\frac{(\log n)^2}{n}$$

Poniendo $u_n = \frac{\log n}{n}$, como $u_n \to 0$, deducimos que la primera de las dos fracciones anteriores converge a $-\frac{1}{2}$ y la segunda $\frac{(\log n)^2}{n} \to 0$. Concluimos que $\log x_n \to 0$ y, por tanto, $\{x_n\} \to 1$.

e) $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j$. Pongamos:

$$z_k = \frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j\log\left(1+\frac{1}{j}\right)}{k}.$$

De esta forma, se tiene que:

$$x_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k}{n}.$$

Como $\{z_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas de la sucesión $y_n = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, y $\lim\{y_n\} = 1$, se sigue, por el criterio de la media aritmética, que $\{z_n\} \to 1$. Como $\{x_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas de $\{z_n\}$, volviendo ahora a aplicar el mismo criterio, deducimos que $\{x_n\} \to 1$.

f) $x_n = \dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$. Pongamos:

$$x_n = \left(\frac{2\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n^2}}\right)^n = \left(2\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right)^n$$

Se trata de una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$ donde $u_n = 2\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ y $v_n = n$. Claramente $u_n \to 1$, por lo que se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n - 1) = n\left(2\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} - 1\right) = -n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - 1\right)^2 \sim$$

$$\sim -n\left(\log\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{\log n}{n} \to 0.$$

Deducimos que $x_n \to 1$.

g) La sucesión $x_n = \log n\left[\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right]$ es de la forma $b_n(a_n - 1)$ donde $a_n = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n$, $b_n = \log n$. Veamos que $\{a_n\} \to 1$. Para ello, como se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, aplicamos el criterio de equivalencia logarítmica:

$$n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right) = \frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\log n} \to 0$$

Por tanto, $\{a_n\} \to 1$. Podemos aplicar ahora el criterio de equivalencia logarítmica a la sucesión $b_n(a_n - 1)$. Tenemos que:

$$a_n^{b_n} = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}$$

Esta sucesión es una indeterminación del tipo 1^∞ y podemos volver a aplicarle el criterio de equivalencia logarítmica.

$$n\log n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1.$$

Concluimos que $\{x_n\} \to 1$.

h) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}$ donde $p, q \in \mathbb{N}$. Es una sucesión del tipo $x_n = \sqrt[n]{z_n}$ donde $z_n = \frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}$. Tenemos que:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(pn+p)!}{(qn+q)^{pn+p}}\frac{(qn)^{pn}}{(pn)!} = \frac{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}{(qn+q)^p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{pn}$$

La fracción $\frac{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}{(qn+q)^p}$ es un cociente de dos polinomios en la variable n del mismo grado p y coeficientes líder iguales a p^p y q^p respectivamente, por tanto su límite es igual a $\left(\frac{p}{q}\right)^p$. La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{pn} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{np}$ converge a e^{-p}. Por tanto, en virtud del corolario 7.40, la sucesión dada converge a $\left(\frac{p}{q\,e}\right)^p$.

k) $x_n = n\dfrac{\sqrt[n]{e} - e^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n\operatorname{sen}(1/n)} = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n} - \operatorname{sen}(\frac{1}{n})}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$. Pongamos $y_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que $x_n = f(y_n)$. Como $y_n \to 0$, el límite de $\{x_n\}$ es igual al límite de $f(x)$ en $x = 0$. Tenemos que:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}\,\frac{e^{x-\operatorname{sen} x} - 1}{x - \operatorname{sen} x} \sim e^{\operatorname{sen} x} \sim 1 \qquad (x \to 0)$$

Donde hemos usado que la función $\frac{e^{x-\operatorname{sen} x}-1}{x-\operatorname{sen} x}$ es de la forma $\frac{e^{h(x)}-1}{h(x)}$ donde $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, por lo que dicha función tiene límite igual a 1 en $x = 0$. ☺

Ejercicio resuelto **175** Sabiendo que $\{a_n\} \to a$, calcula el límite de las sucesiones:

a) $x_n = n(\sqrt[n]{a_n} - 1)$

b) $x_n = \dfrac{\exp(a_1) + \exp(a_2/2) + \cdots + \exp(a_n/n) - n}{\log n}$

c) $x_n = \dfrac{a_1 + a_2/2 + \cdots + a_n/n}{\log n}$

Solución. b) Es una sucesión del tipo $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Aplicaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{\exp\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right) - 1}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim n\frac{a_{n+1}}{n+1} \to a.$$

Donde hemos usado la equivalencia asintótica $e^{z_n} - 1 \sim z_n$ válida siempre que $z_n \to 0$ y $\log(1 + y_n) \sim y_n$, válida siempre que $y_n \to 0$. Concluimos que $\{x_n\} \to a$. ☺

Ejercicio resuelto **176** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L > 0$. Calcula el límite de la sucesión $\sqrt[n]{\dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}}$.

Solución. Es una sucesión del tipo $w_n = \sqrt[n]{y_n}$ donde $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$. Aplicaremos el corolario 7.40. Tenemos que:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n}\,\frac{\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}} \sim L\frac{1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

En virtud, del citado corolario, se tiene que $\sqrt[n+1]{x_{n+1}} \to L$. Sea $z_n = \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Consideremos la sucesión:

$$\log z_n = \frac{\log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)}{n(n+1)}$$

Pongamos $a_n = \log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)$, $b_n = n(n+1)$. Aplicaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\log(x_{n+1})}{2n+2} = \frac{1}{2}\log \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \to \frac{1}{2}\log L = \log\sqrt{L}.$$

Deducimos que $\log z_n \to \log\sqrt{L}$, por lo que $z_n \to \sqrt{L}$ y también $\frac{y_{n+1}}{y_n} \to \sqrt{L}$. El citado corolario 7.40 implica que $w_n \to \sqrt{L}$.

Ejercicio resuelto 177 Sean a, b números positivos; definamos $x_k = a+(k-1)b$ para cada $k\in\mathbb{N}$ y sea G_n la media geométrica de $x_1, x_2, \dots, x_n$ y A_n su media aritmética. Calcula el límite de la sucesión $\dfrac{G_n}{A_n}$.

Solución. Tenemos que $A_n = \dfrac{na + \frac{n(n-1)}{2}b}{n} = a + \dfrac{n-1}{2}b$. Por tanto:

$$\frac{G_n}{A_n} = \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{a + \frac{n-1}{2}b} = \frac{1}{\frac{a}{n} + \frac{n-1}{2n}b}\sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{n^n}}$$

Calcularemos el límite de la sucesión $U_n = \sqrt[n]{\dfrac{x_1 x_2 \cdots x_n}{n^n}}$, que es del tipo $U_n = \sqrt[n]{z_n}$, usando el corolario 7.40, tenemos:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}n^n = \frac{x_{n+1}}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{b}{\mathrm{e}}.$$

Deducimos que $\{\frac{G_n}{A_n}\} \to \frac{2}{\mathrm{e}}$. ☺

Ejercicio resuelto 178 Sea $\{x_n\}\to x$, $\{y_n\}\to y$, $x\neq y$. Definamos $z_{2n-1}=x_n$, y $z_{2n}=y_n$. Justifica que la sucesión

$$\left\{\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\right\}$$

es convergente.

Solución. Pongamos $u_n = \dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}$. Tenemos que:

$$u_{2n} = \frac{z_1 + z_3 + \cdots + z_{2n-1}}{2n} + \frac{z_2 + z_4 + \cdots + z_{2n}}{2n} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{1}{2}\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \to \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

Donde hemos aplicado el criterio de la media aritmética. Análogamente se comprueba que $\{u_{2n-1}\} \to \frac{x+y}{2}$. Concluimos que $\{u_n\} \to \frac{x+y}{2}$.

Observa que no se puede calcular el límite de $\{u_n\}$ aplicando el criterio de Stolz. Llamando $Z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, $V_n = n$, tenemos $u_n = \frac{Z_n}{V_n}$ y:

$$\frac{Z_{n+1} - Z_n}{V_{n+1} - V_n} = Z_{n+1} - Z_n = \begin{cases} x_{m+1}, & \text{si } n = 2m \text{ es par;} \\ y_m, & \text{si } n = 2m-1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto, la sucesión $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{V_{n+1}-V_n}$ no es convergente. ☺

Ejercicio resuelto **179** a) Justifica las desigualdades:

$$0 < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < x \ \ (x > 0); \quad x < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < 0 \ \ (x < 0).$$

b) Dado $x \neq 0$ definamos $x_1 = x$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \log \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n}.$$

Estudia la convergencia de $\{x_n\}$.

Solución. a) En virtud del teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \mathrm{e}^c$$

donde c es un punto comprendido entre x y 0, esto es, $c \in]0, x[$ si $x > 0$, y $c \in]x, 0[$ si $x < 0$. En el primer caso es $1 < \mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$ y en el segundo es $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^c < 1$. Á partir de aquí se deducen enseguida las desigualdades del enunciado.

b) Definamos $f(x) = \log \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ y $f(0) = 0$. La función f es continua en $\mathbb{R}$. Supongamos que $x < 0$. Entonces, como consecuencia de la segunda de las desigualdades del apartado anterior, se tiene que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y $x_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, dicha sucesión converge y su límite es un número $\alpha \leqslant 0$, que debe verificar la igualdad $\alpha = f(\alpha)$ lo que exige que $\alpha = 0$. ☺

Ejercicio resuelto **180** Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por $f(x) = \log x - x + 2$.

a) Prueba que f tiene exactamente dos ceros, α y β, con $\alpha < 1 < \beta$.

b) Dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se define la siguiente sucesión por recurrencia:

$$x_{n+1} = \log x_n + 2 \ \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada que converge a β.

Solución. a) Como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ y $f(1) = 1 > 0$ y, evidentemente, la función f es continua en $\mathbb{R}^+$, podemos aplicar el teorema de Bolzano a los intervalos $]0, 1]$ y $[1, +\infty[$, para deducir f tiene algún cero en cada uno de ellos.

Como $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, se sigue que f es estrictamente decreciente en $[1, +\infty[$ y estrictamente creciente en $]0, 1]$. Por tanto solamente puede anularse una vez en dichos intervalos.

b) Como la función $h(x) = \log x + 2$ es estrictamente creciente para $x > 0$ y $h(\alpha) = \alpha$, $h(\beta) = \beta$, se deduce que para todo $x \in]\alpha, \beta[$ es $\alpha < h(x) < \beta$. Además, como $h(x) - x$ es continua y no se anula en $]\alpha, \beta[$ debe tener signo constante. Como $h(1) > 0$, deducimos que $x < h(x)$ para todo $x \in]\alpha, \beta[$. Por tanto, dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se tiene que $x_1 < h(x_1) = x_2$ y, supuesto que $x_{n-1} < x_n$ se tiene que $x_n = h(x_{n-1}) < h(x_n) = x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y, además, todos sus términos están en $]\alpha, \beta[$, luego dicha sucesión converge y su límite, λ, debe verificar la igualdad $\lambda = h(\lambda)$; puesto que $\alpha < \lambda \leqslant \beta$, se sigue que $\lambda = \beta$. ☺

Ejercicio resuelto 181 Dado un número $\alpha \in]0,\pi[$, se define la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_1 = \operatorname{sen}\alpha,\ x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n$.

(a) Justifica que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite.

(b) Calcula el límite de la sucesión $z_n = \dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}$

Solución. a) La conocida desigualdad $0 < \operatorname{sen} x < x$, válida para todo $x \in]0,\pi[$, implica que la sucesión es estrictamente decreciente y de números positivos. De aquí se deduce enseguida que es convergente y su límite es 0.

b)

$$z_n = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x_n)} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^2 \operatorname{sen}^2(x_n)} \sim$$
$$\sim \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^4} = \frac{\operatorname{sen}(x_n) + x_n}{x_n} \frac{x_n - \operatorname{sen}(x_n)}{x_n^3} \to \frac{1}{3}.$$

☺

7.4. Sucesiones de números complejos

7.52 Definición. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice que **converge** a un número complejo z si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|z_n - z| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

Se dice que el número z es **límite de la sucesión** $\{z_n\}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{z_n\} = z$ o, simplemente, $\lim\{z_n\} = z$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{z_n\} \to z$.

Observa que, en virtud de la definición dada, se verifica que

$$\{z_n\} \to z \quad \Longleftrightarrow \quad |z_n - z| \to 0$$

Recordemos que $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. Gracias a esta desigualdad tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que $|z_n - z| \to 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

7.53 Proposición. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además, en dicho caso*

$$\lim\{z_n\} = z \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = \lim\{\operatorname{Re} z_n\} \quad y \quad \operatorname{Im} z = \lim\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Los resultados obtenidos para sucesiones de números reales *en los que no interviene la estructura de orden* son también válidos para sucesiones de números complejos. Son válidos, en particular, los resultados relativos a álgebra de límites, el teorema de Bolzano–Weierstrass y el teorema de completitud.

7.4.1. Definición de la exponencial compleja

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z\in\mathbb{C}$. Pongamos $z = x + iy$ donde suponemos que $y \neq 0$ (puesto que si $y = 0$ tendríamos que $z = x$ sería un número real). Sea

$$z_n = \left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n.$$

Pongamos:

$$w_n = 1+\frac{x+iy}{n} = 1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}, \qquad \varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{y/n}{1+x/n}.$$

Sea n_0 tal que para $n \geqslant n_0$ se verifique que $\operatorname{Re}(w_n) > 0$. Entonces, para $n \geqslant n_0$ resulta que $\varphi_n = \arg(w_n)$. Por otra parte, el módulo de w_n viene dado por:

$$|w_n|^2 = \left|1+\frac{z}{n}\right|^2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}.$$

Como $z_n = (w_n)^n$, tenemos, gracias a la fórmula de De Moivre, que:

$$z_n = (w_n)^n = |w_n|^n(\cos(n\varphi_n) + i\operatorname{sen}(n\varphi_n)) = \left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n =$$

$$= \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}\big(\cos(n\varphi_n) + i\operatorname{sen}(n\varphi_n)\big).$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es:

$$\lim|w_n|^n = \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)\right) = \mathrm{e}^x.$$

Además, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es asintóticamente equivalente a la sucesión $\left\{\dfrac{y/n}{1+x/n}\right\}$. Por tanto

$$\lim\{n\varphi_n\} = \lim\left\{n\frac{y/n}{1+x/n}\right\} = y.$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(w_n)^n = \lim_{n\to\infty}|w_n|^n\big(\cos(n\,\varphi_n) + i\operatorname{sen}(n\,\varphi_n)\big) = \mathrm{e}^x(\cos y + i\operatorname{sen} y).$$

Se define, por tanto, la exponencial de un número complejo $z = x + iy$ como

$$\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\operatorname{sen} y).$$

7.4.2. Ejercicios propuestos

355. Estudia la convergencia de las sucesiones:

i) $z_n = \sqrt[n]{n} + i\,n\,a^n \quad (a\in\mathbb{R}, |a|<1)$ ii) $z_n = \dfrac{2^n}{n} + \dfrac{i\,n}{2^n}$

iii) $z_n = \sqrt[n]{a} + i\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{n} \quad (a>0)$ iv) $z_n = n\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{n} + 5\,i\,\cos\dfrac{1}{n}$

v) $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ vi) $z_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

356. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y sea $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\} \to \varphi$ y $\{|z_n|\} \to \rho$. Justifica que la sucesión $\{z_n\} \to \rho(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi)$.

357. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}+i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.

Sugerencia. Expresa $z_n = |z_n|(\cos\varphi_n + i\operatorname{sen}\varphi_n)$ y usa el ejercicio anterior.

358. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\,\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ es bien conocido.

359. Sea $z\in\mathbb{C}$, con $|z|=1$, $z\neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

7.4.3. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 182 Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

Sugerencia. Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ es bien conocido.

Solución.

$$z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - 1\right) + i\,\sqrt[n]{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + \sqrt[n]{2} - 1\right) =$$

$$= n\left(\sqrt[n]{2}-1\right) + \sqrt[n]{2}\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-1}{\frac{\pi}{2n}} + i\,\sqrt[n]{2}\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}} \to \log 2 + i\frac{\pi}{2}$$

Ejercicio resuelto 183 Sea $z\in\mathbb{C}$, con $|z|=1$, $z\neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

Solución. Siguiendo la sugerencia, supongamos que $\{z^n\}$ converge a un número $w \in \mathbb{C}$. Como $|z^n| = |z|^n = 1$, debe ser $|w| = 1$. Por una parte, es claro que $\{z^{n+1}\} \to w$ y también $\{z^{n+1}\} = z\{z^n\} \to zw$, por tanto debe ser $z = wz$, lo que implica que $(z-1)w = 0$ lo cual es imposible porque $z \neq 1$ y $w \neq 0$. Concluimos que $\{z_n\}$ no converge.

Sea φ un número real que no es un múltiplo entero de π. Pongamos $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$. Tenemos que $z \neq 1$ y $|z| = 1$. Por lo antes visto, la sucesión $\{z^n\} = \{\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no converge. Veamos que esto implica que ninguna de las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$, $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge.

En efecto, de la igualdad:

$$\operatorname{sen}((n+1)\varphi) = \operatorname{sen}(n\varphi)\cos\varphi + \cos(n\varphi)\operatorname{sen}\varphi \longrightarrow \cos(n\varphi) = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\big(\operatorname{sen}((n+1)\varphi) - \operatorname{sen}(n\varphi)\cos\varphi\big)$$

se deduce que si $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, también converge $\{\cos(n\varphi)\}$ y, por tanto, la sucesión $\{\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, lo que es contradictorio.

Análogamente, de la igualdad:

$$\cos((n+1)\varphi) = \cos(n\varphi)\cos\varphi - \operatorname{sen}(n\varphi)\operatorname{sen}\varphi \longrightarrow \operatorname{sen}(n\varphi) = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\big(\cos((n+1)\varphi) - \cos(n\varphi)\cos\varphi\big)$$

se deduce que si $\{\cos(n\varphi)\}$ converge, también converge $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ y, por tanto, la sucesión $\{\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, lo que es contradictorio. ☺

7.5. Demostraciones alternativas de los teoremas de Bolzano y de Weierstrass

Las demostraciones que vimos en el capítulo 4 de los teoremas de Bolzano y de Weierstrass se apoyaban directamente en “primeros principios”, esto es, en la definición de continuidad y en el axioma del supremo. Por eso dichas demostraciones son un poco complicadas y no del todo fáciles de seguir en una primera lectura. Con la ayuda de la teoría desarrollada en este capítulo podemos dar demostraciones más cortas y amigables de dichos teoremas.

7.54 Teorema (Otra demostración del teorema de los ceros de Bolzano). *Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.*

Demostración. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Si dividimos el intervalo $[a, b]$ por un punto $c \in]a, b[$ en dos subintervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, puede ocurrir que $f(c) = 0$ en cuyo caso hemos acabado; en otro caso será $f(c) \neq 0$, por lo que una sola de las desigualdades $f(a)f(c) < 0$, $f(c)f(b) < 0$ tiene que ser cierta, es decir, la función f toma valores de signos opuestos en los extremos de uno de los subintervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ en que hemos dividido el intervalo $[a, b]$. Podemos ahora repetir este proceso partiendo de dicho subintervalo. Esto es lo que hacemos seguidamente.

Pongamos $a_1 = a, b_1 = b$. Dividimos el intervalo $[a_1, b_1]$ por la mitad en dos subintervalos y elegimos aquél en el que la función f toma valores de distinto signo en sus extremos y a este subintervalo le llamamos $[a_2, b_2]$. Repetimos ahora el proceso dividiendo por la mitad el intervalo $[a_2, b_2]$ y obtenemos un intervalo $[a_3, b_3]$ tal que $f(a_3)f(b_3) < 0$. Este proceso o bien se acaba porque en alguna etapa hemos dividido el intervalo por un punto en el que la función f se anula, en cuyo caso ya hemos encontrado un punto de $[a, b]$ donde la función se anula, o bien podemos proseguirlo indefinidamente obteniendo una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ con la propiedad de que $f(a_n)f(b_n) < 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como $f(a_1) > 0$ y $f(b_1) < 0$, fácilmente se sigue que debe ser $f(a_n) > 0$ y $f(b_n) < 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son monótonas y acotadas por lo que convergen. Además, como $b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$, se sigue que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Pongamos $\lim\{a_n\} = \lim\{b_n\} = \alpha$. Como para todo $n\in\mathbb{N}$ es $a \leqslant a_n \leqslant b$, se sigue que $a \leqslant \alpha \leqslant b$. Como f es continua en $[a, b]$, en particular es continua en α por lo que se verifica que:

$$f(\alpha) = f(\lim\{a_n\}) = f(\lim\{b_n\}) = \lim\{f(a_n)\} = \lim\{f(b_n)\}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(a_n) > 0$, se sigue que $f(\alpha) \geqslant 0$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(b_n) < 0$, se sigue que $f(\alpha) \leqslant 0$. Concluimos que $f(\alpha) = 0$. □

La demostración anterior da lugar al método de bisección para calcular (de forma aproximada) raíces de ecuaciones. Dicho método tiene la ventaja de que se programa muy fácilmente y permite controlar el error máximo que se comete así como el número de iteraciones necesarias para lograr una determinada precisión.

7.55 Teorema (**Otra demostración del teorema de Weierstrass**). *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

Demostración. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probaremos primero que f está acotada en $[a, b]$, es decir, que el conjunto imagen $f([a, b])$ está acotado. Razonaremos por contradicción. Si f no está acotada en $[a, b]$ para todo $n\in\mathbb{N}$ tiene que haber algún $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) \geqslant n$. De esta forma obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $[a, b]$ verificando que $f(x_n) \geqslant n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, el teorema de Bolzano–Weierstrass nos dice que $\{x_n\}$ tiene alguna sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente. Pongamos $y_n = \{x_{\sigma(n)}\}$ y sea $\lambda = \lim\{y_n\}$. Como $a \leqslant y_n \leqslant b$ tenemos que $a \leqslant \lambda \leqslant b$. Además, por la continuidad de f debe verificarse que $f(\lambda) = \lim\{f(y_n)\}$. Pero esto es imposible porque al ser $f(y_n) = f(x_{\sigma(n)}) \geqslant \sigma(n) \geqslant n$, se sigue que la sucesión $\{f(y_n)\}$ no está acotada, por lo que no puede ser convergente. Concluimos que necesariamente f está acotada en $[a, b]$.

Una vez que hemos probado que el conjunto $f([a, b])$ está acotado, como evidentemente no es vacío, el axioma del supremo nos dice que hay un número real M que es el mínimo mayorante del mismo, es decir, $M = \sup f([a, b])$. Usando el resultado probado en el ejercicio resuelto 156, se sigue que hay una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de $[a, b]$ tal que $\lim\{f(z_n)\} = M$. La sucesión $\{z_n\}$ está acotada por lo que, en virtud del teorema de Bolzano–Weierstrass, tiene una parcial, $\{z_{\sigma(n)}\}$ convergente. Pongamos $w_n = z_{\sigma(n)}$ y sea $\lim\{w_n\} = c$. Como $a \leqslant w_n \leqslant b$ se tiene que $a \leqslant c \leqslant b$. Por la continuidad de f se tiene que $f(c) = \lim\{f(w_n)\} = \lim\left\{f(z_{\sigma(n)})\right\} = M$. Luego la función f alcanza en $c\in[a, b]$ un máximo absoluto. □

7.6. Continuidad uniforme

Piensa un par de minutos antes de responder a la siguiente pregunta. Supongamos que f es una función continua en un intervalo I. ¿Es cierto que si tomamos valores $x, y \in I$ muy próximos entre sí los correspondientes valores de la función $f(x), f(y)$ también están muy próximos entre sí?

Si tu respuesta ha sido afirmativa, como suele ser, te equivocas. Considera la función continua $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. Los puntos 10^{-10} y 10^{-20} están muy próximos entre sí: $10^{-10} - 10^{-20} < 10^{-10}$, pero $f(10^{-10}) = 10^{10}$ y $f(10^{-20}) = 10^{20}$ están muy distantes entre sí. No hay nada extraño en este comportamiento. A cualquier función continua cuya gráfica tenga una asíntota vertical le pasa lo mismo: hay puntos muy próximos entre sí en los que la función toma valores muy distantes entre sí.

Pero también hay funciones continuas y acotadas que se comportan de forma parecida. Considera la función continua $g:]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Es una función acotada: el mayor valor que toma es 1 y el menor valor que toma es -1, de hecho se tiene que $g(]0,1]) = [-1,1]$. Sea n un número natural. Los puntos $x_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ e $y_n = \frac{1}{2n\pi-\pi/2}$ están, para n suficientemente grande, muy próximos entre sí; de hecho $\{x_n - y_n\} \to 0$. Los valores que toma en ellos la función $g(x_n) = 1$ y $g(y_n) = -1$ distan entre sí 2 unidades (que es la máxima distancia que puede haber entre valores tomados por esta función).

Si lo piensas un poco, te darás cuenta de que en ambos ejemplos este comportamiento se debe a que las funciones f y g "oscilan mucho" en intervalos arbitrariamente pequeños. Conviene precisar la idea de "oscilación en un intervalo".

7.56 Definición. Se define la *oscilación* de una función f en un intervalo J contenido en el dominio de definición de f como:

$$\omega(f,J) = \begin{cases} \sup f(J) - \operatorname{ínf} f(J), & \text{si } f(J) \text{ está acotado;} \\ +\infty, & \text{si } f(J) \text{ no está acotado.} \end{cases}$$

En otros términos: la oscilación de f en J es la longitud del intervalo más pequeño que contiene a $f(J)$.

Para la función $f(x) = 1/x$ se tiene que $\omega\big(f, [1/2n, 1/n]\big) = n$ y $\omega\big(f,]0, 1/n]\big) = +\infty$. Para la función $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ tenemos que $\omega\big(g, [1/(2n\pi + \pi/2), 1/(2n\pi - \pi/2)]\big) = 2$. Estas funciones tienen una oscilación "grande" en intervalos arbitrariamente pequeños. En algunas circunstancias interesa poder controlar el tamaño de la oscilación de una función de manera que dicha oscilación sea menor que una cierta cantidad fijada, $\varepsilon > 0$, en *cualquier* intervalo de longitud menor que un cierto número $\delta > 0$. Las funciones para las que esto puede hacerse cualquiera sea $\varepsilon > 0$, se llaman *uniformemente continuas*.

7.57 Definición. Se dice que una función f es uniformemente continua en un intervalo I si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $\delta > 0$ de manera que siempre que J sea un intervalo contenido en I de longitud menor que δ, se verifica que la oscilación de f en J es menor o igual que ε.

Teniendo en cuenta que $\omega(f,J) \leqslant \varepsilon \iff |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ para todos $x, y \in J$, la definición dada puede expresarse de forma equivalente como sigue.

Una función f es uniformemente continua en un intervalo I si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $\delta > 0$ de manera que siempre que x, y sean puntos de I con $|x - y| \leqslant \delta$, se verifica que $|f(x) - f(y| \leqslant \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} |x-y| \leqslant \delta \\ x, y \in I \end{array}\right\} \longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \tag{7.12}$$

7.58 Observaciones.

- El concepto de "continuidad uniforme" es un concepto global: depende del comportamiento de la función en todo un intervalo. No tiene sentido decir que una función es uniformemente continua en un punto: la continuidad uniforme no es un concepto local.
- Es muy interesante comparar las definiciones de continuidad puntual (4.1) y de continuidad uniforme (7.12). Resulta evidente que la continuidad uniforme en un intervalo I implica la continuidad en todo punto de I: *toda función uniformemente continua en un intervalo es continua en dicho intervalo*.

En general, no es cierto que una función continua en un intervalo I sea uniformemente continua en I como lo prueban los ejemplos dados al principio. Pero hay una situación particular en la que dicha afirmación sí es cierta. Este es el contenido del siguiente teorema. Se trata de un resultado importante en el que pueden destacarse aportaciones de varios matemáticos. Dirichlet ya lo incluyó en sus lecciones de 1862 y en 1872 Heine dio una primera demostración del mismo. Posteriormente Weierstrass, Borel y Lebesgue generalizaron el resultado inicial.

7.59 Teorema (Teorema de Heine). *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua en dicho intervalo.*

Demostración. Razonaremos por contradicción. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que no es uniformemente continua en $[a, b]$. En tal caso debe existir $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ hay puntos $x_\delta, y_\delta \in [a, b]$ con $|x_\delta - y_\delta| \leqslant \delta$ y $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon_0$. En particular, si para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos $\delta_n = \frac{1}{n}$, existirán puntos $x_n, y_n \in [a, b]$ con $|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. La sucesión $\{x_n\}$ está acotada por lo que debe tener una sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, convergente. Sea $\lim\{x_{\sigma(n)}\} = c$. Como $a \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant b$, se tiene que $a \leqslant c \leqslant b$. Como $\{x_n - y_n\} \to 0$, se sigue que $\{y_{\sigma(n)}\} \to c$. Como $c \in [a, b]$ y f es continua en $[a, b]$, f es continua en c, luego tiene que existir $r > 0$ tal que para todo $z \in]c-r, c+r[\cap [a, b]$ se verifica $|f(c) - f(z)| < \varepsilon_0/2$. Por tanto, para $x, y \in]c-r, c+r[\cap [a, b]$ tenemos que $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0$. Como $\{x_{\sigma(n)}\} \to c$ y $\{y_{\sigma(n)}\} \to c$, tiene que existir un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)} \in]c - r, c + r[\cap [a, b]$ por lo que debe ser $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| < \varepsilon_0$, lo que es contradictorio porque $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Capítulo 8

Integral de Riemann

8.1. Introducción

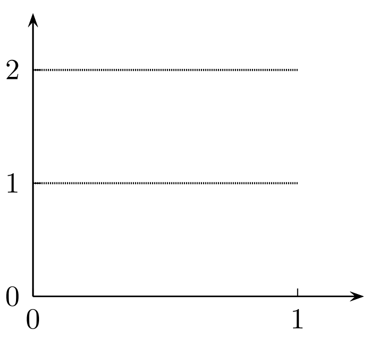
El cálculo integral tiene sus orígenes en los llamados *problemas de cuadraturas*. Inicialmente, en la antigua Grecia, dichos problemas eran geométricos y consistían en construir, siguiendo reglas precisas, un cuadrado con área igual a la de una figura plana dada. En el siglo XVII, con el descubrimiento de nuevas curvas, los aspectos geométricos de estos problemas pasaron a un segundo plano y las técnicas de cálculo ocuparon su lugar, los problemas de cuadraturas pasaron a ser simplemente problemas de cálculo de áreas y de volúmenes. Se atribuye a Eudoxo la invención del método de *exhausción*, una técnica para calcular el área de una región aproximándola por una sucesión de polígonos. Arquímedes perfeccionó este método y, entre otros resultados, calculó el área de un segmento de parábola y el volumen de un segmento de paraboloide, así como el área y el volumen de una esfera.

Sorprende que, siendo tan antiguos sus orígenes, la primera definición matemática de integral no fuera dada hasta el siglo XIX por Augustin Louis Cauchy. Una posible explicación es que, durante los siglos XVII y XVIII, la integración fue considerada como la operación inversa de la derivación; el cálculo integral consistía esencialmente en el cálculo de primitivas. Naturalmente, se conocía la utilidad de las integrales para calcular áreas y volúmenes, pero los matemáticos de la época consideraban estas nociones como dadas de forma intuitiva y no vieron la necesidad de precisar su significación matemática. Los trabajos de Joseph Fourier (1768-1830) sobre representación de funciones por series trigonométricas, hicieron que el concepto de función evolucionara, desde la idea restrictiva de función como fórmula, hasta la definición moderna de función dada por Dirichlet en 1837. Para entender el significado de la integral de estas nuevas funciones más generales se vio la necesidad de precisar matemáticamente los conceptos de área y de volumen.

La definición de la integral de Cauchy seguía la tradicional aproximación del área por rectángulos, en este sentido no era nada original; la novedad estaba en el hecho de considerar a la integral como un objeto matemático merecedor de estudio por sí mismo, y en el propósito de atribuirle un significado independiente de las técnicas que pudieran utilizarse en los cálculos. Este significado propio de la integral remite de forma inevitable a la idea de área. Ningún matemático anterior al siglo XIX había considerado necesario elaborar una teoría matemática del concepto de área; es en dicho siglo cuando el concepto de área adquiere un significado matemático preciso o, mejor dicho, varios significados matemáticos, porque dicho concepto evolucionó hasta que, en la primera década del siglo XX, adquirió esencialmente su forma actual.

Puede que a ti el concepto de área te parezca tan evidente que te resulte extraño que se dedicaran tantos esfuerzos a elaborar una teoría matemática del mismo. Es natural que pienses así. Las regiones planas y los sólidos que usualmente nos interesan para calcular su área o su volumen no son tan complicados que puedan hacernos dudar de si realmente tienen área o volumen: polígonos o poliedros, regiones limitadas por curvas o por superficies que pueden definirse por sus respectivas ecuaciones, todos ellos tiene claramente su área o su volumen y el problema real es calcularlos y no se entiende por qué hay que empeñarse en definirlos. Así pensaban también los matemáticos hasta el siglo XIX. Pero cuando empezaron a considerarse funciones cada vez más generales, las cosas cambiaron mucho. Hay funciones para las que no es evidente que su gráfica determine una región con área. El siguiente ejemplo te ayudará a entender lo que quiero decir.

8.1 Ejemplo. Considera la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ que vale 2 en los números racionales y 1 en los irracionales.



¿Te imaginas cómo es la gráfica de esa función? Parecería como la de la figura: dos segmentos de línea recta, uno de ellos $y=1$ sobre el que tendríamos que marcar solamente los puntos irracionales del mismo, y otro $y=2$ sobre el que tendríamos que marcar los puntos racionales. La región del plano comprendida entre el intervalo $[0,1]$ y la gráfica de f sería el conjunto formado por todos los segmentos verticales de altura 1 levantados sobre los puntos irracionales de $[0,1]$, y por todos los segmentos verticales de altura 2 levantados sobre un punto racional de $[0,1]$. ¿Tiene área este conjunto? Si decidimos que tiene área, su valor ¿es 1? ¿es 2? ¿qué significado tiene la integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$? ♦

Este ejemplo pone claramente de manifiesto que el concepto de área requiere ser precisado matemáticamente. Debes tener claro que se trata de una necesidad teórica que solamente se presenta en el estudio de la integración de funciones muy generales. Para las aplicaciones más usuales del cálculo integral puede valernos perfectamente la idea intuitiva de área o de volumen. La teoría de la integral que actualmente se considera matemáticamente satisfactoria, la llamada integral de Lebesgue, es difícil y, en mi opinión, innecesaria para los estudios de ingeniería; es una teoría imprescindible para los matemáticos y físicos teóricos, pero no lo es para la gran mayoría de los ingenieros.

En este capítulo vamos a considerar la integral desde un punto de vista esencialmente prác-

tico. Nos interesa la integral como herramienta de cálculo y, aunque para ese propósito la integral de Cauchy sería suficiente para nosotros, estudiaremos la integral de Riemann, que es más general sin ser más complicada, y que aporta la ventaja de su gran poder heurístico como tendremos ocasión de comprobar. He reducido la teoría al mínimo indispensable para una correcta comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo cuya demostración se da con detalle, no así las de otros resultados y propiedades de la integral, de fácil comprensión conceptual, cuyas demostraciones, bastante previsibles, no me ha parecido conveniente incluir.

La integración es una de las herramientas más versátiles del Cálculo, sus aplicaciones no se limitan a calcular áreas de regiones planas o volúmenes de sólidos, también se utiliza para calcular longitudes de curvas, centros de masas, momentos de inercia, áreas de superficies, para representar magnitudes físicas como el trabajo, la fuerza ejercida por una presión, o la energía potencial en un campo de fuerzas.

8.2. Aproximaciones al área

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Representaremos por $G(f,a,b)$ la región del plano comprendida entre la gráfica $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$. Llamaremos a dicha región el *conjunto ordenado de f entre a y b*.

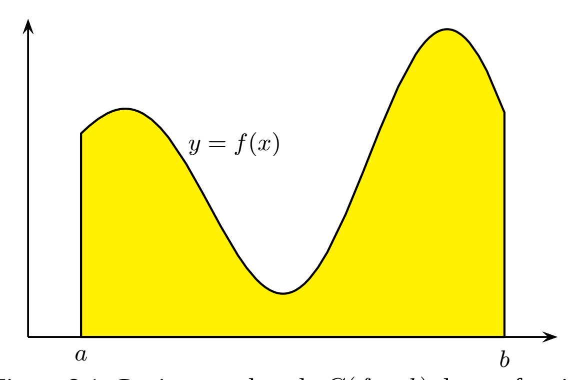


Figura 8.1. Conjunto ordenado $G(f,a,b)$ de una función

Nos proponemos calcular el área de regiones de este tipo. Puesto que, en general, $G(f,a,b)$ no puede descomponerse en triángulos o rectángulos, no hay una *fórmula* que nos permita calcular directamente su área.

En situaciones como esta, una estrategia básica consiste en obtener *soluciones aproximadas que permitan definir el valor exacto del área como límite de las mismas*. Fíjate que, al proceder así, *estamos definiendo dicho valor exacto*, es decir, *estamos dando una definición matemática del concepto intuitivo de área*[1]. Naturalmente, queremos que dicha definición sea lo más general posible, *lo que depende del tipo de soluciones aproximadas que elijamos*. Las aproximaciones consideradas en la teoría de la integral de Lebesgue conducen a un concepto de área muy general. En lo que sigue vamos a considerar las aproximaciones que conducen a la integral de Riemann.

[1]Ello trae como consecuencia inevitable que haya regiones extrañas en el plano que, según la definición dada, no tengan área.

Como los conceptos que vamos a introducir se interpretan con más facilidad cuando la función f es positiva, es conveniente tener bien presente en lo que sigue el siguiente artificio que permite representar cualquier función como diferencia de dos funciones positivas.

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\} \qquad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$. La función f^+ se llama **parte positiva** de f, y la función f^- se llama **parte negativa** de f. Si $f(x) \geqslant 0$ se tiene que $f(x) = f^+(x)$ y $f^-(x) = 0$; mientras que si $f(x) \leqslant 0$ se tiene que $f(x) = -f^-(x)$ y $f^+(x) = 0$. Fíjate que, a pesar de su nombre y de la forma en que se simboliza, la función f^- es una función positiva. También es consecuencia de las definiciones dadas que $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

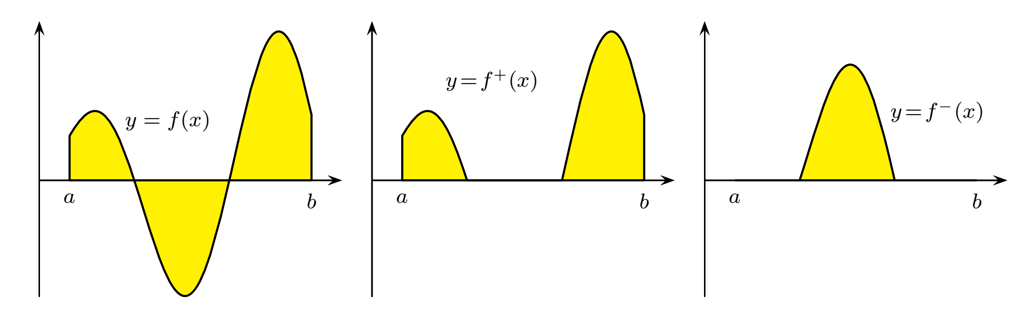


Figura 8.2. Partes positiva y negativa de una función

En la integral de Riemann el área del conjunto $G(f, a, b)$ se aproxima por rectángulos. Para ello, primero se divide el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a, b]$. A continuación se elige en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y se forma el rectángulo cuya base es el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura igual a $f(t_k)$. Finalmente se forma la suma $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

8.2 Definición. Sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, y elijamos un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ en cada uno de los intervalos de la misma. El número:

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama una **suma de Riemann** de f para la partición P.

8.3 Observaciones.

- Fíjate que, como hay libertad para elegir los puntos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, para cada partición fijada P puede haber infinitas sumas de Riemann.

- Cuando la función f *es positiva* y suficientemente "buena", y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $\sigma(f,P)$ es una buena aproximación del área de la región $G(f,a,b)$.

- Observa que el rectángulo de altura igual a $f(t_k)$ está en el semiplano superior si $f(t_k)>0$ y en el semiplano inferior si $f(t_k)<0$. Cuando la función f toma valores positivos y negativos podemos escribir:

$$\begin{aligned}\sigma(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(f^+(t_k)-f^-(t_k))(x_k-x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f^+(t_k)(x_k-x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f^-(t_k)(x_k-x_{k-1}) = \sigma(f^+,P)-\sigma(f^-,P)\end{aligned}$$

En este caso $\sigma(f,P)$ es una aproximación del área de $G(f^+,a,b)$ menos el área de $G(f^-,a,b)$. En la siguiente figura puede apreciarse esta aproximación.

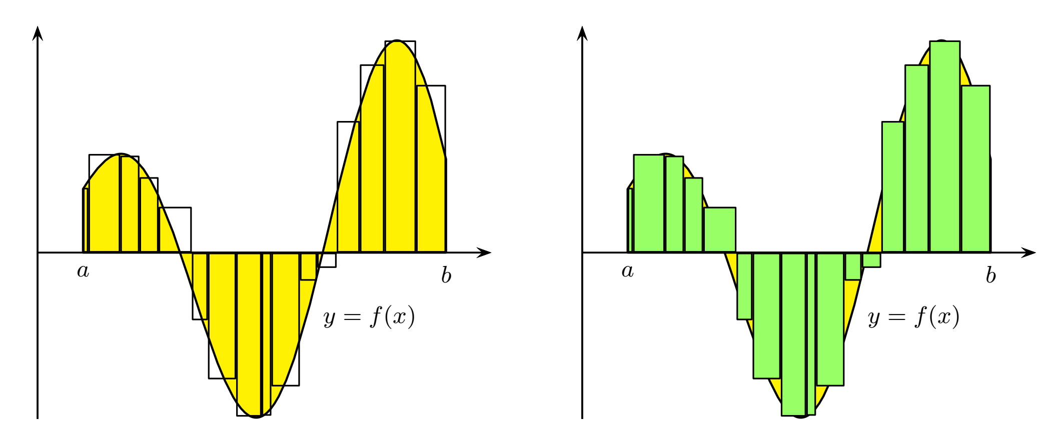


Figura 8.3. Aproximación por sumas de Riemann

8.4 Definición. Dada una partición $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$, definamos $M_k=\sup f[x_{k-1},x_k]$, $m_k=\text{ínf}\, f[x_{k-1},x_k]$. Los números

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1}), \quad I(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, **suma superior** y **suma inferior** de f para la partición P[2].

8.5 Observaciones.

- Puesto que para todo $t_k\in[x_{k-1},x_k]$ es $m_k\leqslant f(t_k)\leqslant M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann, $\sigma(f,P)$, de f para la partición P es $I(f,P)\leqslant\sigma(f,P)\leqslant S(f,P)$.

- Para cada partición hay una única suma superior y otra inferior.

- Cuando f *es positiva* y suficientemente "buena", y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la región $G(f,a,b)$, y el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto* del área de la región $G(f,a,b)$.

[2]Es para definir estas sumas para lo que se precisa que f esté acotada en $[a,b]$.

- Cuando la función f toma valores positivos y negativos, el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de $G(f^+,a,b)$ menos el área de $G(f^-,a,b)$, y el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto* del área de $G(f^+,a,b)$ menos el área de $G(f^-,a,b)$.

En la siguiente figura pueden apreciarse estas aproximaciones.

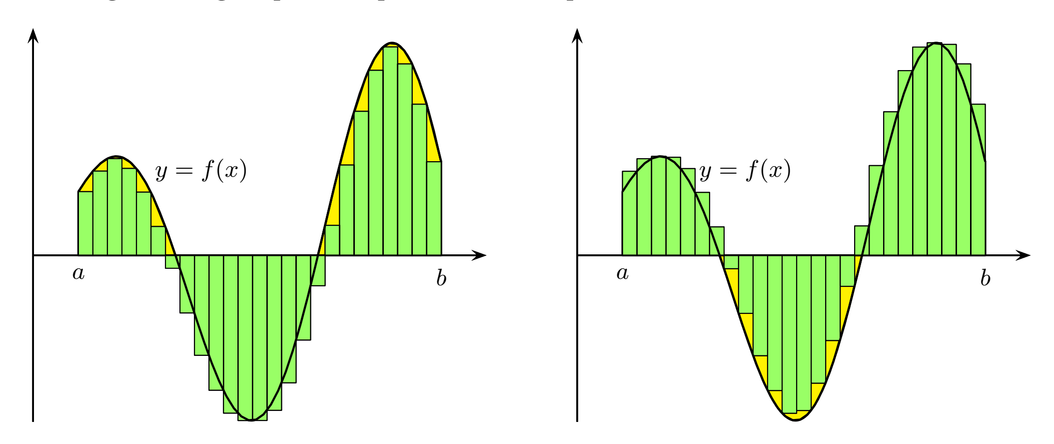


Figura 8.4. Aproximación del área por sumas inferiores y superiores

8.2.1. Definición y propiedades básicas de la integral

Supongamos que la función f es positiva en $[a,b]$. Es claro que, en tal caso, el valor exacto del área de la región $G(f,a,b)$ debe ser un número mayor o igual que toda suma inferior, $I(f,P)$, y menor o igual que toda suma superior $S(f,P)$. Tenemos, en consecuencia, ***dos*** números que son posibles candidatos para el área de $G(f,a,b)$, a saber:

$$\inf\{S(f,P):P\in\mathcal{P}[a,b]\} \quad \text{y} \quad \sup\{I(f,P):P\in\mathcal{P}[a,b]\}.$$

Donde hemos representado por $\mathcal{P}[a,b]$ el conjunto de *todas* las particiones del intervalo $[a,b]$. Llegados aquí, podemos ya dar la definición principal de la teoría de la integral de Riemann.

8.6 Definición. Sea f una función acotada y positiva en $[a,b]$. Se dice que el conjunto $G(f,a,b)$ **tiene área** cuando

$$\inf\{S(f,P):P\in\mathcal{P}[a,b]\}=\sup\{I(f,P):P\in\mathcal{P}[a,b]\}$$

Dicho valor común es, por definición, el valor del área y lo representaremos por $\lambda(G(f,a,b))$. Cuando esto ocurre, se dice también que la función f **es integrable Riemann** en $[a,b]$ y, por definición, la integral de f en $[a,b]$ es igual a $\lambda(G(f,a,b))$. Simbólicamente escribimos:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lambda(G(f,a,b))$$

En el caso general en que la función f toma valores positivos y negativos, se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ cuando lo son las funciones f^+ y f^-, en cuyo caso se define la integral de f en $[a,b]$ como el número:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lambda(G(f^+,a,b))-\lambda(G(f^-,a,b))$$

8.7 Observaciones.

- No te confundas con la notación. El símbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ representa un número. La variable x que figura en él se suele decir que es una *variable muda*. Naturalmente, la letra x no tiene ningún significado especial y puede sustituirse por la que tú quieras o no poner ninguna; por ejemplo:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad \int_a^b f$$

son tres formas de escribir lo mismo. Volveremos sobre esta notación más adelante cuando estudiemos técnicas de integración.

- La definición anterior debes entenderla como una primera aproximación matemática al concepto intuitivo de área. Aunque te pueda parecer extraño, el concepto de área (y de integral) que acabamos de definir es bastante restrictivo.

- En el caso en que la función f toma valores positivos y negativos, observa que la gráfica de f^- se obtiene por simetría respecto al eje de abscisas de las partes de la gráfica de f en las que $f(x) < 0$. Como regiones simétricas respecto de una recta tienen la misma área, se sigue que:

$$\lambda(G(f,a,b)) = \lambda(G(f^+,a,b)) + \lambda(G(f^-,a,b)) = \lambda(G(f^+ + f^-,a,b)) =$$
$$= \lambda(G(|f|,a,b)) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Seamos prácticos. ¿Cómo podemos, a partir de la definición dada, calcular $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$? Una primera idea en este sentido consiste en observar que cuanto mayor sea el número de intervalos de la partición y más pequeña la longitud de cada uno de ellos cabe esperar que la aproximación obtenida sea mejor. Para precisar esta idea, definimos **el paso de una partición** P, y lo representamos por $\Delta(P)$, como *la mayor de las longitudes de los subintervalos de dicha partición*.

8.8 Teorema (Convergencia de las sumas integrales). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable, $\{P_n\}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\{\Delta(P_n)\}\to 0$ y $\sigma(f,P_n)$ una suma de Riemann de f para la partición P_n. Se verifica entonces que:*

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.1}$$

Este resultado permite en algunos casos particulares y con bastante esfuerzo e ingenio calcular ciertas integrales. Como más adelante aprenderemos a calcular integrales con facilidad, es más interesante usar dicho resultado *sensu contrario* para calcular los límites de ciertas sucesiones. Para ello se usa con frecuencia el siguiente corolario.

8.9 Corolario. *Para toda función f integrable en $[0,1]$ se verifica que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.2}$$

Teniendo en cuenta que cualesquiera sean las funciones f, g y los números α, β, se verifica que $\sigma(\alpha f + \beta g, P) = \alpha\sigma(f, P) + \beta\sigma(g, P)$, para toda partición P, se deduce, haciendo uso del teorema 8.8, que la integral es lineal. Esta propiedad, junto con otras propiedades básicas de las integrales se recogen en el siguiente resultado.

8.10 Proposición (Propiedades básicas de la integral).

i) ***Linealidad****. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y α, β son números reales, se verifica que la función $\alpha f + \beta g$ también es integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

ii) ***Conservación del orden****. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces se verifica que:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular, si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \tag{8.3}$$

iii) Si f es integrable en $[a, b]$ también $|f|$ (función valor absoluto de f) es integrable en $[a, b]$ y se verifica la desigualdad:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{8.4}$$

iv) El producto de funciones integrables Riemann también es una función integrable Riemann.

v) ***Aditividad respecto del intervalo****. Sea $a < c < b$. Una función f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, en cuyo caso se verifica la igualdad:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha llegado el momento de preguntarse por condiciones que garanticen que una función es integrable Riemann. Nos vamos a contentar con una respuesta parcial a esta pregunta, que es suficiente para nuestros propósitos.

8.11 Teorema (Condiciones suficientes de integrabilidad Riemann). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Cada una de las siguientes condiciones garantizan que f es integrable Riemann en $[a, b]$.*

i) f está acotada en $[a, b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$. En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo.

ii) f es monótona en $[a, b]$.

Demostración. Según la definición dada, una función f positiva y acotada en un intervalo $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$ cuando las aproximaciones superiores están arbitrariamente próximas de las aproximaciones inferiores al área del conjunto ordenado de f. En otros términos, una función f positiva y acotada en un intervalo $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, hay una partición P_ε de $[a,b]$ tal que $S(f,P_\varepsilon) - I(f,P_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$[3]. Probaremos que las funciones continuas y las funciones monótonas en $[a,b]$ satisfacen esta condición.

Ses $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, entonces sabemos que f está acotada en $[a,b]$. En particular, hay un número M tal que $f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a,b]$. Por tanto la función $M - f$ es continua y positiva en $[a,b]$ y, como las funciones constantes son integrables, la integrabilidad de la función $M - f$ equivale a la integrabilidad de f. Podemos, por tanto, suponer que f es positiva en $[a,b]$. En virtud del teorema 7.59 la función f es uniformemente continua en $[a,b]$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, hay un número $\delta > 0$, tal que para todos $x, y \in [a,b]$ con $|x-y| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Sea P_ε una partición del intervalo $[a,b]$ cuyos subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ tienen longitud menor que δ. En virtud del teorema 4.29 hay puntos $u_k, v_k\ en I_k$ en los que la función f alcanza su valor mínimo y máximo absolutos respectivamente en el intervalo I_k. Tenemos que:

$$S(f,P_\varepsilon) - I(f,P_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \big(f(v_n) - f(u_n)\big)(x_{k-1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n}(x_{k-1} - x_k) = \varepsilon.$$

Lo que prueba que f es integrable en $[a,b]$.

Supongamos ahora que f es continua en $]a,b[$ y acotada en $[a,b]$ pudiendo tener discontinuidades en los extremos del intervalo. Como f está acotada en $[a,b]$, podemos seguir suponiendo, por las mismas razones anteriores, que f es positiva en $[a,b]$. Sea $M > 0$ tal que $f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos un intervalo $[c,d]$ donde $a < c < d < b$ y $c - a < \varepsilon/3M$, $b - d < \varepsilon/3M$. Por la ya demostrado, como f es integrable en $[c,d]$, hay una partición Q de $[c,d]$ tal que $S(f,Q) - I(f,Q) < \varepsilon/3$. Ampliamos dicha partición a una partición del intervalo $[a,b]$ añadiéndole los puntos a y b. Llamemos a la partición de $[a,b]$ así obtenida P_ε. Tenemos que:

$$S(f,P_\varepsilon) - I(f,P_\varepsilon) \leqslant (c-a)M + S(f,Q) - I(f,Q) + (b-d)M < \varepsilon.$$

Lo que prueba que f es integrable en $[a,b]$. Si ahora se suponemos que f está acotada en $[a,b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, llamando $d_1 < d_2 < \cdots < d_p$ a las discontinuidades de f en $[a,b]$, por la ya demostrado la función f es integrable en cada uno de los intervalos $[a,d_1]$, $[d_k, d_{k+1}]$ $(k = 1,2,\dots,p-1)$, $[d_p, b]$. Por tanto f es integrable en la unión de todos ellos, es decir, en $[a,b]$.

Supongamos ahora que f es monótona en $[a,b]$. Podemos suponer que f es creciente, en cuyo caso $f(b) - f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$, por lo que, al igual que hicimos antes, podemos suponer que f es creciente y positiva en $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos una partición P_ε de $[a,b]$ cuyos subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ tengan longitud menor que $\varepsilon/(f(b) - f(a))$. Tenemos

[3] Esta caracterización de la integrabilidad es válida para cualquier función acotada en $[a,b]$ sin necesidad de suponer que sea positiva.

que:

$$S(f,P_\varepsilon)-I(f,P_\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)(x_{k-1}-x_k)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=0}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a))=\varepsilon.$$

Lo que prueba que f es integrable en $[a,b]$. □

En relación con el punto ii) de este teorema, conviene observar que hay funciones monótonas con infinitas discontinuidades.

8.12 Ejemplo. La función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(0)=1$ y $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{E(1/x)}\frac{1}{2^n}$ para todo $x\in]0,1]$, donde $E(1/x)$ indica la parte de entera de $1/x$, es decreciente en $[0,1]$ y tiene discontinuidades en todos los puntos de la forma $\frac{1}{n+1}$ para $n=1,2,\dots$.

Observa que la función viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1;\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, & \frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2};\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, & \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{3};\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n};\\ 1, & x=0;\end{cases}$$

En la figura 8.5 puedes ver su gráfica en la que se han indicado con trazos verticales punteados las discontinuidades de salto de la función. ♦

Un tipo frecuente de funciones integrables son las que se definen a continuación.

8.13 Definición. Se dice que función f es *continua a trozos* en un intervalo $[a,b]$ si hay una partición $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que:

- f es continua en cada intervalo $]x_{i-1},x_i[$, para $i=1,2,\dots,n$.
- f tiene límites laterales finitos en los puntos x_i, $i=0,1,\dots,n$.

Una función continua a trozos en $[a,b]$ tiene un número finito de discontinuidades y está acotada en $[a,b]$, por tanto es integrable en $[a,b]$.

8.14 Corolario. *Seam f y g funciones que coinciden en todos los puntos de un intervalo $[a,b]$ excepto en un número finito de ellos. Entonces se verifica que f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, g es integrable en $[a,b]$, en cuyo caso se verifica que las integrales en $[a,b]$ de ambas funciones coinciden.*

Demostración. Definamos $h=f-g$. La función h es nula en todos los puntos de $[a,b]$ excepto en un conjunto finito de ellos, por tanto, h es una función continua a trozos en $[a,b]$ y, en consecuencia, h es integrable en $[a,b]$. Además, es evidente que $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x=0$ (piensa que

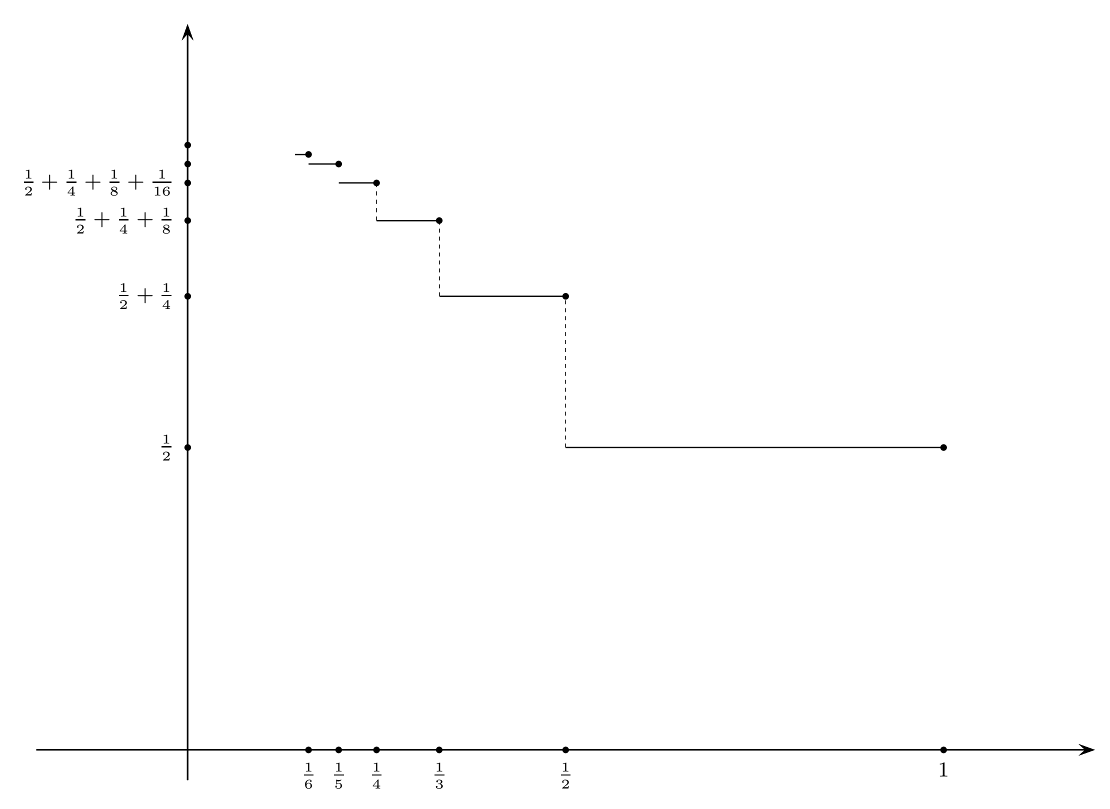


Figura 8.5. Función monótona con infinitas discontinuidades

el conjunto ordenado de h entre a y b es un conjunto finito de segmentos verticales). Si, por ejemplo, f es integrable en $[a,b]$, la igualdad $g=f-h$ implica que también g es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. □

8.15 Observación. El resultado anterior nos dice que, para estudiar la integrabilidad de una función, podemos modificar los valores de la misma en un conjunto finito de puntos porque eso no afecta para nada a su integrabilidad ni al valor de su integral. Igualmente, si una función no está definida en un conjunto finito de puntos de un intervalo, para estudiar su integrabilidad la definimos como queramos en dichos puntos, con la seguridad de que la función resultante será o no integrable con independencia de nuestra definición. En particular, una función continua y acotada en $[a,b]\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, donde los a_j son puntos de $[a,b]$ en los que f no está definida, es integrable en $[a,b]$.

Por ejemplo, la función $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ no está definida en 0. Si queremos estudiar su integrabilidad en $[0,1]$, podemos definir $f(0)=1$ (o el valor que tú quieras); con ello, f es una función continua en $]0,1]$ y acotada en $[0,1]$, por lo que es integrable en $[0,1]$.

8.2.2. El Teorema Fundamental del Cálculo

Dada una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, podemos definir una nueva función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{para todo } x \in [a,b]}$$


Observa que aquí la variable es x – el límite superior de la integral. Por eso, es obligado no usar la misma letra x como variable de la función f en el integrando. $F(x)$ es la integral de la función f en el intervalo $[a,x]$.

Por definición $F(x) = \lambda(G(f^+,a,x)) - \lambda(G(f^-,a,x))$. Por supuesto, si f es positiva entonces $F(x) = \lambda(G(f,a,x))$ es el área del conjunto ordenado de f entre a y x. No debes olvidar en lo que sigue que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ se ha definido en términos de áreas. A la función F la llamaremos *la función área de* f en $[a,b]$.

A veces hay que considerar funciones de la forma $H(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en donde $a < c < b$ y $x \in [a,b]$; por lo que es necesario precisar lo que se entiende por $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ cuando $x < c$. El convenio que se hace es que:

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_v^u f(t)\,\mathrm{d}t$$

cualesquiera sean los números u y v. La justificación de este convenio es que, con él, la igualdad:

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\,\mathrm{d}t + \int_z^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{8.5}$$

se cumple cualesquiera sean los puntos x, y, z del intervalo $[a,b]$. Compruébalo.

Nuestro próximo objetivo va a consistir en invertir el proceso que nos ha llevado de f a $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Nuestro problema es: ¿Cómo podemos recuperar la función f a partir del conocimiento de la función área de f? El resultado que sigue, uno de los más útiles del Cálculo, establece una relación entre dos conceptos aparentemente lejanos entre sí: el concepto de área y el de tangente a una curva, pues dicho resultado afirma que la pendiente de “la curva área de f”, $y = F(x)$, en un punto x es igual a $f(x)$.

8.16 Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.6}$$

para todo $x \in [a,b]$. Entonces:

i) F es continua en $[a,b]$.

ii) En todo punto c de $[a,b]$ en el que f sea continua se verifica que F es derivable en dicho punto siendo $F'(c) = f(c)$. En particular, si f es continua en $[a,b]$, entonces F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración.

i) Como f es integrable debe estar acotada. Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces, si $x < y$ son puntos de $[a,b]$ tenemos que

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(y-x)$$

Por la misma razón, si suponemos que $y < x$, tendremos que $|F(y) - F(x)| \leqslant M(y-x)$. Estas dos desigualdades nos dicen que $|F(y) - F(x)| \leqslant M|y-x|$ para todo par de puntos $x, y \in [a,b]$. De esta desigualdad se sigue inmediatamente la continuidad de F en $[a,b]$.

ii) Pongamos

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) = \frac{F(x)-F(c)-(x-c)f(c)}{x-c} = \frac{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^x f(c)\,\mathrm{d}t}{x-c} = $$
$$= \frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\,\mathrm{d}t}{x-c}$$

Dado, $\varepsilon > 0$, la continuidad de f en c nos dice que hay un $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a,b]$ con $|t-c| < \delta$ se tiene que $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Tomemos ahora un punto cualquiera $x \in [a,b]$ tal que $|x-c| < \delta$. Entonces es claro que para todo t comprendido entre x y c se tendrá que $|t-c| < \delta$ y, por tanto, $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$ por lo que:

$$\left| \int_c^x (f(t)-f(c))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon |x-c|$$

Deducimos que para todo $x \in [a,b]$ tal que $|x-c| < \delta$, y $x \neq c$, se verifica que

$$\left| \frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) \right| = \frac{\left| \int_c^x (f(t)-f(c))\,\mathrm{d}t \right|}{|x-c|} \leqslant \frac{\varepsilon|x-c|}{|x-c|} = \varepsilon$$

Hemos probado que $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$, esto es, F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$. $\square$

8.2.3. Primitivas. Regla de Barrow

8.17 Definición. Dada un función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verifique que $H'(x) = h(x)$ para todo $x \in]a,b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a,b]$.

Es importante advertir que no todas las funciones tienen primitivas. Por ejemplo, una *condición necesaria* que debe cumplir una función para tener primitivas es que dicha función tenga

la propiedad del valor intermedio pues, como recordarás, las funciones derivadas tienen esa propiedad. También, como consecuencia del teorema del valor medio, es inmediato que *dos primitivas de una función en un mismo intervalo se diferencian en una constante*. Por ello, si conocemos una primitiva de una función en un intervalo las conocemos todas.

El siguiente resultado es una consecuencia muy importante del Teorema Fundamental del Cálculo.

8.18 Corolario. *Toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.*

Demostración. Sea f una función continua en un intervalo I. Elijamos un punto $\alpha \in I$. Cualquiera sea $x \in I$ el intervalo de extremos α y x está contenido en I y f es continua en él y por tanto es integrable en él. Podemos por ello definir la función $H : I \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in I$ por $H(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Esta función es derivable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en I. Pues si $[a,b] \subset I$, para todo $x \in [a,b]$ se tiene que:

$$H(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Por tanto, salvo una constante aditiva, la función H coincide en el intervalo $[a,b]$ con la función área de f en $[a,b]$, es decir, con la función $F(x)$ definida por 8.6. Como f es continua en $[a,b]$ (por ser continua en I) el teorema fundamental del cálculo nos dice que F es derivable en todo punto $x \in [a,b]$ y $F'(x) = f(x)$. Deducimos que H es derivable en todo punto $x \in [a,b]$ y $H'(x) = f(x)$.

Finalmente, el hecho de que H sea derivable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en I, implica, por la propiedad local de la derivabilidad, que H es derivable en I y su derivada en todo punto $x \in I$ viene dada por $H'(x) = f(x)$. □

Es importante que aprecies que este *es un resultado de existencia*; es la definición que hemos dado de área – y por consiguiente de integral – lo que nos ha permitido *construir* la función primitiva de f. *La integración es por tanto una herramienta que permite construir una función cuya derivada es conocida*; por eso la integración es una potente herramienta para construir nuevas funciones.

8.19 Estrategia.

- Para derivar funciones de la forma $H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ donde f es una función continua y g es una función derivable, se aplica el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para derivar la función compuesta $H(x) = F(g(x))$, donde $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Para derivar funciones de la forma $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ donde f es una función continua y u, v son funciones derivables, se escribe $H(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ y se aplica lo dicho en el punto anterior.

El Teorema Fundamental del Cálculo proporciona también una técnica para calcular la integral de una *función continua* en un intervalo $[a,b]$. Para ello lo que hacemos es calcular una primitiva de f en $[a,b]$. Si h es una tal primitiva, entonces las funciones $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

y $h(x) - h(a)$ son dos primitivas de f en $[a, b]$ que coinciden en un punto, pues ambas se anulan en a. Deducimos que $F(x) = h(x) - h(a)$ para todo $x \in [a, b]$ y, por tanto, $F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a)$. Podemos generalizar este resultado como sigue.

8.20 Teorema (Regla de Barrow). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y supongamos que h es una primitiva de f en $[a, b]$. Entonces:*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a)$$

Demostración. Sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Aplicando el teorema de valor medio, tenemos que:

$$h(b) - h(a) = \sum_{k=1}^{n}(h(x_k) - h(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sigma(f, P)$$

La igualdad anterior nos dice que para toda partición P de $[a, b]$ hay *alguna* suma de Riemann de f asociada a dicha partición, $\sigma(f, P)$, que es igual a $h(b) - h(a)$. Si ahora tomamos una sucesión $\{P_n\}$ de particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $\Delta(P_n) \to 0$, tenemos que $h(b) - h(a) = \sigma(f, P_n)$ para alguna suma de Riemann, $\sigma(f, P_n)$, de f asociada a la partición P_n. Pero sabemos que $\sigma(f, P_n) \to \int_a^b f$, por lo que obtenemos que $h(b) - h(a) = \int_a^b f$. □

Fíjate que en la regla de Barrow no se supone que f sea continua sino tan sólo que es integrable y que, además, tiene una primitiva.

8.2.4. Las funciones logaritmo y exponencial

Quiero convencerte de que muchas veces el cálculo integral proporciona la interpretación más intuitiva de una función. Considera, por ejemplo, la función logaritmo natural. Quizás sepas expresar $\log 2$ como límite de una sucesión o algo parecido; pero, ¿puedes representar de alguna forma intuitiva el número $\log 2$? ¿Sabrías representar gráficamente el número $\log 2$? En la siguiente gráfica puedes *ver* el número $\log 2$.

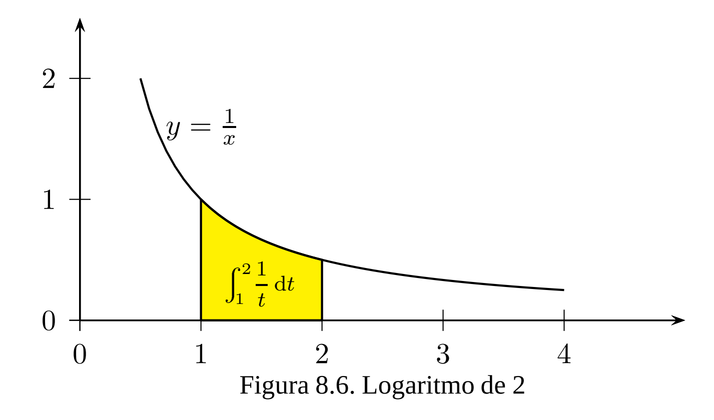


Figura 8.6. Logaritmo de 2

Espero que estés de acuerdo conmigo: la forma más fácil e intuitiva de imaginar el número $\log t$ es como el área de la región plana limitada por la curva $y = 1/x$, las rectas $x = 1$, $x = t$,

y el eje de abscisas. Dicha área se considera positiva si $t > 1$ y negativa si $t < 1$. Dicho de otra forma:

$$\log t = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Es frecuente interpretar esta igualdad de la siguiente forma: la función $\log x$ es derivable y $\log' x = 1/x$; por tanto $\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log t - \log 1 = \log t$. ¡Parece que hemos probado algo! Y no es así porque en este razonamiento estamos usando que la función logaritmo es derivable y eso es algo que no hemos probado. Todavía peor: ni siquiera hemos dado una definición de la función logaritmo que permita probar las propiedades de dicha función. Usualmente se define $\log x$ como el número y que verifica que $\mathrm{e}^y = x$. La *existencia* de ese número y está lejos de ser evidente. El propio número e tiene que ser definido de alguna forma apropiada.

Hago estas reflexiones para que te des cuenta de que lo que conoces de las funciones logaritmo, exponencial, trigonométricas ..., es un conocimiento descriptivo. De estas funciones conoces, porque te lo han dicho, su comportamiento; pero no creo que hayas demostrado sus propiedades. Bueno, no quiero que pienses que tus profesores de bachillerato te ocultan información, lo que ocurre es que una definición de estas funciones que permita probar su existencia y demostrar sus propiedades requiere herramientas matemáticas que no tienen cabida en las enseñanzas medias. Precisamente, el Teorema Fundamental del Cálculo permite definir estas funciones de forma fácil, elegante y correcta.

Olvida ahora todo lo que sepas de la función logaritmo natural. ¿Lo has olvidado ya? Sigamos.

8.21 Definición. La función *logaritmo natural* es la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $t > 0$ por:

$$\log t = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función *logaritmo natural* es *derivable* (y por tanto continua) y que $\log' t = 1/t$. Como la derivada es positiva, deducimos que dicha función es *estrictamente creciente*.

Dado $a > 0$, sea $h(x) = \log(ax)$. Entonces $h'(x) = a/(ax) = 1/x$. Luego la función $h(x) - \log(x)$ tiene derivada nula en $\mathbb{R}^+$, por lo que es constante y, como para $x = 1$ es igual a $\log a$, se sigue que $h(x) - \log(x) = \log a$. Hemos probado así que $\log(ax) = \log a + \log x$ para todo $a > 0$ y para todo $x > 0$.

Observa que en poco más de tres líneas hemos obtenido ya las propiedades principales del logaritmo. Sigamos nuestro estudio.

De lo ya visto se sigue que $\log(2^n) = n\log 2$ para todo número entero n. De aquí se deduce que la función *logaritmo natural* no está mayorada ni minorada y, como es estrictamente creciente, concluimos que $\lim\limits_{x\to 0} \log x = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Por tanto, podemos afirmar que dicha función es una *biyección estrictamente creciente de* $\mathbb{R}^+$ *sobre* $\mathbb{R}$.

Representemos provisionalmente por $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función inversa del logaritmo. Dicha función se llama función *exponencial*. El teorema de derivación de la función inversa nos dice

que φ es derivable y para todo $x\in\mathbb{R}$ es:

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\log'(\varphi(x))}=\varphi(x)$$

Ahora, dados, $x,y\in\mathbb{R}$, sean $a,b,\in\mathbb{R}^+$ tales que $x=\log a$, $y=\log b$. Entonces:

$$\varphi(x+y)=\varphi(\log a+\log b)=\varphi(\log(ab))=ab=\varphi(x)\varphi(y)$$

Hemos probado así que $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$. De esta igualdad se deduce fácilmente que apara todo número racional r se verifica que $\varphi(r)=\varphi(1)^r$. El número $\varphi(1)$ se representa con la letra e, es decir, es el número definido por la igualdad $\log\mathrm{e}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=1$. Con ello para todo número racional r se tiene que $\varphi(r)=\mathrm{e}^r$, por lo que se usa la notación $\varphi(x)=\mathrm{e}^x$ para representar a la función exponencial.

Fíjate con qué facilidad y elegancia hemos obtenido las propiedades principales de las funciones logaritmo natural y exponencial. Quedan así justificados todos los resultados vistos en capítulos anteriores que dependen de dichas propiedades.

Así mismo, podemos *definir* la función *arcotangente* de la forma:

$$\operatorname{arc\,tg}x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Lo que constituye un punto de partida para definir las demás funciones trigonométricas. Este proceso está desarrollado con detalle en [16]. Veremos más adelante otro procedimiento más directo para definir las funciones trigonométricas.

8.3. Integrales impropias de Riemann

Una de las limitaciones de la teoría de la integral de Riemann que hemos desarrollado es que en ella se consideran funciones acotadas en intervalos acotados. Queremos evitar estas limitaciones y considerar funciones no acotadas o intervalos no acotados. Los siguientes ejemplos indican el camino a seguir.

8.22 Ejemplo. La función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no está acotada en el intervalo $]0,1]$. Como $h(x)=2\sqrt{x}$ es una primitiva de f en $[0,1]$, para todo $t\in]0,1]$ se tiene que:

$$\int_t^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=h(1)-h(t)=2-2\sqrt{t}\longrightarrow\lim_{t\to 0}\int_t^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2.$$

Por tanto es natural definir:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2.$$

♦

8.23 Ejemplo. Para todo $\alpha > 0$ se tiene que:

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}) \quad \longrightarrow \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}.$$

Por ello es natural definir:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}.$$

♦

En el primer ejemplo hemos considerado una función no acotada, y en el segundo un intervalo no acotado.

8.24 Definición. Sea $f : [c,b[\to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[c,b[$, donde suponemos que $c\in\mathbb{R}$ y que b un número real mayor que c o bien $b = +\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c,b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b}\int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.7}$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $[c,b[$.

Sea $f :]a,c] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $]a,c]$, donde suponemos que $c\in\mathbb{R}$ y que a un número real menor que c o bien $a = -\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $]a,c]$ como el límite:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.8}$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $]a,c]$.

Cuando el límite (8.7) o (8.8) existe y es igual a $+\infty$ (resp. $-\infty$) se dice que la respectiva integral es positivamente o negativamente divergente.

Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $]a,b[$, donde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Sea $c\in\mathbb{R}$ con $a < c < b$. Se dice que la integral de f es convergente en $]a,b[$ cuando las integrales de f en $]a,c]$ y en $[c,b[$ son convergentes, en cuyo caso se define:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.9}$$

8.25 Observación. Como para todo $u \in]c,b[$ se verifica que:

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^u f(t)\,\mathrm{d}t + \int_u^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

se sigue que la convergencia de la integral de f en $[c,b[$ equivale a la convergencia de la integral de f en $[u,b[$.

8.26 Ejemplo. Sea $a \neq 1$. Se tiene que:

$$\int_1^t \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a}$$

Deducimos que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{a-1} & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases} \tag{8.10}$$

Análogamente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases} \tag{8.11}$$

♦

8.27 Ejemplo. Sea $a \neq 1$. Usando la técnica de integración por partes, que estudiaremos más adelante, es fácil calcular una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x^a}$. Comprueba que:

$$F(x) = \frac{x^{1-a}(-1 + (1-a)\log x)}{(1-a)^2}$$

es una primitiva de f en $\mathbb{R}^+$. Por tanto $\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x = F(t) - F(1)$. En consecuencia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)^2} & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases} \tag{8.12}$$

Análogamente:

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1-a)^2} & \text{si } a < 1 \\ -\infty & \text{si } a > 1 \end{cases} \tag{8.13}$$

♦

8.3.1. Criterios de convergencia para integrales

Naturalmente, no siempre vamos a disponer de una primitiva expresable por medio de funciones elementales, bien porque no exista o porque su cálculo efectivo sea muy complicado. Por ello, interesa conocer condiciones que aseguren la convergencia de una integral sin necesidad de conocer una primitiva elemental. Lógicamente, estas condiciones no nos permitirán calcular el valor numérico de la integral; tan sólo nos dirán si es o no convergente. Consideraremos integrales definidas en intervalos del tipo $[c, b[$ donde $c < b \leqslant +\infty$. Criterios de convergencia análogos se verifican para integrales definidas en intervalos del tipo $]a, c]$ donde $-\infty \leqslant a < c$. El caso en que la función integrando es positiva es particularmente sencillo de estudiar.

8.28 Proposición (Criterio básico de convergencia). *Sea f continua y positiva en $[c,b[$. Entonces, la integral de f en $[c,b[$ es convergente si, y sólo si, la función $F(x)=\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ está mayorada en $[c,b[$, en cuyo caso:*

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\left\{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \,:\, x\in[c,b[\right\}$$

En otro caso la integral de f en $[c,b[$ es positivamente divergente.

Las afirmaciones hechas son consecuencia de que, por ser f positiva en $[c,b[$, la función $F(x)=\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ es creciente en $[c,b[$.

El siguiente criterio es consecuencia inmediata del anterior.

8.29 Proposición (Criterio de comparación). *Sean f y g continuas y positivas en $[c,b[$. Supongamos que la integral de g en $[c,b[$ es convergente y que $f(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in[c,b[$. Entonces la integral de f en $[c,b[$ también es convergente.*

De este criterio se deduce fácilmente el siguiente.

8.30 Proposición (Criterio límite de comparación). *Sean f y g continuas y positivas en $[c,b[$. Supongamos que:*

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\rho\in\mathbb{R}^+.$$

Entonces las integrales de f y g en $[c,b[$ ambas convergen o ambas divergen positivamente.

Demostración. De la hipótesis hecha se deduce que existe un número $u\in]c,b[$ tal que para todo $x\in[u,b[$ se verifica que:

$$\frac{1}{2}\rho\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\frac{3}{2}\rho \quad\Longleftrightarrow\quad g(x)\leqslant 2f(x)\leqslant 3g(x).$$

De estas dos desigualdades se deduce, por el criterio de comparación anterior, que las integrales de f y de g en $[u,b[$ son ambas convergentes o ambas divergen positivamente. Basta tener ahora en cuenta la observación 8.25. □

8.31 Definición. Se dice que la integral de f es **absolutamente convergente** en un cierto intervalo cuando la integral de la función $|f|$ es convergente en dicho intervalo.

Naturalmente, los criterios de convergencia antes vistos para integrales de funciones positivas, pueden usarse para estudiar la convergencia absoluta de la integral de cualquier función. Por ello, el siguiente resultado es de gran utilidad. Para demostrarlo usaremos la siguiente caracterización de la existencia de límite.

8.32 Proposición (Condición de Cauchy para la existencia de límite). *Sea b un número real o bien $b=+\infty$, sea $c<b$ y sea $f:[c,b[\to\mathbb{R}$ una función. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

a) La función f tiene límite finito en b, es decir, $\lim_{x\to b} f(x)=L\in\mathbb{R}$.

b) Para todo $\varepsilon>0$ existe un número $u_\varepsilon\in]c,b[$ tal que para todos $x,y\in]u_\varepsilon,b[$ se verifica que $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Demostración.

$a \longrightarrow b$). Por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $u_\varepsilon \in]c, b[$ tal que para todo $x \in]u_\varepsilon, b[$ se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$. Para $y \in]u_\varepsilon, b[$ también será $|f(y) - L| < \varepsilon/2$. Deducimos que:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - L - (f(y) - L)| \leqslant |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$b \longrightarrow a$). Probaremos que hay un número $L \in \mathbb{R}$ tal que para toda sucesión $\{x_n\} \to b$ se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$. Según sabemos, por la proposición 7.41, esto equivale a que f tenga límite en b igual a L. Sea $\{x_n\} \to b$, para probar que $\{f(x_n)\}$ es convergente probaremos que dicha sucesión verifica la condición de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis hecha, hay un número $u_\varepsilon \in]c, b[$ tal que para todos $x, y \in]u_\varepsilon, b[$ se verifica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Como $\{x_n\} \to c$, existe un número natural m_ε tal que para todo $p \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $x_p \in]u_\varepsilon, c[$. Deducimos que si $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$, entonces $|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$, lo que prueba que la sucesión $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy y, por el teorema de completitud de $\mathbb{R}$, es convergente. Sea $L \in \mathbb{R}$ el límite de $\{f(x_n)\}$. Si ahora consideramos cualquier otra sucesión $\{y_n\} \to b$, el mismo razonamiento anterior prueba que $\{f(y_n)\}$ converge. Debemos probar que su límite también es L. Para ello, basta con observar que, como consecuencia de la hipótesis hecha, la sucesión $\{f(x_n) - f(y_n)\}$ converge a 0, pues para todo n suficientemente grande se tiene que $x_n, y_n \in]u_\varepsilon, b[$, por lo que $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. □

La proposición anterior tiene una versión análoga para el caso de considerar un intervalo del tipo $]a, c]$ con a un número real o $a = -\infty$.

La condición del punto b) de la proposición anterior se llama *condición de Cauchy* para f en b.

8.33 Teorema. *Si la integral de f es absolutamente convergente, entonces la integral de f también es convergente.*

Demostración. Supongamos que la integral de f es absolutamente convergente en $[c, b[$. Pongamos $G(x) = \int_b^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$, $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Por la hipótesis hecha, existe el límite de G en b y es finito. En tal caso, se verifica la condición de Cauchy para G en b. Dado $\varepsilon > 0$, hay un número $u_\varepsilon \in]c, b[$ tal que para todos $x, y \in]u_\varepsilon, b[$ es $|G(x) - G(y)| < \varepsilon$. Teniendo en cuenta la desigualdad:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \right| = |G(x) - G(y)|,$$

se deduce que la función F verifica la condición de Cauchy en b, por lo que dicha función tiene límite finito en b, es decir, la integral de f en $[c, b[$ es convergente. □

8.4. Teoremas del valor medio para integrales

El teorema fundamental del cálculo permite traducir a integrales el teorema del valor medio. Basta observar para ello que, si f es una función continua en un intervalo I y α es un punto

cualquiera de dicho intervalo, podemos aplicar el teorema del valor medio a la función derivable $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en el intervalo I. Según dicho teorema, para cualquier par de puntos $a,b\in I$ se verifica que hay algún punto c comprendido entre a y b tal que:

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c).$$

Pero esta igualdad es lo mismo que:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c) \quad\Longleftrightarrow\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)(b-a).$$

El número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se llama *promedio integral o media integral* de f en $[a,b]$. Con poco esfuerzo podemos obtener un resultado más general.

8.34 Teorema (Primer teorema de la media para integrales). *Sean f una función continua en $[a,b]$ y g una función positiva e integrable en $[a,b]$. Entonces se verifica que hay algún punto $c\in[a,b]$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.14}$$

Demostración. Por el teorema de Weierstrass 4.29,la función f alcanza un valor mínimo, m, y un valor máximo, M, en $[a,b]$. Como $g(x)\geqslant 0$ para todo $x\in[a,b]$, tenemos que:

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)\qquad(\text{para todo } x\in[a,b]).$$

La función fg es integrable en $[a,b]$ por ser producto de funciones integrables. Como la integral conserva el orden entre funciones, se sigue que:

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

De esta desigualdad se sigue que si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$, entonces también es $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$ y la igualdad del enunciado se satisface trivialmente para todo $c\in[a,b]$. En otro caso debe ser $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$ y deducimos que:

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M.$$

Puesto que la imagen por f del intervalo $[a,b]$ es el intervalo $[m,M]$, de la desigualdad anterior se sigue que hay algún $c\in[a,b]$ tal que:

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Como queríamos probar. □

8.35 Teorema (Segundo teorema de la media para integrales). *Sea φ una función monótona y con derivada continua en $[a,b]$, y sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces hay algún punto $c \in [a,b]$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.15}$$

Demostración. Supongamos que φ es decreciente en $[a,b]$ y $\varphi(b) = 0$. Definamos las funciones $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ y $H(x) = F(x)\varphi(x)$. Tenemos que $H'(x) = F'(x)\varphi(x) + F(x)\varphi'(x) = f(x)\varphi(x) + F(x)\varphi'(x)$. Por la regla de Barrow, obtenemos que:

$$\int_a^b \big(f(x)\varphi(x)+F(x)\varphi'(x)\big)\,\mathrm{d}x = H(b)-H(a) = 0 \longrightarrow \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)(-\varphi'(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Como $-\varphi'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$, podemos aplicar a la última integral el primer teorema de la media que asegura que hay algún $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b F(x)(-\varphi'(x))\,\mathrm{d}x = F(c)\int_a^b (-\varphi'(x))\,\mathrm{d}x = F(c)\varphi(a) = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hemos probado así que hay un $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.16}$$

Esta igualdad es un caso particular de la igualdad del enunciado (recuerda que hemos supuesto que $\varphi(b) = 0$). Consideremos ahora que φ es decreciente en $[a,b]$ (no suponemos que $\varphi(b) = 0$). Podemos aplicar la igualdad 8.16 a la función $\varphi - \varphi(b)$ y obtenemos que hay algún $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)(\varphi(x) - \varphi(b))\,\mathrm{d}x = (\varphi(a) - \varphi(b))\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \longrightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(b)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Esto demuestra el teorema para φ decreciente. El caso en que φ sea creciente se reduce al anterior considerando la función $-\varphi$. □

El segundo teorema de la media para integrales es muy útil para estudiar la convergencia no absoluta de integrales impropias pues, en muchos casos, permite probar que se satisface la condición de Cauchy para la existencia de límite. El teorema suele enunciarse con hipótesis mucho más generales, pero las hipótesis con las que lo hemos probado son suficientes para nosotros.

8.5. Derivadas e integrales de funciones complejas de variable real

Una función compleja de variable real es una función de la forma $h(t) = f(t) + ig(t)$ donde f, g son funciones reales definidas en un intervalo I. Se dice que f es la parte real de h y g es la parte imaginaria, y escribimos $f = \operatorname{Re}(h)$, $g = \operatorname{Im}(h)$. Cuando las funciones f y g son derivables, se dice que h es derivable y se define su derivada por la igualdad:

$$h'(t) = f'(t) + ig'(t).$$

Cuando las funciones f y g son integrables en un intervalo $[a, b]$ se dice que h es integrable en $[a, b]$ y se define la integral de h en $[a, b]$ por la igualdad:

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Naturalmente, si F y G son, respectivamente, primitivas de f y g en un intervalo $[a, b]$, entonces $H(t) = F(t) + iG(t)$ es una primitiva de h en $[a, b]$ y se verifica la regla de Barrow:

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = (F(b) - F(a)) + i(G(b) - G(a)) = H(b) - H(a).$$

Análogamente, si f y g son continuas en un intervalo I y elegimos un punto $a \in I$, la función:

$$H(x) = \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

es una primitiva de h en I.

8.36 Ejemplo. Sea $\alpha + i\beta$ un número complejo, la función:

$$h(t) = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{i\beta t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + i\,\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

es derivable y su derivada viene dada por:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta\,\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) + i\big(\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) + \beta\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\big) = \\ &= \mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha + i\beta)\big(\cos(\beta t) + i\operatorname{sen}(\beta t)\big) = (\alpha + i\beta)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{i\beta t} = (\alpha + i\beta)h(t). \end{aligned}$$

Como era de esperar, hemos obtenido que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha + i\beta)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}\,.$$

En consecuencia:

$$\int \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha + i\beta}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} \tag{8.17}$$

♦

En algunos de los siguientes ejercicios deberás calcular algunas primitivas muy sencillas, es un buen momento para que repases las derivadas de las funciones elementales.

8.5.1. Ejercicios propuestos

360. Sea $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x}{x}$. Justifica que f es integrable en $[0,1]$ y se verifica la desigualdad $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}-1$.

361. Sea f una función continua y positiva en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Prueba que $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$.

362. Justifica las desigualdades:

$$a)\ \frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{10+x} < \frac{1}{5};\quad b)\ \frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9\,\mathrm{d}x}{10+x} < \frac{1}{10};\quad c)\ \frac{1}{n+1} < \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Deduce de la última desigualdad que $\mathrm{e}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

363. Calcula la integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ donde $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$, y calcula el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas cuando $x\in[-\pi,\pi]$.

364. Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}},\quad (\alpha>0)$$

$$b)\ x_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}$$

$$c)\ x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$d)\ x_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

$$e)\ x_n=\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}$$

$$f)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)k}{n^3}\qquad g)\ x_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\operatorname{sen}\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$h)\ x_n=\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}\qquad i)\ x_n=\sum_{k=np+1}^{nq}\frac{1}{k}\ \ (p,q\in\mathbb{N},\ p<q)$$

365. Considera la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1/x-E(1/x)$ para $0<x\leqslant 1$, y $f(0)=0$. Prueba que:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\int_t^1\left(\frac{1}{x}-E\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x = 1-\gamma,$$

donde γ es la constante de Euler.

366. Sea f derivable en $[a,b]$ y sea $M>0$ tal que $|f'(x)|\leqslant M$ para todo $x\in[a,b]$. Dado $n\in\mathbb{N}$ sea P la partición de $[a,b]$ definida por los puntos $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$, donde $k=0,1,2,\dots,n$. Pongamos $\alpha=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\dfrac{b-a}{n}$. Prueba que:

$$S(f,P)-\alpha\leqslant M\frac{(b-a)^2}{n},$$

y deduce que:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\right|\leqslant M\frac{(b-a)^2}{n}.$$

367. Calcula las siguientes integrales.

$$a)\ \int_0^1 (x^2-1)^6 2x\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x|\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int_0^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$g)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x}\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x \qquad h)\ \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x+4}\,\mathrm{d}x \qquad i)\ \int_1^2 \frac{2-x}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Todas ellas son inmediatas y se calculan usando la regla de Barrow.

368. Sea f una función continua tal que $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\operatorname{sen}x-x\cos x$. Calcula $f(\pi/2)$ y $f'(\pi/2)$.

369. Sea Sea f una función continua y definamos $F(x)=\displaystyle\int_1^x\left(t\int_1^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$. Calcula $F'(1)$ y $F''(x)$.

370. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$a)\ G(x)=\int_0^{x^3}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t \qquad b)\ G(x)=\int_{x^2}^{1}\mathrm{e}^{\operatorname{sen}t}\,\mathrm{d}t$$

$$c)\ G(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x}\frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad d)\ G(x)=\int_1^{\mathrm{e}^x}\operatorname{sen}(\log t)\,\mathrm{d}t$$

$$e)\ G(x)=\int_0^x\left(\int_1^{y^2}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \qquad f)\ G(x)=\int_0^{\int_1^x\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,\mathrm{d}u}\frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$$

$$g)\ G(x)=\int_{-\mathrm{e}^x}^{\operatorname{sen}^2 x}\cos(\log^2(t^2))\,\mathrm{d}t \qquad h)\ G(x)=\int_0^1\frac{3x^2t^3}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

Sugerencia. Aplica la estrategia 8.19.

371. Calcula todas las funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}$ tales que:

$$f(x)^2 = \int_0^x \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) \mathrm{d}t + 2008.$$

372. Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica la igualdad:

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{t} = \frac{\pi}{4}$$

373. Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0, siendo además $g(0) = 0$. Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(0) = g'(0), \qquad f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad (x \neq 0).$$

¿Es f de clase C^1?

374. Sea $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Estudia los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcula el límite de F en $+\infty$.

375. Sea f la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{si } x \leqslant 1; \\ 2 + x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Estudia la derivabilidad de $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

376. Calcula los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t} \qquad c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{-t^2} - \mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_1^{x^2+1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t} \qquad f)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\operatorname{sen} t + \cos t - 1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

377. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcúlalas cuando sean convergentes.

$$a)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + x + 1}} \qquad b)\ \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{1+x^4}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int_0^1 \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencias. En *a)* hacer $x = 1/t$ y en *d)* $x = \operatorname{tg} t$.

378. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$a)\ \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad b)\ \int_0^1 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x \quad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{x+5}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_1^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \quad e)\ \int_0^1 \log x \log(1-x)\,\mathrm{d}x \quad f)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}(1/x)\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Los criterios de comparación pueden ser útiles.

379. Estudia la convergencia de la integral

$$I = \int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$$

Según los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$.

380. Prueba que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es absolutamente convergente para $p>1$, es convergente pero no absolutamente convergente para $0<p\leqslant 1$ y no es convergente para $p\leqslant 0$.

Sugerencia. Para $0<p\leqslant 1$ usa el segundo teorema de la media.

381. Estudia para qué valores de α y β son convergentes las integrales siguientes.

$$a)\ \int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x \quad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x \quad c)\ \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Utiliza el criterio límite de comparación.

382. Justifica que hay una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable cuya derivada es $f'(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ para todo $x\neq 0$, y $f'(0)=0$.

383. Sea $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(0)=0$, $f(1)=\log 2$ y

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \quad (0\neq x\neq 1).$$

a) Prueba que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\log 2$ y justifica que f es de clase C^1.

Aplicación. Calcula la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,\mathrm{d}t$.

Sugerencia: Sea $g(t)=\dfrac{t-1}{\log t}$. Utiliza el primer teorema de la media para integrales para obtener que si $0<x\neq 1$ hay algún punto $c=c(x)$ comprendido entre x y x^2 tal que:

$$f(x)=g(c)\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

384. Justifica, usando integrales, que para todo $x > 0$ se verifica que:

$$\frac{1}{1+x} < \log(1+x) - \log x < \frac{1}{x}.$$

Dedduce que, dado $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \log p.$$

8.5.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 184 Sea $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x}{x}$. Justifica que f es integrable en $[0,1]$ y se verifica la desigualdad $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e} - 1$.

Solución. Como $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x$ para todo $x \in [0,1]$, se sigue que $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$ para todo $x \in]0,1]$. En consecuencia la función f está acotada y es continua en $[0,1] \setminus \{0\}$. Podemos ahora apoyarnos en la observación 8.15 para concluir que f es integrable en $[0,1]$. Alternativamente, podemos definir $f(0) = 1$ con lo que cual resulta continua en todo el intervalo $[0,1]$. Finalmente, como la integral conserva el orden, tenemos que:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x \quad \forall x \in [0,1] \quad \longrightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$$

☺

Ejercicio resuelto 185 Sea f una función continua y positiva en $[a,b]$ con $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Solución. Sea $x \in [a,b]$. Pongamos $\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$. Como $f(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [a,b]$, se verifica que $\int_x^b f \geqslant 0$, por lo que $0 = \int_a^b f \geqslant \int_a^x f \geqslant 0$. Deducimos que $\int_a^x f = 0$. Como f es continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \int_a^x f$ es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Evidentemente, F' es la función nula, luego $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Alternativamente, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ es derivable con $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, lo que implica que F es creciente en $[a,b]$. Como $F(a) = F(b) = 0$, deducimos que $F(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$, lo que implica que f es la función nula en $[a,b]$. ☺

Ejercicio resuelto 186 Justifica las desigualdades:

$$a)\ \frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{10+x} < \frac{1}{5};\quad b)\ \frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9\,\mathrm{d}x}{10+x} < \frac{1}{10};\quad c)\ \frac{1}{n+1} < \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Deduce de la última desigualdad que $\mathrm{e} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Solución. El resultado obtenido en el ejercicio anterior nos dice que si f es una función continua, positiva y no idénticamente nula en un intervalo $[a,b]$, entonces se verifica que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Las desigualdades propuestas son todas consecuencia de este resultado.

a) Para $0 \leqslant x \leqslant 2$ las funciones $f(x) = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10+x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{10+x} - \dfrac{1}{12}$ son continuas, positivas y no idénticamente nulas en $[0,2]$, luego $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ y $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Esto prueba las desigualdades pedidas.

c) Dado $n \in \mathbb{N}$, para todo $x \in [n, n+1]$ se tiene que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{n}$. Razonando com antes, se sigue que:

$$\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}x < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log\frac{n+1}{n} < \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$$

Lo que prueba la desigualdad del enunciado. Multiplicando por n dicha desigualdad se obtiene:

$$\frac{n}{n+1} < n\log\frac{n+1}{n} = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 1.$$

Por el principio de las sucesiones encajadas, deducimos que $\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to 1$, lo que implica, tomando exponenciales, que $\mathrm{e} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ☺

Ejercicio resuelto 187 Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad (\alpha > 0)$$

$$e)\ x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2}$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$$

Solución. Aplicaremos en cada caso el corolario 8.9.

a) Tenemos que $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\dfrac{k}{n}\right)^\alpha$ que es una suma de Riemann de la función $f(x) = x^\alpha$ para la partición del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Pues, claramente, se tiene que $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})$. Como $\alpha > 0$, la función f es integrable en $[0,1]$, y deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}.$$

e) Podemos escribir:

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

que es una suma de Riemann de la función $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ para la partición del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Como la función f es integrable en $[0,1]$ y $\Delta(P_n) = \frac{1}{n} \to 0$, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \operatorname{arc\,tg} 1 + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}.$$

i) Tomando logaritmos tenemos que:

$$\log(x_n) = \frac{1}{n}\left(\log((2n)!) - \log\left(n!n^n\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\log\left(n!(n+1)\cdots(2n)\right) - n\log n - \log n!\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(2n) - n\log n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n+k}{n} =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Por tanto, la sucesión $y_n = \log(x_n)$ es una suma de Riemann de la función $\log(1+x)$ para la partición del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0,1,\dots,n$. Aplicando el corolario citado al principio, deducimos que:

$$\lim\{y_n\} = \int_0^1 \log(1+x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \log(1+x) \\ dv = dx \end{bmatrix} = x\log(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = 2\log 2 - 1.$$

Luego $\{x_n\} \to \frac{4}{e}$. ☺

Ejercicio resuelto **188** Considera la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x - E(1/x)$ para $0 < x \leqslant 1$, y $f(0) = 0$. Prueba que:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 \left(\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx = 1-\gamma,$$

donde γ es la constante de Euler.

Solución. La función f es continua en todos los puntos de $[0,1]$ excepto en 0 y en los puntos de la forma $\frac{1}{n+1}$ donde $n \in \mathbb{N}$. Claramente $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Por tanto, en cada intervalo $[t,0]$ con $t > 0$ la función f es integrable por estar acotada y tener en dicho intervalo un número finito de discontinuidades. Fijado $0 < t < 1$, sea $n = n(t) \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{n}$. Tenemos que:

$$\int_t^1 f(x)\,dx = \int_t^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,dx\,.$$

Para $\frac{1}{k+1} < x \leqslant \frac{1}{k}$ se tiene que $E(1/x) = k$. Luego, poniendo $\alpha(t) = \int_t^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$, tenemos:

$$\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{x} - k\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \alpha(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\log(k+1) - \log k - k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) =$$

$$= \alpha(t) + \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \alpha(t) + 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$$

Puesto que para $t \to 0 \Rightarrow n(t) \to +\infty$, y $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, se sigue que:

$$0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \left(\frac{1}{n(t)} - t\right) \quad \longrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0.$$

Concluimos que:

$$\lim_{t\to 0} \int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = 1 - \gamma.$$

☺

Ejercicio resuelto **189** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $G(x) = \int_0^{x^3} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ *b)* $G(x) = \int_{x^2}^{1} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t$

c) $G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t$ *d)* $G(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \operatorname{sen}(\log t)\,\mathrm{d}t$

e) $G(x) = \int_0^x \left(\int_1^{y^2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}y$ *f)* $G(x) = \int_0^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u} \frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$

Solución. a) La función $G(x) = \int_0^{x^3} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ puede expresarse como la composición de la función $F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ con la función $h(x) = x^2$. Por el teorema fundamental del cálculo, sabemos que $F'(x) = \cos(x^2)$. Por la regla de la cadena, tenemos que:

$$G'(x) = (F \circ h)'(x) = F'(h(x))h'(x) = F'(x^2)2x = 2x\cos(x^4).$$

c) Observa que en este ejercicio debes considerar que $x \geqslant 0$. Pongamos:

$$G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Definamos $F(x)=\int\limits_0^x \dfrac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t$, $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=x^2+x$. Tenemos que

$$G(x)=F(h(x))-F(g(x))=(F\circ h)(x)-(F\circ g)(x).$$

Como $F'(x)=\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{x^2}}$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $h'(x)=2x+1$, deducimos, al igual que antes, que:

$$G'(x)=F'(h(x))h'(x)-F'(g(x))g'(x)=\frac{2x+1}{2+\sqrt[3]{x^4+2x^3+x^2}}-\frac{1}{2+\sqrt[3]{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

e) Definamos $H(y)=\int\limits_1^{y^2}\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t$. Entonces $G(x)=\int\limits_0^x H(y)\,\mathrm{d}y$. Como la función $H(y)$ es continua, de hecho es derivable, se sigue que $G'(x)=H(x)$.

f) Sea $F(x)=\int\limits_0^x\dfrac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$, $h(x)=\int\limits_1^x\dfrac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u$. Tenemos que $G(x)=(F\circ h)(x)$. Como las derivadas de F y de h son conocidas podemos calcular la derivada de G. Tenemos que:

$$G'(x)=F'(h(x))h'(x)=\frac{1}{h(x)^2+\operatorname{sen}^4 h(x)}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

☺

Ejercicio resuelto **190** Prueba que para todo $x\in[0,\pi/2]$ se verifica la igualdad:

$$\int\limits_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int\limits_0^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}=\frac{\pi}{4}$$

Solución. Definamos $F(x)=\int\limits_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int\limits_0^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}$. Tenemos que:

$$F'(x)=-2\operatorname{sen} x\cos x\arccos(\cos x)+2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)=0.$$

Donde hemos tenido en cuenta que para $x\in[0,\pi/2]$ se tiene que $\operatorname{sen} x\geqslant 0$ y $\cos x\geqslant 0$ por lo que $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}=\operatorname{sen} x$ y $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$. Además, sabemos que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)=x$ para $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ y $\arccos(\cos x)=x$ para $x\in[0,\pi]$. Por tanto ambas igualdades son válidas para $x\in[0,\pi/2]$. Hemos probado así que la derivada de F es nula en el intervalo $[0,\pi/2]$, lo que implica que F es constante en dicho intervalo.

Para terminar, bastará comprobar que algún valor de F es igual a $\pi/4$. Para ello, recordemos que $\operatorname{arc\,sen} x+\arccos x=\pi/2$ para todo $x\in[-1,1]$. Como $\cos^2(\pi/4)=\operatorname{sen}^2(\pi/4)=1/2$, obtenemos fácilmente que $F(\pi/4)=\pi/4$. ☺

Ejercicio resuelto **191** Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0, siendo además $g(0)=0$. Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(0)=g'(0),\qquad f(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x\frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t\quad(x\neq 0).$$

¿Es f de clase C^1?

Solución. Pongamos $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ para $x \neq 0$. Como

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0),$$

definiremos $h(0) = g'(0)$. Con ello, la función h es continua en $\mathbb{R}$. Deducimos que f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y:

$$f'(x) = \frac{x\frac{g(x)}{x} - \int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt}{x^2} = \frac{g(x) - \int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt}{x^2}.$$

La derivada de f es claramente continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Comprobaremos que f es continua en 0 y que su derivada tiene límite en 0, en cuyo caso la proposición 6.19 nos dice que f es de clase C^1. Para calcular el límite de f en 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0) \quad \longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Lo que prueba que f es continua en 0 y, por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$. Para calcular el límite de $f'(x)$ en 0, como g es derivable, podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - \frac{g(x)}{x}}{2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-xg'(x)}{2x^2}.$$

Este último límite no puede calcularse por la regla de L'Hôpital porque no sabemos si g' es derivable. Pensando un poquito, nos damos cuenta de que podemos calcularlo como sigue. La idea es conseguir utilizar la hipótesis de que g es dos veces derivable en 0.

$$\frac{g(x)-xg'(x)}{2x^2} = \frac{g(x)-xg'(0)+xg'(0)-xg'(x)}{2x^2} = \frac{g(x)-xg'(0)}{2x^2} - \frac{g'(x)-g'(0)}{2x}.$$

Para calcular el límite de la primera fracción en 0 podemos aplicar L'Hôpital (o el teorema de Taylor – Young) y tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-xg'(0)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)-g'(0)}{4x} = \frac{1}{4}g''(0).$$

Y $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)-g'(0)}{2x} = \frac{1}{2}g''(0)$. Concluimos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{4}g''(0)$. Por la proposición 6.19, concluimos que f es derivable en 0 con $f'(0) = \dfrac{1}{4}g''(0)$ y, por tanto, f' es continua en 0, luego f es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$. ☺

Ejercicio resuelto **192** Sea $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$. Estudia los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcula el límite de F en $+\infty$.

Solución. Observa que todo lo que se pide en este ejercicio depende del conocimiento de la función derivada de F que podemos calcular fácilmente.

Poniendo $F(x)=\int_0^{2x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\int_0^{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, deducimos que:

$$F'(x)=2\,\mathrm{e}^{-4x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-x^2}\left(2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1\right)\qquad (x\geqslant 0)$$

El signo de F' es el mismo de $2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1$. Tenemos que:

$$2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1\geqslant 0\iff \mathrm{e}^{-3x^2}\geqslant\frac{1}{2}\iff 3x^2\leqslant\log 2\iff |x|\leqslant\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$$

Como consideramos que $x\geqslant 0$, obtenemos que $F'(x)\geqslant$ para $x\in[0,\sqrt{\frac{\log 2}{3}}]$ y $F'(x)\leqslant 0$ para $x\geqslant\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$. Por tanto F es creciente en $[0,\sqrt{\frac{\log 2}{3}}]$ y es decreciente en $[\sqrt{\frac{\log 2}{3}},+\infty[$. Deducimos que en $x_0=\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$ la función F alcanza un valor máximo absoluto en $[0,+\infty[$. No hay otros extremos relativos, además de x_0, porque la derivada solamente se anula en x_0.

Por su definición, se tiene que $F(x)>0$ para todo $x>0$, pues F es la integral de la función continua positiva e^{-t^2} en el intervalo $[x,2x]$. Como $F(0)=0$, resulta que F alcanza en 0 un valor mínimo absoluto.

Calculemos la segunda derivada.

$$F''(x)=-16x\,\mathrm{e}^{-4x^2}+2x\,\mathrm{e}^{-x^2}=2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(1-8\,\mathrm{e}^{-3x^2}\right)\qquad (x\geqslant 0)$$

Se obtiene fácilmente que $F''(x)\leqslant 0$ para $x\in[0,\sqrt{\log 2}]$ y $F''(x)\geqslant 0$ para $x\geqslant\sqrt{\log 2}$. Por tanto, F es cóncava en $[0,\sqrt{\log 2}]$ y convexa en $[\sqrt{\log 2},+\infty[$. Deducimos que F tiene un único punto de inflexión en $x_1=\sqrt{\log 2}$.

Finalmente, como:

$$0\leqslant F(x)=\int_x^{2x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{e}^{-x^2},$$

y $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\mathrm{e}^{-x^2}=0$, obtenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$. ☺

Ejercicio resuelto 193 Calcula los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3}\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen}t\,\mathrm{d}t}\qquad c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{-t^2}-\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{x^2+1}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2}\qquad e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^{x}\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}\qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}(\operatorname{sen}t+\cos t-1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

Solución. Todos ellos se calculan aplicando las reglas de L'Hôpital.

a) $\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\int\limits_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt}{x^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{2x\operatorname{sen}(\sqrt{x^2})}{3x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(|x|)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{2}{3}.$

Observa que $\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{\int\limits_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt}{x^3} = -\frac{2}{3}$, por tanto, no existe el límite en 0 de dicha función.

e) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,e^{x^2}}{2x\,e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

☺

Ejercicio resuelto **194** Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcúlalas cuando sean convergentes.

$$a)\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x+1}} \qquad b)\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx \qquad c)\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

$$d)\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^4}{(x^2+1)^3}\,dx \qquad e)\int\limits_0^{1} \frac{\log x}{x}\,dx \qquad f)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Sugerencias. En *a)* hacer $x = 1/t$ y en *d)* $x = \operatorname{tg} t$.

Solución. En todos los casos, salvo a) y d), podemos calcular una primitiva inmediata que se puede usar para calcular la integral y, de paso, comprobar su convergencia. Antes de hacer a) y d) estudia las técnicas de cálculo de primitivas.

c) $\displaystyle \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int\limits_0^{u} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = 2\lim_{u\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{u} = \pi.$

e) $\displaystyle \int\limits_0^{1} \frac{\log x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0} \int\limits_t^{1} \frac{\log x}{x}\,dx = -\lim_{t\to 0} \frac{1}{2}(\log t)^2 = -\infty.$ ☺

Ejercicio resuelto **195** Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$a)\int\limits_0^{1} \frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad b)\int\limits_0^{1} \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx \qquad c)\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+5}{x^3+x}\,dx$$

Sugerencia. Usa los criterios de comparación.

Solución. Para hacer este ejercicio y los siguientes debes tener presentes los resultados 8.10 y 8.11.

a) Pongamos $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,1]$. La función $f(x)$ es positiva y asintóticamente equivalente a $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ para $x\to 0$. Como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ es convergente, por ser de la forma $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ con $\alpha=\frac{1}{2}<1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente.

c) Pongamos $f(x)=\dfrac{x+5}{x^3+x}$. Es una función positiva para $x\geqslant 0$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,+\infty[$. Para ello estudiaremos la convergencia de las integrales de f en $]0,1]$ y en $[1,+\infty[$. Tenemos las equivalencias asintóticas:

$$f(x)=\frac{x+5}{1+x^2}\frac{1}{x}\sim\frac{5}{x}\quad(x\to 0),\qquad f(x)=\frac{x+5}{x+\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{x^2}\quad(x\to+\infty)$$

Como la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue que la integral de f en $[1,+\infty[$ es convergente.

Como la integral $\int_0^1\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ es positivamente divergente, se sigue que la integral de f en $]0,1]$ es positivamente divergente. Por tanto la integral de f en $]0,+\infty[$ es positivamente divergente. ☺

Ejercicio resuelto **196** Estudia la convergencia de la integral

$$I=\int_0^{+\infty}x^\alpha\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}\,\mathrm{d}x$$

Según los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$.

Solución. Pongamos $f(x)=x^\alpha\dfrac{x+\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}$. Como $|\operatorname{sen}x|<x$ para todo $x>0$, se sigue que $f(x)>0$ para todo $x>0$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,+\infty[$. Para ello estudiaremos la convergencia de las integrales de f en $]0,1]$ y en $[1,+\infty[$. Tenemos las equivalencias asintóticas:

$$x+\operatorname{sen}x\sim 2x\quad\text{y}\quad x-\operatorname{sen}x\sim\frac{1}{3}x^3\quad(x\to 0)\;\longrightarrow\;f(x)\sim 6x^{\alpha-2}\quad(x\to 0)$$

Como la integral $\int_0^1 x^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y sólo si, $\alpha-2>-1$, deducimos que la integral de f en $]0,1]$ es convergente si, y sólo si, $\alpha>1$.

Tenemos también la equivalencia asintótica $f(x)\sim x^\alpha$ para $x\to+\infty$. Como la integral $\int_1^{+\infty}x^\alpha\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y sólo si, $\alpha<-1$, deducimos que la integral de f en $[1,+\infty[$ es convergente si, y sólo si, $\alpha<-1$. Por tanto, la integral de f en $]0,+\infty[$ no converge para ningún valor de α. ☺

Ejercicio resuelto **197** Prueba que la integral $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es absolutamente convergente para $p>1$, es convergente pero no absolutamente convergente para $0<p\leqslant 1$ y no es convergente para $p\leqslant 0$.

Sugerencia. Para $0<p\leqslant 1$ usa el segundo teorema de la media.

Solución. Pongamos $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}$. Como $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x^p}$ y, para $p > 1$ la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue, por el criterio de comparación, que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es absolutamente convergente para $p > 1$.

Supongamos que $0 < p \leqslant 1$. Entonces podemos aplicar el segundo teorema de la media porque la función $\frac{1}{x^p}$ es decreciente en $[1, +\infty[$. Dados $v > u > 1$, dicho teorema afirma que hay algún $c \in [u, v]$ tal que:

$$\int_u^v \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{u^p}\int_u^c \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{v^p}\int_c^v \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Teniendo en cuenta que $\left|\int_a^b \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\right| = |\cos a - \cos b| \leqslant |\cos a| + |\cos b| \leqslant 2$, deducimos que:

$$\left|\int_u^v \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{u^p} + \frac{2}{v^p}.$$

De esta desigualdad se deduce que la función $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t^p}\,\mathrm{d}t$ satisface la condición de Cauchy en $+\infty$. Pues, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $u_\varepsilon > 1$ tal que $\dfrac{2}{u_\varepsilon^p} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (lo que puede hacerse por ser $p > 0$) para obtener que para todos $v > u > u_\varepsilon$ es:

$$|F(u) - F(v)| = \left|\int_u^v \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{u^p} + \frac{2}{v^p} < \varepsilon.$$

Concluimos, por la proposición 8.32, que la función $F(x)$ tiene límite finito en $+\infty$, esto es, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

Para probar que la integral no es absolutamente convergente para $0 < p \leqslant 1$ podemos razonar como sigue. Observa que $\operatorname{sen} x \geqslant 1/\sqrt{2}$ para $x \in [\pi/4, 3\pi/4]$ y, por la periodicidad del seno, también será $\operatorname{sen} x \geqslant 1/\sqrt{2}$ para $x \in [2k\pi + \pi/4, 2k\pi + 3\pi/4]$, donde $k = 0, 1, 2, \dots$. Tenemos que para todo $x \in [2k\pi + \pi/4, 2k\pi + 3\pi/4]$ es:

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2k\pi + 3\pi/4)^p} > \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2k+1)^p\pi^p} > \frac{1}{2\pi^p\sqrt{2}}\frac{1}{(k+1)^p}.$$

Deducimos que:

$$\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{4\pi^p\sqrt{2}}\frac{1}{(k+1)^p}.$$

Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_1^{2n\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{4\pi^p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^p}.$$

Como $0 < p \leqslant 1$ se tiene que $(k+1)^p \leqslant k+1$, luego:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^p} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = H_{n+1} - 1$$

donde $\{H_n\} = \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\}$ es la serie armónica. Sabemos que $\{H_n\} \to +\infty$, por lo que de las dos desigualdades anteriores se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{2n\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x = +\infty \quad\longrightarrow\quad \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Luego la integral no converge absolutamente para $0 < p \leqslant 1$.

Finalmente, si $p \leqslant 0$ se comprueba que la función $F(x)$ no verifica la condición de Cauchy en $+\infty$, por lo que no existe el límite de $F(x)$ en $+\infty$, es decir, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ no es convergente. ☺

Ejercicio resuelto **198** Estudia para qué valores de α y β son convergentes las integrales siguientes.

$$a)\ \int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_0^{1} x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Utiliza el criterio límite de comparación.

Solución. Son integrales de funciones positivas y podemos usar los criterios de comparación.

a) Sabemos que para todo $s < 0$ es $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha\,\mathrm{e}^{sx} = 0$ cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Pongamos $f(x) = x^\alpha\,\mathrm{e}^{\beta x}$. Si $\beta < 0$, sea $s = \beta/2$. Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{sx}} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha\,\mathrm{e}^{sx} = 0.$$

Por tanto, hay algún $u_0 > 1$ tal que para todo $x \geqslant u_0$ se verifica que $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{sx}} \leqslant 1$, esto es, $f(x) \leqslant \mathrm{e}^{sx}$. Como $s < 0$ la integral $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}x$ es convergente y, por el criterio de comparación, deducimos que la integral $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x$ también es convergente.

Si $\beta > 0$ un razonamiento parecido al anterior, prueba que la integral es positivamente divergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Finalmente, si $\beta = 0$ sabemos que la integral converge si, y sólo si, $\alpha < -1$. ☺

Ejercicio resuelto **199** Justifica que hay una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable cuya derivada es $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para todo $x \neq 0$, y $f'(0) = 0$.

Solución. Como la función $h(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $h(0) = 0$ es continua y acotada en $\mathbb{R}^*$ y tiene una única discontinuidad en 0, el Teorema Fundamental del Cálculo implica que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t$$

es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en todo punto $x \neq 0$ con derivada $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Queda probar que f es derivable en 0 con $f'(0) = 0$. La derivada de f en 0 viene dada por el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t}{x}.$$

Dicho límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ (siempre es así cuando calculamos la derivada de una función continua). No puede aplicarse L'Hôpital para calcular dicho límite porque el cociente de las derivadas es justamente $\operatorname{sen}(1/x)$ que no tiene límite en 0. Como queremos probar que dicho límite es 0 el camino obligado es tratar de acotar la integral. Para ello, vamos a hacer primero un cambio de variable. Suponemos en lo que sigue que $x>0$.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} t=1/s,\ \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}s}{s^2} \\ t=x,\ s=1/x,\ t=0,\ s=+\infty \end{bmatrix} = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s = \lim_{u\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s$$

Sea $u>1/x$. Podemos aplicar el segundo teorema de la media para obtener que hay algún punto $c\in[1/x,u]$ tal que:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s = x^2\int_{\frac{1}{x}}^{c}\operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s + \frac{1}{u^2}\int_c^u \operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s\,.$$

Teniendo ahora en cuenta que $\left|\int_a^b \operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s\right| = |\cos b-\cos a|\leqslant 2$, deducimos que para todo $u>1/x$ se verifica que:

$$\left|\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant 2x^2+\frac{2}{u^2} \longrightarrow \left|\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s\right| = \lim_{u\to+\infty}\left|\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant 2x^2 \longrightarrow$$

$$\left|\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t}{x}\right| \leqslant 2x \longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,\mathrm{d}t}{x}=0.$$

Hemos probado así que f es derivable por la derecha en 0 con derivada por la derecha en 0 igual a 0. El mismo razonamiento prueba que f es derivable por la izquierda en 0 con derivada por la izquierda en 0 igual a 0 (alternativamente, puedes usar que f es una función par). Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0)=0$. ☺

Ejercicio resuelto **200** Sea $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(0)=0$, $f(1)=\log 2$ y

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \qquad (0\neq x\neq 1).$$

a) Prueba que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\log 2$ y justifica que f es de clase C^1.

Aplicación. Calcula la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,\mathrm{d}t\,.$

Sugerencia: Sea $g(t)=\dfrac{t-1}{\log t}$. Utiliza el primer teorema de la media para integrales para obtener que si $0<x\neq 1$ hay algún punto $c=c(x)$ comprendido entre x y x^2 tal que:

$$f(x)=g(c)\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Solución. Definamos $g(1)=1$. Con ello, la función g es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Puesto que:

$$f(x)=\int_{x}^{x^2} g(t)\frac{\mathrm{d}t}{t-1},$$

el primer teorema de la media implica que hay algún punto $c=c(x)$ comprendido entre x y x^2 tal que:

$$f(x)=g(c)\int_{x}^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=g(c)(\log|x^2-1|-\log|x-1|)=g(c)\log\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|=g(c)\log(x+1).$$

Puesto que, claramente se verifica que $x\to 1 \Rightarrow c=c(x)\to 1 \Rightarrow g(c)\to g(1)=1$, de la igualdad anterior deducimos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\log 2$. Por otra parte es claro que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ (observa que podemos definir la función $t\mapsto\frac{1}{\log t}$ igual a 0 para $t=0$, con lo que es continua en 0). Resulta así que f es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Tenemos también que para $0\neq x\neq 1$ es:

$$f(x)=-\int_{0}^{x}\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x^2}\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{\log x}+\frac{2x}{\log(x^2)}=\frac{x-1}{\log x}=g(x).$$

Como $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$ y $\lim_{x\to 1} f'(x)=g(1)=1$, deducimos por la proposición 6.19 que f es derivable en todo $\mathbb{R}_o^+$, con $f'(0)=0$, $f'(1)=1$ y f' es continua en $\mathbb{R}_o^+$, es decir, f es de clase C^1.

Finalmente, como f ha resultado ser una primitiva de g en $\mathbb{R}_o^+$, tenemos que:

$$\int_{0}^{1}\frac{t-1}{\log t}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t=f(1)-f(0)=\log 2.$$



8.6. Técnicas de cálculo de Primitivas

8.6.1. Calcular una primitiva...¿Para qué?

Para calcular $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ donde f es una función continua, hay que calcular una primitiva de f, evaluarla en a y en b y hacer la diferencia. Pero, ¿para qué calcular una primitiva? ¿no sabemos ya que una primitiva de f es la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$? Y, naturalmente, cualquier otra será de la forma $F(x)+C$ donde C es una constante. ¿Qué interés tiene entonces el cálculo de primitivas de funciones continuas? Respuesta: desde un punto de vista teórico ninguno. Ahora, si lo que queremos es aplicar la regla de Barrow para calcular el número $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, entonces la primitiva $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ no nos sirve para nada porque si la evaluamos en a y en b y hacemos la diferencia obtenemos una identidad perfectamente inútil para nuestros propósitos. Lo que necesitamos es conocer una primitiva de f que sea realmente evaluable, es decir que al evaluarla en a y en b proporcione valores numéricos.

En otros términos, *el problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la* "primitiva trivial" $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *por medio de funciones elementales*[4] *que permitan una evaluación efectiva de la integral*. Para eso sirven las técnicas de cálculo de primitivas.

Pero no hay que olvidar que, si bien la derivada de una función elemental también es una función elemental, es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales. Esto ocurre, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\sqrt{x^3+1}$, y muchas más. En tales casos la forma más sencilla de representar una primitiva de f es justamente mediante la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ y, para obtener valores concretos de dicha función hay que recurrir a métodos numéricos de cálculo de integrales.

En lo que sigue vamos a considerar algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Para leer lo que sigue necesitas tener papel y un bolígrafo a mano para ir haciendo los ejercicios que se proponen. A calcular primitivas se aprende practicando; la imprescindible agilidad en los cálculos la lograrás haciendo decenas de ejercicios. Fíjate que, en la mayoría de los casos, se trata de ejercicios en los que tan sólo tienes que aplicar una técnica general a un caso particular. Esto es tan *"fácil"* que lo saben hacer los programas de cálculo simbólico, como *Mathematica*, *Derive*, *Mapple* y otros. Cuando se logre fabricar una calculadora de bolsillo que pueda ejecutar estos programas quizás ya no sea imprescindible aprender a calcular primitivas, pero hasta que llegue ese momento sigue siendo necesario que aprendas a calcular primitivas con agilidad. Sería lamentable que, por no saber calcular una primitiva, no puedas resolver una sencilla ecuación diferencial, ni calcular una probabilidad, ni el área de una superficie,... Las aplicaciones del cálculo integral son tan variadas, que el tiempo que dediques a la práctica del cálculo de primitivas será más rentable de lo que ahora puedas imaginar.

Con cada técnica de cálculo de primitivas, se incluyen ejemplos y se proponen ejercicios sencillos para que compruebes si sabes aplicarla. Encontrarás al final una sección de ejercicios resueltos de cálculo de primitivas en la que se dan soluciones detalladas de algunos de los ejercicios propuestos y de otros nuevos.

[4] Las funciones que se obtienen por medio de sumas, productos, cocientes y composiciones a partir de las funciones racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas, se llaman funciones elementales.

8.6.2. Observaciones sobre la notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, suele usarse la notación $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Así, por ejemplo, se escribe $\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \log|x-a|$. Esta notación es algo imprecisa porque no especifica el intervalo en que se considera definida f. En el ejemplo anterior hay que interpretar que la función $\frac{1}{x-a}$ está definida en uno de los intervalos $]-\infty, a[$ o $]a, +\infty[$ y elegir la primitiva correspondiente. Estos pequeños inconvenientes están compensados por la comodidad en los cálculos que proporciona esta notación. Es frecuente también, aunque no lo haremos en lo que sigue (pero mira el ejercicio (387)), añadir una constante arbitraria, C, y escribir $\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \log|x-a| + C$.

La integral de una función en un intervalo, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se llama a veces *"integral definida"* de f (y es un número), y al símbolo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se le llama *"integral indefinida"* o, simplemente, *"integral"* de f (y representa una primitiva cualquiera de f). Aunque esto puede ser confuso, no olvides que, *cuando hablamos de calcular la integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ lo que realmente queremos decir es que queremos calcular una primitiva de f.*

Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración. Esto es muy útil si la función f contiene parámetros. Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y\,\mathrm{d}x$ y $\int x^y dy$.

Te recuerdo también que, si $y = y(x)$ es una función de x, suele usarse la notación $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$ que es útil para mecanizar algunos cálculos pero que no tiene ningún significado especial: es una forma de indicar que y' es la derivada de y respecto a x.

Finalmente, si φ es una función, usamos la notación $\varphi(x)\big|_{x=c}^{x=d}$ o simplemente, $\varphi(x)\big|_c^d$ para indicar el número $\varphi(d)-\varphi(c)$, y la notación $\varphi(x)\big|_{x\to a}^{x\to b}$ para indicar $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) - \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$. Esta notación es cómoda para las integrales impropias.

8.6.3. Primitivas inmediatas

Para calcular primitivas debes ser capaz de reconocer inmediatamente las siguientes primitivas inmediatas. Como ya se ha indicado antes, se omite, por brevedad, la constante de integración. Te recuerdo que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{argsenh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \ \operatorname{argcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \ \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

En la siguiente lista de primitivas inmediatas se supone que $a > 0$ y que las raíces cuadradas toman valores reales, es decir, las funciones radicando son positivas.

Tabla de primitivas inmediatas

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha\in\mathbb{R}, \alpha\neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} \log(f(x)), & \text{si } f(x)>0; \\ \log(-f(x)), & \text{si } f(x)<0. \end{array}\right\} = \log(|f(x)|)$$

$$\int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)}$$

$$\int \operatorname{sen}(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(f(x))$$

$$\int \cos(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(f(x))$$

$$\int \sec(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \log\big|\sec(f(x))+\operatorname{tg}(f(x))\big|$$

$$\int \operatorname{cosec}(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \log\big|\operatorname{cosec}(f(x))-\operatorname{cotg}(f(x))\big|$$

$$\int \sec^2(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}(f(x))$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg}(f(x))$$

$$\int \operatorname{tg}^2(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}(f(x))-f(x)$$

$$\int \operatorname{cotg}^2(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg}(f(x))-f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{f(x)}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-f(x)^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,sen}\frac{f(x)}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \log\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \log\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{a}\sqrt{f(x)^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2-f(x)^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-f(x)^2}}{f(x)}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2+f(x)^2}}{f(x)}\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{argsenh}\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a}$$

8.6.4. Integración por partes

Si u y v son funciones con derivada primera continua en un intervalo, por la regla de derivación para un producto sabemos que: $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Deducimos que la función producto uv es una primitiva de la función $u'v + v'u$, es decir:

$$\int (u'(x)v(x)+u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) \longrightarrow \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Lo que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u\,. \tag{8.18}$$

Por supuesto, esta igualdad podemos usarla para calcular integrales definidas:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.19}$$

Finalmente, si u y v están definidas en un intervalo abierto de extremos $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *y existen los límites* $\lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)$ y $\lim\limits_{x\to b} u(x)v(x)$, entonces la igualdad (8.19) nos dice que las integrales $\int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ ambas convergen o ninguna converge y, cuando son convergentes se verifica que:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.20}$$

Naturalmente, si queremos usar este método para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ lo primero que hay que hacer es expresar $f(x) = u(x)w(x)$ de forma que el cálculo de $v(x)$ por la condición, $v'(x) = w(x)$, es decir la integral $v(x) = \int w(x)\,\mathrm{d}x$, sea inmediata. Tenemos entonces

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.21}$$

Veamos algunas situaciones en las que este método puede aplicarse con éxito.

- Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es inmediata. Por ejemplo, para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$. Entonces conviene tomar $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = w(x) = 1$ en (8.21), con ello resulta que:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

8.37 Ejemplo.

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x \to \mathrm{d}u = \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{array}\right] = x\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = $$
$$x\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

♦

• Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es del mismo tipo que la integral de partida, pero más sencilla, de manera que reiterando el proceso se llega a una integral inmediata. Este es el caso cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica. En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$, y $v'(x) = \mathrm{e}^{ax}$, $v'(x) = \operatorname{sen}(ax)$, $v'(x) = \cos(ax)$.

8.38 Ejemplo.

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = P(x) \to \mathrm{d}u = P'(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \to v = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a} \end{array}\right] = P(x)\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$$

La última integral es *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario. ♦

• Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es parecida a la de partida, de forma que al volver a aplicar el proceso la integral de partida se repite y es posible despejarla de la igualdad obtenida.

8.39 Ejemplo.

$$\int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = \cos(\log x) \to \mathrm{d}u = -\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\log x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{array}\right] =$$

$$= x\cos(\log x) + \int \operatorname{sen}(\log x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(\log x) \to \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\cos(\log x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{array}\right] =$$

$$= x\cos(\log x) + x\operatorname{sen}(\log x) - \int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x$$

deducimos que $\displaystyle\int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\big(\cos(\log x) + \operatorname{sen}(\log x)\big)$. ♦

8.6.4.1. Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n = \int f(x,n)\,\mathrm{d}x$ en la que interviene un parámetro n (con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades. Las expresiones así obtenidas se llaman fórmulas de reducción o de recurrencia y permiten el cálculo efectivo de la integral cuando se particularizan valores del parámetro. Los siguientes ejemplos son ilustrativos de esta forma de proceder.

8.40 Ejemplo.

$$\int (\log x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = (\log x)^n \to \mathrm{d}u = n\dfrac{(\log x)^{n-1}}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{array}\right] = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

♦

8.41 Ejemplo.

$$I_n = \int x^n \,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^n \to \mathrm{d}u = nx^{n-1} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \to v = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{a}(x^n\,\mathrm{e}^{ax} - nI_{n-1})$$

♦

8.42 Ejemplo (Fórmulas de Wallis y de Stirling).

$$\begin{aligned} J_n = \int \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}^{n-1} x \to \mathrm{d}u = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x\cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \to v = -\cos x \end{array}\right] = \\ &= -\cos x\operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \\ &= -\cos x\operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)J_n \end{aligned}$$

Y deducimos fácilmente que $\int \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos x\operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,\mathrm{d}x$. En particular:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Como $I_0 = \pi/2$ e $I_1 = 1$, se deducen fácilmente las igualdades:

$$I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}, \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \quad n = 1, 2, \dots \tag{8.22}$$

Como la sucesión $\{I_n\}$ es decreciente, tenemos que $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, de donde:

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

Por el principio del as sucesiones encajadas, deducimos que $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$. Puesto que:

$$\begin{aligned} 1 \sim \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} &= \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \\ &= \pi\frac{2n+1}{2}\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^2 \sim \pi n\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^2 \end{aligned}$$

Deducimos la llamada fórmula de Wallis:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\right)^2. \tag{8.23}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!} = \frac{\big(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\big)^2}{\sqrt{n}\big(2\cdot 4\cdots(2n)\big)\big(3\cdot 5\cdots(2n-1)\big)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n-1)},$$

deducimos que:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!}. \tag{8.24}$$

Definamos:

$$a_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}.$$

Es de comprobación inmediata que:

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!} = \frac{a_n^2}{\sqrt{2}a_{2n}}$$

Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número $L > 0$ (lo que probaremos después). Entonces también será $\{a_{2n}\} \to L$ y de la igualdad anterior y la (8.24) se deduce que:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} = \frac{a_n^2}{\sqrt{2}a_{2n}} = \frac{L^2}{\sqrt{2}L} = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto $L = \sqrt{2\pi}$. Obtenemos así la fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Que suele escribirse en la forma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n\,\mathrm{e}^{-n}} = 1. \tag{8.25}$$

Se trata de un límite muy útil porque proporciona la equivalencia asintótica para el factorial:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\,\mathrm{e}^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \tag{8.26}$$

Nos queda probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número positivo. Probaremos que es decreciente.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\,\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Tomando logaritmos:

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Usaremos ahora el teorema de Taylor Young. El polinomio de Taylor de orden 3 de la función $\log(1+x)$ en 0 es $x - x^2/2 + x^3/3$. Por tanto.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \tag{8.27}$$

Te recuerdo que usamos la notación de Landau $o(x^3)$ simplemente para indicar que:

$$\lim \frac{o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^3} = 0.$$

En particular, si $\{x_n\} \to 0$ se verificará que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(x_n)}{x_n^3} = 0. \tag{8.28}$$

Usando la igualdad (8.27), deducimos que:

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(n^{-3})\right) - 1 =$$
$$= \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} + no(n^{-3}) + \frac{1}{2}o(n^{-3}) = \frac{1}{12n^2} + o(n^{-2}).$$

Teniendo en cuenta (8.28), deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{12} + \lim_{n\to\infty} \frac{o(n^{-2})}{n^{-2}} = \frac{1}{12}.$$

Por tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant n_0$ se verifica que:

$$0 < k^2 \log \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \longrightarrow 0 < \log \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{1}{6k^2}.$$

Sumando estas desigualdades desde $k = n_0$ hasta $k = n - 1 > n_0$ obtenemos que:

$$\log(a_{n_0}) - \log(a_n) = \sum_{k=n_0}^{n-1} \log \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{1}{6}\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

La sucesión $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ está mayorada porque:

$$1 - \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

De donde se sigue que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$. En consecuencia:

$$\log(a_n) > \log(a_{n_0}) - \frac{1}{3} \longrightarrow a_n > \frac{a_{n_0}}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}.$$

El número $\frac{a_{n_0}}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$ es una constante positiva independiente de n, y esta desigualdad es válida para todo $n \geqslant n_0$. Por otra parte, teniendo en cuenta que para $k \geqslant n_0$ se tiene que:

$$0 < \log \frac{a_k}{a_{k+1}} = \log(a_k) - \log(a_{k+1})$$

lo que nos dice que la sucesión $\{\log(a_{n+n_0})\}$ es decreciente y, por tanto, también es decreciente la sucesión $\{a_{n+n_0}\}$, concluimos que esta sucesión, y por tanto también $\{a_n\}$, converge a un número positivo. ♦

8.6.5. Ejercicios propuestos

385. Calcula las integrales:

$$\int_1^2 \log x \,\mathrm{d}x\,,\ \int s^2\,\mathrm{e}^{2s}\ \mathrm{d}s\,, \qquad \int \operatorname{arc\,sen} x \,\mathrm{d}x\,,\ \int_1^4 \sqrt{t}\log t\,\mathrm{d}t\,,\ \int_1^{\mathrm{e}} (\log x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\,,\ \int \log(x^2+1)\,\mathrm{d}x\,,\ \int_0^{\pi/4} \frac{\vartheta}{\cos^2\vartheta}d\vartheta,\quad \int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\,,\ \int_1^{\mathrm{e}} \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x$$

En los ejercicios de cálculo de primitivas es una buena práctica comprobar los resultados. Además es muy sencillo: basta derivar la primitiva que has obtenido.

386. Calcula las primitivas $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, y $\int \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$. Supuesto que $a>0$, calcula el valor de las integrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$.

387. Explica la aparente contradicción

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{cotg} x \operatorname{tg}' x\,\mathrm{d}x = \operatorname{cotg} x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\operatorname{cotg}' x\,\mathrm{d}x$$
$$= 1 + \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

388. Calcula las integrales siguientes.

$$\int (\log x)^3\,\mathrm{d}x\,,\quad \int x^4\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x\,,\quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,\mathrm{d}x\,,\quad \int \operatorname{sen}^5 x\,\mathrm{d}x$$

388. Prueba las siguientes relaciones de recurrencia.

a) $I_n = \int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\big(\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x + (n-1)I_{n-2}\big)$.

b) $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - I_{n-2}$.

389. Prueba la igualdad:

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} \tag{8.29}$$

Sugerencias: $I_n = \int \dfrac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = I_{n-1} - \int \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$. Ahora:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x & \to & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x & \to & v = \dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \end{bmatrix} = \cdots$$

390. Estudia la convergencia de la integral:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}\,\mathrm{d}x \qquad (n \geqslant 1).$$

Prueba que para $n \geqslant 2$ es $I_n = \dfrac{n-1}{n+2} I_{n-1}$. Calcula I_1, I_2 e I_3.

8.6.6. Integración por sustitución o cambio de variable

Sean $g : J \to \mathbb{R}$ una función con derivada primera continua en un intervalo J y que toma valores en un intervalo I, y f una función continua en I. Sea F una primitiva de f en I, y pongamos $H = F \circ g$. Tenemos, por la regla de la cadena, que $H'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$, es decir, la función H es una primitiva en J de la función $h(t) = f(g(t))g'(t)$. Si c, d son puntos de J, deducimos que:

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = H(d) - H(c) = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de *"fórmula de integración por sustitución o cambio de variable"*. En ella se supone que queremos calcular, por ejemplo, la integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y lo que hacemos es la sustitución $x = g(t)$, con lo que $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$ y se eligen c y d por la condición de que $g(c) = a$, $g(d) = b$. Naturalmente, esto tiene interés cuando la función $f(g(t))g'(t)$ es más fácil de integrar que la función f. Simbólicamente este proceso suele representarse en la forma:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t), & \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t \\ a = g(c), & b = g(d) \end{bmatrix} = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.30}$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución de representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t) \\ \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

En este contexto, es frecuente calcular $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = H(t)$, y escribir $\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(t)$, igualdad que no tiene mucho sentido si no se especifica también la relación entre las variables t y x, escribiendo "$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(t)$ *donde* $x = g(t)$". Desde luego, el conocimiento de $H(t)$ y de la relación $x = g(t)$ es suficiente para calcular integrales definidas de f, pero también podemos *"deshacer el cambio"* para obtener una primitiva de f. Para eso la función g debe ser una biyección de J sobre I con derivada no nula. En tal caso, la función $F(x) = H(g^{-1}(x))$ es una primitiva de f en I. En efecto:

$$\begin{aligned} F'(x) &= H'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = f(g(g^{-1}(x)))g'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = \\ &= f(x)g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x). \end{aligned}$$

No olvides que la fórmula del cambio de variables puede usarse en un sentido (de izquierda a derecha) o en otro (de derecha a izquierda) según convenga.

Puede ocurrir que al hacer un cambio de variable en una integral corriente obtengamos una integral impropia. No hay que preocuparse porque *para estudiar la convergencia de una integral pueden hacerse cambios de variable* biyectivos*: ello no altera la eventual convergencia de la integral ni su valor*.

8.43 Ejemplo. Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = 2\operatorname{tg} t,\ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{\cos^2 t} \\ 2/\sqrt{3} = 2\operatorname{tg}(\pi/6),\ 2 = 2\operatorname{tg}(\pi/4) \end{array}\right] = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{\operatorname{sen} t}\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

♦

8.44 Ejemplo. Un cambio de variable en una integral impropia. Consideremos la integral:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$$

Suponemos que $a < b$. El cambio que hacemos consiste en llevar el intervalo $]-1,1[$ al $]a,b[$ por una biyección del tipo $g(t) = \alpha t + \beta$. Las condiciones $g(-1) = a$, $g(1) = b$ nos dan que $\alpha = (b-a)/2$, $\beta = (b+a)/2$. Con ello:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} x = g(t),\ \mathrm{d}x = \dfrac{b-a}{2} \\ a = g(-1),\ b = g(1) \end{array}\right] = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$$

♦

8.6.7. Ejercicios propuestos

391. Calcula las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \quad x = \arccos t; \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \quad x = \operatorname{arc\,tg} t; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} \quad x = \log t$$

392. Calcula las integrales:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\,,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}},\ \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\log x}},\ \int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\,,\ \int \frac{\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{2x}}{2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

393. Sea $a > 0$. Prueba que si f es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, entonces $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Y si f es una función par, es decir, $f(-x) = f(x)$, entonces $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

8.6.8. Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, *supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q. Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q es* 1. La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas "*fracciones simples*". Estudiaremos dos formas de hacerlo: el método de los coeficientes indeterminados y una variante del mismo conocida como Método de Hermite.

Paso 1. Descomposición del denominador en factores irreducibles

Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado uno y de factores de grado dos irreducibles:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m} \tag{8.31}$$

8.45 Observaciones.

- Esto se dice muy pronto, pero puede ser muy difícil de hacer si no imposible. Afortunadamente, en los casos prácticos esta descomposición o se conoce o es muy fácil de realizar.

- En la descomposición (8.31) cada a_j es una raíz real de orden α_j del polinomio Q, y los factores cuadráticos del tipo $(x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}$ corresponden a raíces complejas conjugadas de orden β_j. Tales factores cuadráticos son irreducibles, es decir, su discriminante es negativo o, lo que es igual, $x^2 + b_j x + c_j > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Paso 2. Descomposición en fracciones

8.6.8.1. Método de los coeficientes indeterminados

Escribimos el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones de la siguiente forma:

- Por cada raíz real a_j de orden α_j escribimos α_j fracciones cuyos numeradores son constantes A_{k_j} que hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x - a_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta α_j.
- Por cada factor cuadrático irreducible $(x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}$ escribimos β_j fracciones cuyos numeradores son de la forma $B_{k_j} x + C_{k_j}$ siendo B_{k_j} y C_{k_j} constantes que hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x^2 + b_j x + c_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta β_j.
- La descomposición es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k_j=1}^{\alpha_j} \frac{A_{k_j}}{(x - a_j)^{k_j}} \right] + \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k_j=1}^{\beta_j} \frac{B_{k_j} x + C_{k_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{k_j}} \right] \tag{8.32}$$

8.6.8.2. Método de Hermite

Escribimos el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m}+\\ &+\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\right)\end{aligned} \tag{8.33}$$

donde $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m,C_1,\ldots,C_m$ son coeficientes que tenemos que determinar y, en la fracción que aparece con una derivada, $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor de $Q(x)$, más la derivada de un cociente que tiene por denominador $Q(x)$ con sus factores disminuidos en una unidad y como numerador un polinomio genérico con coeficientes indeterminados de grado uno menos que el denominador. Observa que *en ambos métodos hay que calcular tantos coeficientes como el grado de Q*.

Paso 3. Determinación de los coeficientes

Tanto en un caso como en otro, se reducen todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), y se iguala a $P(x)$ el numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes A_j,B_j,C_j (y en el método de Hermite también los coeficientes de $F(x)$), cuya resolución nos dará el valor de todos ellos. Naturalmente, en el método de Hermite hay que efectuar la derivada antes de reducir a común denominador.

8.46 Observaciones.

- En ambos métodos tenemos que calcular el mismo número de coeficientes pero en el método de Hermite la obtención del sistema de ecuaciones es más trabajosa debido a la presencia de la derivada.
- A pesar de lo dicho en el punto anterior, cuando hay raíces imaginarias múltiples, lo que da lugar a factores cuadráticos de orden elevado, puede ser interesante aplicar el método de Hermite porque las fracciones simples que aparecen en dicho método son muy fáciles de integrar.

Paso 4. Integración de las fracciones simples

En el método de Hermite, una vez escrita la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma 8.33, es fácil calcular su integral:

$$\begin{aligned}\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{A_1}{x-a_1}\,\mathrm{d}x+\cdots+\int\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}\,\mathrm{d}x+\cdots+\\ &+\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\end{aligned}$$

Sólo nos queda calcular las integrales de las fracciones simples.

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x \;=A\log|x-a|.$
- $\displaystyle\mathbf{I}=\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\,.$

Donde se supone que el trinomio x^2+bx+c no tiene raíces reales. En general, esta integral es igual a un logaritmo más un arcotangente aunque, dependiendo de los valores de los parámetros, puede reducirse a uno de ellos. Si $B\neq 0$, lo primero que debemos hacer es lograr que en el numerador figure la derivada del denominador. Para ello, basta poner $Bx+C=\frac{B}{2}(2x+b)+C-\frac{B}{2}b$. Con lo que, llamando $K=C-\frac{B}{2}b$, tenemos:

$$\mathbf{I}=\frac{B}{2}\log(x^2+bx+c)+K\int\frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\,.$$

La integral que nos queda es un arcotangente. Para calcularla escribimos el trinomio x^2+bx+c en la forma $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2+\beta^2$. Esto es muy fácil de hacer, pues la elección de α es obligada ya que debe ser $\alpha=-b/2$, de donde se sigue que $\beta=\sqrt{4c-b^2}/2$. En otros términos, $\alpha\pm i\beta$ son las raíces complejas del trinomio x^2+bx+c. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \;&=\int\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x \;=\frac{1}{\beta}\int\frac{\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \;=\\ &=\frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\mathbf{I}=\frac{B}{2}\log(x^2+bx+c)+\frac{2C-Bb}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right).$$

En el método de los coeficientes indeterminados aparecen también, cuando hay raíces múltiples, otros dos tipos de fracciones elementales:

- Fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ donde $k\in\mathbb{N}$ y $k\geqslant 2$, correspondientes a raíces reales múltiples, las cuales no ofrecen dificultad pues:

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x \;=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

- Fracciones del tipo $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$ donde $k\in\mathbb{N}$ y $k\geqslant 2$, correspondientes a raíces imaginarias múltiples. La integración de de estas fracciones puede hacerse usando la fórmula de reducción 8.29. Previamente debe hacerse un pequeño ajuste. Escribamos el trinomio x^2+bx+c en la forma $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2+\beta^2$.

$$\begin{aligned}\int\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}\,\mathrm{d}x \;&=\int\frac{Bx+C}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^k}\,\mathrm{d}x \;=\begin{bmatrix}x-\alpha=\beta t\\ \mathrm{d}x\;=\beta\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\\ &=\frac{1}{\beta^{2k}}\int\frac{B\beta t+B\alpha+C}{(1+t^2)^k}\beta\,\mathrm{d}t \;=\frac{B\alpha+C}{\beta^{2k-1}}\int\frac{1}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t+\\ &+\frac{B}{2\beta^{2k-2}}\frac{1}{1-k}\frac{1}{(1+t^2)^{k-1}}.\end{aligned}$$

Ahora ya podemos usar la fórmula de reducción 8.29 para calcular la integral $\int\frac{1}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t\,.$

8.47 Ejemplo. Se trata de calcular $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$. Como hay raíces imaginarias múltiples aplicaremos el método de Hermite.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right)$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es

$$a=0, \qquad b=5/2, \qquad c=0, \qquad d=1, \qquad A=5, \qquad B=-5, \qquad C=0;$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(5/2)x^2+1}{x^2(x^2+1)} + 5\log x - \frac{5}{2}\log(x^2+1).$$

♦

8.48 Ejemplo. Queremos calcular la integral impropia $\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Pongamos $f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)}$, Observa que $f(x) > 0$ para todo $x \geqslant 2$. Además, se verifica la equivalencia asintótica:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^3} \quad (x \to +\infty).$$

Como la integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue, por el criterio límite de comparación, que la integral $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ también es convergente.

Para calcular la integral hallaremos una primitiva de $f(x)$ aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Reduciendo a común denominador obtenemos:

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{-A+(A+B-D)x+(-A-C+D)x^2+(A+B+C)x^3}{x(x-1)(x^2+1)}.$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A-C+D &= 0 \\ A+B-D &= 1 \\ -A &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} A=-1 & B=1 \\ C=0 & D=-1 \end{array}\right.$$

Deducimos que:

$$\int_2^t \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \log\left(2\frac{t-1}{t}\right) - \operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} 2.$$

Por tanto:
$$\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \log 2 - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} 2.$$

♦

8.49 Observación. Cuando se calculan integrales impropias convergentes de funciones racionales, hay que escribir la primitiva obtenida de forma conveniente para que el límite pueda calcularse fácilmente. Observa cómo hemos escrito la primitiva en el ejemplo anterior: hemos agrupado los logaritmos de forma apropiada para calcular el límite. No da igual escribir $\log\left(2\frac{t-1}{t}\right)$, que escribir $\log(t-1)+\log 2-\log t$. En el primer caso, el límite para $t\to+\infty$ resulta inmediato, mientras que, en el segundo caso, puedes equivocarte y creer que dicho límite no existe. Este tipo de ajustes hay que hacerlos con frecuencia.

8.6.9. Ejercicios propuestos

---

394. Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int \frac{2-x^2}{x^3-3x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad b)\ \int \frac{x^4+6x^3-7x^2-4x-3}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x\,, \quad c)\ \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x\,, \quad e)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad f)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

$$g)\ \int \frac{x^2}{(x^4-1)^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad h)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^4)}, \qquad i)\ \int \frac{3x^2+30}{x^4+2x^2-8}\,\mathrm{d}x$$

8.6.10. Integración por racionalización

Acabamos de ver que la primitiva de una función racional siempre puede expresarse mediante funciones elementales. Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales. Se dice entonces que la integral de partida se ha *racionalizado* y esta técnica se conoce como *"integración por racionalización"*. Conviene advertir que los cambios de variable que siguen son los que la práctica ha confirmado como más útiles en general, pero que en muchas ocasiones la forma concreta de la función que queremos integrar sugiere un cambio de variable específico que puede ser más eficaz.

En lo que sigue, representaremos por $R=R(x,y)$ una función racional de dos variables, es decir, un cociente de funciones polinómicas de dos variables. Te recuerdo que una función polinómica de dos variables es una función de la forma $P(x,y)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_{ij}x^i y^j$.

8.6.10.1. Integración de funciones del tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

Las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ donde $R = R(x,y)$ una función racional de dos variables, se racionalizan con el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Con lo que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \tag{8.34}$$

Con ello resulta:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \Big[t = \operatorname{tg}(x/2)\Big] = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

8.50 Ejemplo.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x} = \Big[\operatorname{tg} x/2 = t\Big] = \cdots = \int \frac{t^2-1}{2t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{\log t}{2} = \frac{1}{4\operatorname{tg}^2(x/2)} + \frac{1}{2}\log|\operatorname{tg}(x/2)|.$$

♦

Casos particulares

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *“R es par en seno y coseno”*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \;\mathrm{d}x\,,$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *“R es impar en seno”* y el cambio $\cos x = t$ suele ser eficaz.

• Cuando $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *“R es impar en coseno”* y el cambio $\operatorname{sen} x = t$ suele ser eficaz.

8.51 Ejemplo. Calcular $\mathbf{I} = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Tenemos:

$$\mathbf{I} = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x - \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x + \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x + \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)$$

♦

8.52 Ejemplo.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt$$
$$= \frac{-1}{t} - t = \frac{-1}{\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen} t.$$

♦

8.53 Ejemplo. Sea $\mathbf{I} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$. Se trata de una función par en seno y en coseno. Haciendo $t = \operatorname{tg} x$, obtenemos:

$$\mathbf{I} = \int \frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}\,dt$$

Aplicando el método de Hermite escribimos:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha t+\beta}{t^2+1}\right)$$

Haciendo la derivada y reduciendo a común denominador obtenemos:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} =$$
$$= \frac{A+C+\beta+(B+C-2\alpha+\beta)t+(2A+B+C-2\alpha-\beta)t^2+(B+C-\beta)t^3+(A+B)t^4}{(t+1)(t^2+1)^2}$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} A+C+\beta &= 0 \\ B+C-2\alpha+\beta &= 0 \\ 2A+B+C-2\alpha-\beta &= 1 \\ B+C-\beta &= 0 \\ A+B &= 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} A = 1/4 & B = -1/4 \\ C = 0 & D = -1 \\ \alpha = -1/4 & \beta = -1/4 \end{array}\right.$$

Deducimos que:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4}\log|t+1| - \frac{1}{8}\log(t^2+1) - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} = \frac{1}{4}\log|\operatorname{sen} x+\cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\operatorname{sen} x+\cos x)$$

♦

- Cuando la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea de la forma:

$$\operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(cx+d), \quad \operatorname{sen}(ax+b)\cos(cx+d), \quad \cos(ax+b)\cos(cx+d)$$

puede resolverse la integral usando las fórmulas:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}, \quad \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$

8.54 Ejemplo.

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos x$$

♦

• Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^n x\,\mathrm{d}x$ o $\int \operatorname{cotg}^n x\,\mathrm{d}x$. Se reducen a una con grado inferior separando $\operatorname{tg}^2 x$ o $\operatorname{cotg}^2 x$ y sustituyéndola por $\sec^2 x - 1$ o $\operatorname{cosec}^2 x - 1$.

8.55 Ejemplo.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{tg}^3 x\operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^3 x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^3 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x\operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x + \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \log|\cos x|\end{aligned}$$

♦

8.6.10.2. Integrales del tipo $\int R\big(x, [L(x)]^r, [L(x)]^s, \dots\big)\,\mathrm{d}x$

Donde $L(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ y $r, s, \dots$ son números racionales.

Se racionalizan con el cambio $t^q = L(x)$ donde q es el mínimo común denominador de las fracciones $r, s, \dots$. Pues entonces tenemos que:

$$x = \frac{\delta t^q - \beta}{\alpha - \gamma t^q} = r(t) \tag{8.35}$$

y la integral se transforma en

$$\int R(r(t), t^{rq}, t^{sq}, \dots)r'(t)\,\mathrm{d}t$$

en la que el integrando es una función racional de t.

8.56 Ejemplo. Sea $\mathbf{I} = \int \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/3} \dfrac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$. El cambio de variable $\dfrac{x+1}{x-1} = t^3$ racionaliza la integral pues se tiene que $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, con lo que:

$$\mathbf{I} = -3\int \frac{1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{t+2}{t^2+t+1} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right) + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

donde $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. ♦

8.6.10.3. Integrales binomias

Se llaman así las de la forma

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,\mathrm{d}x$$

donde α, β, γ son números racionales y a, b números reales todos ellos distintos de cero. Haciendo la sustitución

$$x^{\beta}=t, \quad x=t^{\frac{1}{\beta}}, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}$$

la integral se transforma en

$$\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}(a+bt)^{\gamma}\,\mathrm{d}t$$

que es de la forma $\int t^{r}(a+bt)^{\gamma}\,\mathrm{d}t$ donde $r=\dfrac{\alpha+1}{\beta}-1$. Esta integral es del tipo de las consideradas en el apartado anterior cuando el número:

- γ es entero, pues es de la forma $\int R(t,t^{r})\,\mathrm{d}t$
- r es entero, pues es de la forma $\int R\big(t,(a+bt)^{\gamma}\big)\,\mathrm{d}t$
- $\gamma+r$ es entero, pues es de la forma $\displaystyle\int\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\gamma}t^{\gamma+r}\,\mathrm{d}t$

El matemático P.L. Chebyshev probó que si no se da ninguna de estas circunstancias la integral no puede expresarse por medio de funciones elementales.

8.57 Ejemplo. Sea $\mathbf{I}=\int x\sqrt{x^{2/3}+2}\,\mathrm{d}x$. En este caso es $\alpha=1$, $\beta=2/3$, $\gamma=1/2$ y $\dfrac{\alpha+1}{\beta}=3$. Deducimos que la primitiva buscada puede expresarse por funciones elementales. Haciendo $x^{2/3}=t$ obtenemos $\mathbf{I}=\dfrac{3}{2}\int t^{2}\sqrt{t+2}\,\mathrm{d}t$, la cual se racionaliza haciendo $t+2=s^{2}$ ($s>0$), con lo que $\mathbf{I}=3\int(s^{2}-2)^{2}s\,\mathrm{d}s$ que es inmediata. ♦

8.6.10.4. Integrales del tipo $\int R(\mathrm{e}^{x})\,\mathrm{d}x$

Se racionalizan con el cambio $x=\log t$. Un caso particular de este es el de las integrales de la forma $\int R(\cosh x,\operatorname{senh} x)\,\mathrm{d}x$ que también admiten un tratamiento parecido al de las trigonométricas.

8.58 Ejemplo. Sea $\mathbf{I}=\displaystyle\int\frac{2}{\operatorname{senh}x+\operatorname{tgh}x}\,\mathrm{d}x$. Desarrolla los cálculos para comprobar que

$$\mathbf{I}=[x=\log t]=\int\frac{2(1+t^{2})}{(t-1)(1+t)^{3}}\,\mathrm{d}t = \log\left(\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{1}{1+\cosh x}$$

Por otra parte, como la función $\dfrac{2}{\operatorname{senh}x+\operatorname{tgh}x}$ es impar en $\operatorname{senh}x$, también podemos proceder como sigue

$$\mathbf{I}=[t=\cosh x]=\int\frac{2t}{(-1+t)(1+t)^{2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+\cosh x}+\frac{1}{2}\log(-1+\cosh x)-\frac{1}{2}\log(1+\cosh x)$$

Por supuesto, puedes comprobar que las dos primitivas encontradas son de hecho iguales. ♦

8.6.10.5. Integración de funciones del tipo $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Una integral de la forma $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,\mathrm{d}x$ puede racionalizarse por medio de las sustituciones siguientes.

• Si el trinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces reales α y β distintas, entonces se hace:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = [a(x-\alpha)(x-\beta)]^{1/2} = (x-\alpha)\left[\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}\right]^{1/2}$$

Donde, por comodidad, hemos supuesto que $x-\alpha>0$. Deducimos que la sustitución:

$$\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha} = t^2 \ \ (t>0), \quad x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a} = r(t), \tag{8.36}$$

transforma la integral en $\int R\big(r(t), (r(t)-\alpha)t\big)r'(t)\,\mathrm{d}t$ donde el integrando es una función racional de t.

• Si el trinomio ax^2+bx+c no tiene raíces reales, entonces debe ser $ax^2+bx+c>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, en particular $c>0$. La sustitución:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx+\sqrt{c}, \quad x = \frac{b-2t\sqrt{c}}{t^2-a} = g(t), \tag{8.37}$$

transforma la integral en $\int R\big(g(t), tg(t)+\sqrt{c}\big)g'(t)\,\mathrm{d}t$ donde el integrando es una función racional de t.

Las sustituciones anteriores se conocen como *sustituciones de Euler*.

8.59 Ejemplo. Calcula $\displaystyle\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$. Observa que, si $R(x,y) = \dfrac{x}{y^3}$, la integral que nos piden es $\int R(x, \sqrt{7x-10-x^2})\,\mathrm{d}x$ del tipo que acabamos de considerar.

Como $7x-10-x^2 = (x-2)(5-x)$, tenemos que

$$\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \left[x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}\right] = -\frac{6}{27}\int \frac{5+2t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)$$

donde $t = \dfrac{(7x-10-x^2)^{1/2}}{x-2}$. ♦

8.60 Ejemplo. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Haciendo la sustitución $\sqrt{1+x+x^2} = x+t$, es decir $x = \dfrac{t^2-1}{1-2t}$ tenemos:

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[x = \frac{t^2-1}{1-2t}\right] = \int \frac{2}{t^2-2t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{-1}{t}+\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= -\log t + \log|t-2|.$$

Donde $t = \sqrt{1+x+x^2}-x$. ♦

También es posible transformar una integral del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,\mathrm{d}x$ en otra de la forma $\int F(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ donde F es una función racional de dos variables las cuales ya hemos estudiado. Para ello se sigue el siguiente procedimiento.

• Con un primer cambio de variable, de la forma $x = \alpha t + \beta$ que después explicaremos, se transforma la integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,\mathrm{d}x$ en otra de alguna de las formas:

$$\textbf{a)} \int G(t, \sqrt{t^2-1})\,\mathrm{d}t\,, \quad \textbf{b)} \int G(t, \sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t\,, \quad \textbf{c)} \int G(t, \sqrt{1+t^2})\,\mathrm{d}t$$

donde G es una función racional de dos variables. Los cambios de variable respectivos

$$\textbf{a)}\ x = \sec u, \quad \textbf{b)}\ x = \operatorname{sen} u, \quad \textbf{c)}\ x = \operatorname{tg} u$$

convierten las integrales anteriores en otras de la forma $\int F(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ donde F es una función racional de dos variables.

Alternativamente, en el caso **a)** puede hacerse también $x = \cosh u$, y en el caso **c)** $x = \operatorname{senh} u$, lo que transforma dichas integrales en otras del tipo $\int T(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ donde T es una función racional de una variable, que ya han sido estudiadas.

Nos queda por explicar cómo se hace el primer cambio de variable.

• Si el trinomio $h(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces reales $\alpha < \beta$, lo que se hace es transformar dicho trinomio en otro que tenga como raíces -1 y 1. Para ello llevamos -1 a α y 1 a β mediante una función de la forma $\varphi(t) = \lambda t + \mu$. Las condiciones $\varphi(-1) = \alpha$, $\varphi(1) = \beta$, determinan que $\lambda = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$, $\mu = \dfrac{\beta+\alpha}{2}$. Con el cambio

$$x = \varphi(t) = \frac{\beta-\alpha}{2}t + \frac{\beta+\alpha}{2}$$

tenemos que $h(\varphi(t)) = a\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{4}(t^2-1)$. Ahora, si $a > 0$, deducimos que:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,\mathrm{d}x = [x = \varphi(t)] = \int R\left(\varphi(t), \sqrt{a}\frac{(\beta-\alpha)}{2}\sqrt{t^2-1}\right)\frac{\beta-\alpha}{2}\,\mathrm{d}t$$

que es del tipo **a)** anterior. Si $a < 0$, entonces:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,\mathrm{d}x = [x = \varphi(t)] = \int R\left(\varphi(t), \sqrt{-a}\frac{(\beta-\alpha)}{2}\sqrt{1-t^2}\right)\frac{\beta-\alpha}{2}\,\mathrm{d}t$$

que es del tipo **b)** anterior.

• Si el trinomio ax^2+bx+c no tiene raíces reales, entonces debe ser $d = 4ac - b^2 > 0$ y también $a > 0$. Poniendo $\gamma = \dfrac{\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \gamma^2 = \\ &= \gamma^2\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{\gamma}x + \frac{b}{2\sqrt{a}\gamma}\right)^2 + 1\right] = \gamma^2\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{d}}x + \frac{b}{\sqrt{d}}\right)^2 + 1\right]. \end{aligned}$$

El cambio

$$\frac{2a}{\sqrt{d}}x + \frac{b}{\sqrt{d}} = t, \text{ esto es , } x = \frac{\sqrt{d}t - b}{2a} = \phi(t)$$

transforma la integral en

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,)\,\mathrm{d}x \,= [x = \phi(t)] = \int R\big(\phi(t), \gamma\sqrt{t^2 + 1}\big)\frac{\sqrt{d}}{2a}\,\mathrm{d}t$$

que es del tipo **c)** anterior.

Casos particulares

• Las integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$ donde $P(x)$ es una función polinómica pueden resolverse con facilidad por el *método de reducción*. Se procede de la siguiente forma. Escribimos:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}\right) + \frac{C}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio, cuyos coeficientes hay que calcular, de grado una unidad menos que el polinomio $P(x)$ y C es una constante que también hay que calcular. Observa que la igualdad anterior puede escribirse:

$$P(x) = Q'(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax + b) + C$$

y a la derecha queda un polinomio de igual grado que $P(x)$ lo que permite identificar coeficientes. Una vez calculados el polinomio Q y la constante C tenemos que:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x \,= Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} \,+ C\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$$

con lo que todo se reduce a calcular una integral de la forma $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$. Haciendo uso de los cambios antes visto, esta integral, salvo constantes, puede escribirse de alguna de las formas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t \,= \operatorname{arc\,sen}(t), \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\,\mathrm{d}t \,= \operatorname{argsenh}(t), \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}\,\mathrm{d}t \,= \operatorname{argcosh}(t)$$

• Finalmente, las integrales de la forma

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^k\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$$

se reducen a las del tipo anterior con el cambio $x - \alpha = \dfrac{1}{t}$.

8.6.11. Ejercicios propuestos

395. Calcula las integrales:

$$\int \frac{1}{a+b\cos x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 3}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{1-2\cos x}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}, \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(3x+4)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(x+2)}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{1}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$$

396. Calcula, suponiendo que p y q son números enteros, las integrales:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} px\cos qx\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} px\operatorname{sen} qx\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos px\cos qx\,\mathrm{d}x\,.$$

397. Para $x\in\mathbb{R}$, y $n\in\mathbb{N}$, definamos $F(x) = \dfrac{a_o}{2} + \displaystyle\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n} (a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen} kx)$. Prueba que para $-n \leqslant p \leqslant n$ se verifica que:

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos px\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\operatorname{sen} px\,\mathrm{d}x$$

398. Calcula la primitivas:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{(4+x^3)^5}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^{7/2}(1-x^3)^{-2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{\sqrt{x^2+9x}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{1}{2\operatorname{senh} x - \cosh x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})^{-2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{\sqrt{5-8x-4x^2}}{x+5/2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

8.6.12. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 201 Calcula las integrales:

$$a)\ \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx\,, \quad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}\,dx \quad c)\ \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} \quad e)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+yx^2)} \quad f)\ \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+yx^2)}$$

$$g)\ \int x^\alpha (\log x)^n\,dx \quad h)\ \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,dx \quad i)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$$

$$j)\ \int \cos^2(\log x)\,dx \quad k)\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x+x^2}} \quad l)\ \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\rho}$$

$$m)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} \quad n)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} \quad p)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$$

En *c)* se supone que $a > 0$, en *e)* que $y > 0$, en *f)* que $x > 1$, en *g)* que $\alpha\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$, en *l)* que $\rho > 1$.

Solución. *a)* Esta primitiva es inmediata como puedes comprobar haciendo la sustitución $x^3 = t$. Pero debes reconocerla sin necesidad de efectuar dicha sustitución.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(x^3)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{6}.$$

☺

b) Esta primitiva es inmediata como puedes comprobar haciendo la sustitución $x^2 = t$. Pero debes reconocerla sin necesidad de efectuar dicha sustitución.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

☺

c) Se hace con el cambio de variable $x = a\operatorname{sen} t$. Tenemos que:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = a\operatorname{sen} t, & dx = a\cos t\,dt \\ -a = a\operatorname{sen}\frac{-\pi}{2}, & a = a\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\end{bmatrix} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\,a\cos t\,dt =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,dt = \big(-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2 \Rightarrow \cos t \geqslant 0\big) =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = a^2\frac{\pi}{2}.$$

8.61 Observación. Al realizar un cambio de variable es importante elegir de forma apropiada el nuevo intervalo de integración. Con frecuencia, hay varias posibilidades. Por ejemplo, en la integral anterior podríamos haber procedido como sigue:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = a\,\mathrm{sen}\,t,\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \\ -a = a\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2},\ a = a\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,a\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t = \big(\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2 \Rightarrow \cos t \leqslant 0\big) =$$

$$= -a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\frac{\pi}{2}.$$

Si en los cálculos anteriores te olvidas de que $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, y pones $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ el resultado que hubiéramos obtenido es el siguiente:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = -a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = -a^2\frac{\pi}{2}.$$

Evidente disparate, porque la integral de una función positiva $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ no puede ser un número negativo.

☺

d) Pongamos $\alpha = \sqrt{1+y^2}$. Tenemos que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{\alpha}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

e) En esta integral la variable de integración es x, por lo que tratamos a y como un parámetro (una constante que puede tomar distintos valores). Tenemos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{1+(\sqrt{y}x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}}.$$

☺

f) En esta integral la variable de integración es y, por lo que tratamos a x como un parámetro. Es la integral de una función racional en y. La descomposición en fracciones simples corresponde a dos raíces reales simples:

$$\frac{1}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{A}{1+y}\frac{B}{1+yx^2} = \frac{A(1+yx^2)+B(1+y)}{(1+y)(1+yx^2)}.$$

Por tanto debe verificarse la identidad:

$$1 = A(1+yx^2) + B(1+y).$$

• Haciendo $y=-1$, obtenemos $1=A(1-x^2)\longrightarrow A=\dfrac{1}{1-x^2}$.

• Igualando términos independientes, obtenemos $A+B=1\longrightarrow B=-\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Tenemos para $t>0$:

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)}=\frac{1}{1-x^2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}y}{1+y}-\frac{x^2}{1-x^2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}y}{1+yx^2}=$$
$$=\frac{1}{1-x^2}\log(1+t)-\frac{1}{1-x^2}\log(1+tx^2)=\frac{1}{1-x^2}\log\frac{1+t}{1+tx^2}.$$

Por tanto:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)}=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)}=\frac{2\log x}{x^2-1}.$$

☺

g) Pongamos $I(\alpha,n)=\int x^\alpha(\log x)^n\,\mathrm{d}x$. Si $\alpha=-1$ entonces:

$$I(-1,n)=\int\frac{1}{x}(\log x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}.$$

Supondremos que $\alpha\neq-1$. Para calcular esta primitiva lo que haremos será obtener una fórmula de recurrencia que permita calcular dicha primitiva para valores concretos de α y de n. Tenemos que:

$$I(\alpha,n)=\begin{bmatrix} u=(\log x)^n\to\ \mathrm{d}u=n\dfrac{(\log x)^{n-1}}{x}\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x^\alpha\,\mathrm{d}x\to v=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{bmatrix}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)^n-\frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha(\log x)^{n-1}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)^n-\frac{n}{\alpha+1}I(\alpha,n-1).$$

Esta relación de recurrencia permite calcular $I(\alpha,n)$ en n pasos, pues $I(\alpha,0)$ es conocido. ☺

h) Para calcular la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x$ usaremos la regla de Barrow. Para ello, debemos obtener una primitiva de la función $\dfrac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$. Se trata de una función racional. Una raíz del denominador es $x=-1$. Dividiendo el denominador por $x+1$ tenemos que $x^3-3x^2+x+5=(x+1)(x^2-4x+5)$. Como el trinomio x^2-4x+5 no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+5}\longrightarrow x-1=A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x+1)$$

• Haciendo $x=-1$ obtenemos que $-2=10A$, luego $A=-\frac{1}{5}$.

• Igualando coeficientes en x^2 obtenemos que $A+B=0$, luego $B=\frac{1}{5}$.

• Igualando términos independientes obtenemos $-1 = 5A + C = -1 + C$, luego $C = 0$.

$$\int_0^t \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int_0^t \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_0^t \frac{x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{5}\log(1+t) + \frac{1}{5}\int_0^t \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{5}\log(1+t) + \frac{1}{10}\int_0^t \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{5}\int_0^t \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{5}\log(1+t) + \frac{1}{10}\log(t^2-4t+5) - \frac{1}{10}\log 5 + \frac{2}{5}\int_0^t \frac{1}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{5}\log\frac{\sqrt{t^2-4t+5}}{1+t} - \frac{1}{10}\log 5 + \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(t-2) - \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(-1) =$$

$$= \frac{1}{5}\log\frac{\sqrt{t^2-4t+5}}{1+t} - \frac{1}{10}\log 5 + \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(t-2) + \frac{\pi}{10}.$$

Deducimos que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\log 5 + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10} =$$

$$= \frac{1}{10}(3\pi - \log 5).$$

Observa la forma de escribir la primitiva, introduciendo una raíz cuadrada en el logaritmo con la finalidad de poder calcular el límite fácilmente. Sabemos, de entrada, que dicho límite tiene que existir y ser finito porque se trata de una integral impropia convergente. En efecto, poniendo $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$, se tiene que f es continua en $[0,+\infty[$. Para todo $x > 1$ se tiene que $f(x) > 0$ y se verifica la equivalencia asintótica $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ para $x \to +\infty$. Como la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente, también lo es $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, es decir, la integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente. ☺

i) Pongamos $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x-x^2}}$. El trinomio $20+8x-x^2$ tiene raíces reales que son las soluciones de $x^2-8x-20=0$, las cuales son -2 y 10, por tanto:

$$x^2-8x-20 = (x-10)(x+2) \longrightarrow 20+8x-x^2 = (10-x)(x+2).$$

Deducimos que $20+8x-x^2 > 0 \iff -2 < x < 10$. Podemos optar por racionalizar la integral con la sustitución de Euler 8.36 en la que $a=-1$, $\alpha=-2$, $\beta=10$. Con ello, dicha sustitución viene dada por:

$$x = r(t) = \frac{-2t^2+10}{t^2+1} \qquad (t > 0).$$

Tenemos que:

$$r'(t) = -\frac{24t}{(1+t^2)^2},\ r(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt{5},\ r(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{19}{5}}$$

Haciendo los cálculos, se obtiene:

$$I = \begin{bmatrix} x = r(t), \;\; \mathrm{d}x = r'(t)\,\mathrm{d}t \\ r(\sqrt{5}) = 0, \; r(\sqrt{19/5}) = 1/2 \end{bmatrix} = \int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{\frac{19}{5}}} \frac{1+t^2}{12t}\,\frac{-24t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{\sqrt{\frac{19}{5}}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{5}) - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{19}{5}}$$

Otra forma de calcular esta integral, quizás más sencilla, se basa en una idea vista en el ejemplo 8.44. Hagamos un cambio de variable de la forma $x = \lambda t + \mu$ por la condición de que dicho cambio lleve el intervalo $[-2, 10]$ al $[-1, 1]$. Deberá ser $-2 = -\lambda + \mu$, $10 = \lambda + \mu$. Deducimos que el cambio buscado es $x = 6t + 4$. Tenemos que:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(10-x)(x+2)}} = \begin{bmatrix} x = 6t+4, \;\; \mathrm{d}x = 6\,\mathrm{d}t\,, \; (10-x)(x+2) = 36(1-t^2) \\ x = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{2}{3}, \; x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = -\dfrac{7}{12} \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{7}{12}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3} - \operatorname{arc\,sen}\frac{7}{12}.$$

No te quepa duda de que se trata en ambos casos del mismo resultado expresado de diferente forma.

8.62 Observación. Un error frecuente en este tipo de ejercicios consiste en cambiar el trinomio por su opuesto. Las ecuaciones $20 + 8x - x^2 = 0$ y $-20 - 8x + x^2 = 0$, son la misma ecuación, pero las funciones $\sqrt{20 + 8x - x^2}$ y $\sqrt{-20 - 8x + x^2}$ no son la misma función. ☺

j) Esta primitiva es de las que se calculan integrando por partes, procurando que la integral se repita. Tenemos que:

$$\int \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \cos^2(\log x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{bmatrix} = x\cos^2(\log x) + \int 2\cos(\log x)\operatorname{sen}(\log x)\mathrm{d}x =$$

$$= x\cos^2(\log x) + \int \operatorname{sen}(2\log x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \operatorname{sen}(2\log x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \to v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\cos^2(\log x) + x\operatorname{sen}(2\log x) - 2\int \cos(2\log x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\cos^2(\log x) + x\operatorname{sen}(2\log x) - 4\int \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x + 2x.$$

Donde hemos usado la igualdad $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$. Deducimos que:

$$\int \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\big(x\cos^2(\log x) + x\operatorname{sen}(2\log x) + 2x\big)$$ ☺

k) Pongamos $I = \displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20 + 8x + x^2}}$. El trinomio $20 + 8x + x^2$ no tiene raíces reales. Tenemos que:

$$20 + 8x + x^2 = (x+4)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + 1\right).$$

Por tanto:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x+x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+1}} = \operatorname{argsenh} \frac{x+4}{2}\bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \operatorname{argsenh} \frac{9}{4}.$$

☺

l) Pongamos $I(\rho) = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\rho}$. Como $\rho \neq -1$, la función $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\rho} = \frac{1}{x}(\log x)^{-\rho}$, tiene como primitiva $F(x) = \frac{1}{1-\rho}(\log x)^{1-\rho}$. La función $f(x)$ es positiva y continua en $[\mathrm{e}, +\infty[$. Tenemos que

$$I(\rho) = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\rho} = F(x)\Big|_{x=\mathrm{e}}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(\mathrm{e}) = \frac{1}{\rho-1}.$$

☺

m) Pongamos $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}}$. Esta integral se racionaliza con el cambio 8.35, esto es, haciendo $2x+1 = t^2$, ($t > 0$). Tenemos:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}} = \begin{bmatrix} 2x+1 = t^2 \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \log \frac{t-1}{t+1} = \log \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}.$$

☺

n) Pongamos $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$. Esta integral se racionaliza con el cambio $t = \operatorname{tg}(x/2)$ (8.34). Para aplicar la regla de Barrow, calcularemos primero una primitiva de $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}(x/2) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

Llamemos $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right)$ a la primitiva calculada. Tenemos que:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = F(x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = F(2\pi) - F(0) = 0.$$

Resultado claramente erróneo porque la integral de una función continua y positiva debe ser un número positivo. ¿Dónde está el error? Pues en que la primitiva que hemos calculado no está definida en todo el intervalo $[0, 2\pi]$ pues el valor de $F(x)$ para $x = \pi$ no está, en principio, definido. De hecho, se tiene que:

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ 0<x<\pi}} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \qquad \lim_{\substack{x\to\pi \\ \pi<x<2\pi}} F(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en π, lo que implica que no es derivable en π. Es decir, la función $F(x)$ no es una primitiva de $f(x)$ en $[0, 2\pi]$. Pero $F(x)$ sí es una primitiva de $f(x)$ en $[0, \pi]$ y en $[\pi, 2\pi]$ (definiendo en cada caso F en π como el correspondiente límite lateral para que F resulte continua en cada uno de dichos intervalos). Luego:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} = F(x)\Big|_{x=0}^{x \to \pi^-} + F(x)\Big|_{x \to \pi^+}^{x=2\pi} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to \pi \\ 0 < x < \pi}} F(x) - \lim_{\substack{x \to \pi \\ \pi < x < 2\pi}} F(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

8.63 Observaciones. Al hacer un cambio de variable para calcular una integral definida hay que tener presente la correspondencia entre intervalos. La función que realiza el cambio de variable debe ser continua en su intervalo. En el ejemplo anterior, el cambio realizado es $t = \operatorname{tg}(x/2)$, pero la función $x \mapsto \operatorname{tg}(x/2)$ no está definida en todo el intervalo $[0, 2\pi]$. Cuando x recorre $[0, 2\pi]$, $x/2$ recorre $[0, \pi]$ y la tangente no está definida en $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

También se evitan errores siguiendo el procedimiento usual para realizar cambios de variable en integrales definidas. En el ejemplo anterior debemos calcular los valores de t que corresponden a $x = 0$ y a $x = 2\pi$ lo que nos daría los nuevos límites de integración c y d. Así obtendríamos que para $x = 0$ es $c = \operatorname{tg} 0 = 0$, y para $x = 2\pi$ es $d = \operatorname{tg}(\pi) = 0$. Ya vemos que aquí hay algo que no va bien.

Estos errores están propiciados porque la notación que usamos para las integrales indefinidas (las primitivas) no tiene en cuenta el intervalo en que trabajamos, y ese es un dato muy importante que no se debe olvidar cuando calculamos integrales definidas.

Para calcular integrales de funciones trigonométricas puede ser útil tener en cuenta que dichas funciones son periódicas. Supongamos que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y periódica con período α, es decir, $h(x + \alpha) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que la integral de h en cualquier intervalo de longitud α es la misma. Es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ es $\int_x^{x+\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t$. La comprobación de esta igualdad es inmediata porque la función $H(x) = \int_x^{x+\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t$ es derivable con derivada $H'(x) = h(x + \alpha) - h(x) = 0$, luego H es una función constante.

Aplicando esto en el ejemplo anterior, y teniendo en cuenta que el coseno tiene período 2π y es una función par, tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} = \int_{-\pi}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} + \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x}$$

Esta última integral sí puede calcularse directamente con el cambio $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Aunque dicho cambio convierte la integral en otra integral impropia porque el intervalo $[0, \pi]$ se transforma biyectivamente, por la función $x \mapsto \operatorname{tg}(x/2)$, en el intervalo $[0, +\infty[$. Tenemos que:

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} = [t = \operatorname{tg}(x/2)] = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3 + t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_{t=0}^{t \to +\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

☺

p) Para calcular la integral $\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$ usaremos la regla de Barrow. Para ello, debemos obtener una primitiva de la función $\dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$. Se trata de una función racional. Como el polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Multiplicando e identificando numeradores:

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x$$

Haciendo $x=0$ obtenemos $A=1$. Igualando coeficientes de x^2 se tiene $A+B=0$, por lo que $B=-1$. Igualando coeficientes de x se tiene $A+C=0$, luego $C=-1$.

$$\begin{aligned}
&\int_1^t \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^t \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log t - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log t - \frac{1}{2}\log(t^2+t+1) + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^t \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = \\
&= \frac{\log 3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} + \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Como:

$$\lim_{t\to+\infty}\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) = 0 \qquad \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Concluimos que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\log 3}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi.$$

☺

Ejercicio resuelto **202** Calcula las primitivas $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, y $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$. Supuesto que $a<0$, calcula las integrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$.

Solución. Pongamos $F(x) = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ y $G(x) = \int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx$. Integrando por partes se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \begin{bmatrix} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax}\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}G(x) \\ G(x) &= \begin{bmatrix} u = \operatorname{sen}(bx) \\ dv = e^{ax}\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\,e^{ax}\operatorname{sen}(bx) - \frac{b}{a}F(x) \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$F(x) = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\,e^{ax}\operatorname{sen}(bx) - \frac{b^2}{a^2}F(x) \quad \longrightarrow$$

$$F(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos(bx) + b\operatorname{sen}(bx)\big)$$

$$G(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(-b\cos(bx) + a\operatorname{sen}(bx)\big)$$

Como $|e^{ax}\cos(bx)| \leqslant e^{ax}$, $|e^{ax}\operatorname{sen}(bx)| \leqslant e^{ax}$ y, para $a < 0$, la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{ax}\,dx$ es convergente, se sigue, por el criterio de comparación que las integrales $\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos(bx)\,dx$ y $\int_0^{+\infty} e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx$ son absolutamente convergentes. Sus valores viene dados por:

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos(bx)\,dx = F(x)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = -F(0) = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx = G(x)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} G(x) - G(0) = -G(0) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Otra forma de calcular las primitivas F y G es usando la exponencial compleja como sigue:

$$\begin{aligned} F(x) + iG(x) &= \int e^{ax}\big(\cos(bx) + i\operatorname{sen}(bx)\big)\,dx = \int e^{(a+ib)x}\,dx = \\ &= \frac{1}{a+ib}\,e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\,e^{ax}\big(\cos(bx) + i\operatorname{sen}(bx)\big) = \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos(bx) + b\operatorname{sen}(bx) + i\big(-b\cos(bx) + a\operatorname{sen}(bx)\big)\Big). \end{aligned}$$

E igualando partes real e imaginaria volvemos a obtener el mismo resultado anterior. ☺

Ejercicio resuelto **203** Estudia la convergencia de la integral

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}\,dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Prueba que para $n \geqslant 2$ es $I_n = \dfrac{n-1}{n+2}I_{n-1}$. Calcula I_1, I_2 e I_3.

Solución. Pongamos $f(x) = \dfrac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}$. La función f es continua y positiva en $[0,+\infty[$. Además, como f es un cociente de dos polinomios de grados $2n-1$ y $2n+6$ con coeficiente líder iguales a 1, se verifica la equivalencia asintótica $f(x) \sim \frac{1}{x^5}$ para

$x \to +\infty$. Como la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$ es convergente, deducimos por el criterio límite de comparación, que I_n es convergente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para obtener la fórmula de recurrencia del enunciado debemos hacer una integración por partes. La elección de las funciones u y v es obligada:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^{2n-2} \to \ du = (2n-2)x^{2n-3} \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^{n+3}} \to v = -\frac{1}{n+2}\frac{1}{2}(1+x^2)^{-n-2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2n+4}\frac{x^{2n-2}}{(1+x^2)^{n+2}}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} + \frac{n-1}{n+2}I_{n-1} = \frac{n-1}{n+2}I_{n-1}.$$

Tenemos que:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^4}\,dx = -\frac{1}{6}(1+x^2)^{-3}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{6}.$$

Con ello:

$$I_2 = \frac{1}{4}I_1 = \frac{1}{24}, \qquad I_3 = \frac{2}{5}I_2 = \frac{1}{60}.$$

☺

Ejercicio resuelto 204 Sea f continua en un intervalo I y sea $a \in I$. Prueba que para todo $x \in I$ se verifica la igualdad:

$$\int_a^x (x-t)f(t)\,dt = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)\,ds \right) dt$$

Solución. Pongamos:

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt = x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x tf(t)\,dt$$

$$G(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)\,ds \right) dt\,.$$

Como f es continua, las funciones F y G son derivables en I y sus derivadas están dadas por:

$$F'(x) = \int_a^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x) = \int_a^x f(s)\,ds = G'(x).$$

Como, además $F(a) = G(a) = 0$, concluimos que F y G coinciden en todo punto de I. ☺

Ejercicio resuelto 205 Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, estrictamente creciente y tal que $f(0) = 0$. Sea $g = f^{-1}$ la función inversa de f y sea $a > 0$.

a) Prueba que:

$$\int_0^{f(a)} g(y)\,dy = \int_0^a xf'(x)\,dx = af(a) - \int_0^a f(x)\,dx\,.$$

b) Sea $J = f(\mathbb{R}_o^+)$ el intervalo imagen de f. Prueba que la función $h : J \to \mathbb{R}$ dada para todo $t \in J$ por:

$$h(t) = at - \int_0^t g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

alcanza un máximo absoluto en J y deduce que para todo $b \in J$ se verifica:

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. a) Haciendo primero un cambio de variable y después integrando por partes:

$$\int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} y = f(x), & \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ 0 = f(0), & f(a) = f(a) \end{bmatrix} = \int_0^a g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x\,, & v = f(x) \end{bmatrix} = xf(x)\Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = af(a) - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Tenemos que $h'(t) = a - g(t)$. La función g es estrictamente creciente en $J = f(\mathbb{R}_o^+)$. Sea $c = f(a) > 0$. Entonces $c \in J$ y $g(c) = a$. Deducimos que $h'(x) > 0$ para $0 \leqslant x < c$ y $h'(x) < 0$ para $c < x$. Por tanto h es estrictamente creciente en $[0, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, +\infty[$, luego $h(t) < h(c)$ para todo $t \in J \setminus \{c\}$, y h alcanza en $c = f(a)$ un máximo absoluto en J. Deducimos que para todo $b \in J$ es $h(b) \leqslant h(f(a))$, es decir:

$$ab - \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant af(a) - \int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

La igualdad se da si, y sólo si, $b = f(a)$. ☺

Ejercicio resuelto 206 Estudia para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es convergente la integral

$$I(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Calcula su valor para $\alpha = -3/2$.

Solución. Pongamos $f(x) = x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x$. La función f es continua y positiva en $]0, 1]$. Como $\operatorname{arc\,tg} x \sim x$ para $x \to 0$, se sigue que $f(x) \sim x^{\alpha+1}$ para $x \to 0$. Como la integral $\int_0^1 x^s\,\mathrm{d}x$ converge si, y sólo si, $s > -1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si, y sólo si, $\alpha+1 > -1$, o sea, $\alpha > -2$. Para calcular $I(-3/2)$ integramos por partes para eliminar la función $\operatorname{arc\,tg} x$ y después

hacemos un cambio de variable.

$$I(-3/2) = \int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,tg} x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arc\,tg} x \to \,\mathrm{d}u \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \mathrm{d}v = x^{-\frac{3}{2}} \to v = -\dfrac{2}{\sqrt{x}} \end{bmatrix} =$$

$$= -2\, \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{x}} \bigg|_{x\to 0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \big[x = t^2, t > 0\big] = -\frac{\pi}{2} + 4\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\,.$$

Para calcular la integral $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ lo primero es calcular las raíces del denominador que, evidentemente, son todas complejas e iguales a las raíces complejas cuartas de la unidad. Como $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$, dichas raíces son los números:

$$x_k = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}} \qquad k = 0,1,2,3.$$

Sabemos que dichas raíces vienen en pares de complejos conjugados. Luego deben ser $x_0, \overline{x_0}$ y $x_1, \overline{x_1}$, donde:

$$x_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = x_0\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = ix_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Luego:

$$x^4 + 1 = (x - x_0)(x - \overline{x_0})(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = |x - x_0|^2\, |x - x_1|^2 =$$
$$= \big((x - 1/\sqrt{2})^2 + 1/2\big)\big((x + 1/\sqrt{2})^2 + 1/2\big) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Si no sabes calcular las raíces complejas cuartas de -1 (lo que sería bastante lamentable), puedes obtener la anterior descomposición utilizando el hecho de que corresponde a dos factores cuadráticos irreducibles y, por tanto, debe ser de la forma (los coeficientes de x^2 deben ser, claramente, iguales a 1):

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Desarrollando esta igualdad e identificando coeficientes se vuelve a obtener la descomposición anterior.

La descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \iff$$
$$1 = (Ax+B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx+D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \iff$$
$$1 = B + D + (A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D)x + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A+C)x^3$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones:

$$B + D = 1,\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0,\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0,\ A + C = 0$$

que se resuelve con mucha facilidad resultando $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = C = \frac{1}{2}$. Ahora solamente queda calcular las correspondientes primitivas. Esto lo dejo para que lo

completes tú. Es algo que ya debes saber hacer y que se hizo en general al estudiar la integración de funciones racionales. El resultado final es:

$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,tg} x \,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi + \log(3+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

8.7. Aplicaciones de la integral

Con una integral puedes calcular magnitudes tan diversas como áreas, volúmenes, longitudes de curvas, el trabajo realizado por una fuerza, la masa de un sólido, momentos de inercia, el campo eléctrico, el flujo de un fluido a través de una superficie y muchas más. Es notable, sin embargo, que la forma de proceder sea casi siempre la misma, y consiste en expresar el valor exacto de la magnitud que se quiere calcular como un límite de sumas de Riemann, para deducir, a partir de ellas, la integral cuyo cálculo proporciona la solución del problema. Podrás comprobar en lo que sigue que esta técnica es bastante sencilla e intuitiva. Con un poco de práctica tú mismo podrás aplicarla con éxito en situaciones distintas de las que aquí se consideran.

8.7.1. Cálculo de áreas planas

Te recuerdo que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, representamos por $G(f,a,b)$ la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$. Como sabes, el área de dicha región viene dada por

$$\lambda(G(f,a,b)) = \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$$

Es interesante interpretar la integral que proporciona el área de la siguiente forma. Observa que $|f(x)|$ es la *longitud* del segmento intersección de $G(f,a,b)$ con la recta vertical que pasa por $(x,0)$, es decir, $|f(x)|$ es la longitud de la *sección vertical* de $G(f,a,b)$ por el punto $(x,0)$, y *el área de la región* $G(f,a,b)$ *es igual a la integral de las longitudes de sus secciones*. Intuitivamente: integrando longitudes obtenemos áreas. Como el área es invariante por rotaciones, este resultado es también válido si consideramos secciones por rectas paralelas a una recta cualquiera dada. Deducimos así el siguiente resultado.

8.64 Teorema (Principio de Cavalieri)**.** *El área de una región plana es igual a la integral de las longitudes de sus secciones por rectas paralelas a una recta dada.*

Veamos cómo se aplica este principio en algunos casos concretos.

8.7.1.1. Regiones de tipo I

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo

I. Es evidente que las longitudes de las secciones verticales de Ω son iguales a $|f(x) - g(x)|$ por lo que su área viene dada por

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \tag{8.38}$$

Observa que esta integral expresa el área de Ω como límite de las sumas de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - g(t_k)| \, (x_k - x_{k-1})$$

lo que tiene una sencilla interpretación que puedes ver en la siguiente figura.

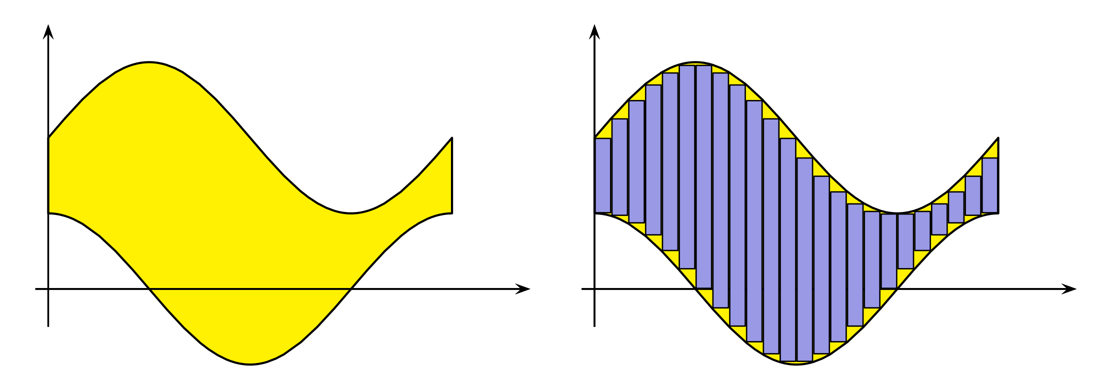


Figura 8.7. Aproximación al área de una región de tipo I

Cuando la función $f - g$ no tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$, para calcular la integral (8.38) se descompone dicho intervalo en intervalos en los que la función $f - g$ es siempre positiva o siempre negativa, lo que permite quitar el valor absoluto en el integrando.

A veces interesa expresar una región de tipo I como unión de dos o más regiones de tipo I disjuntas y más sencillas, entonces su área es la suma de las áreas de cada una de dichas regiones.

8.65 Ejemplo. Vamos a calcular el área de la región Ω comprendida entre la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = x - 2$.

Calculamos los puntos de corte de la recta y la parábola resolviendo la ecuación $x = (x-2)^2$, cuyas soluciones son $a = 1$, $b = 4$. Puedes ver representada la región Ω en amarillo en la siguiente figura.

Podemos considerar Ω como una región de tipo I. La función cuya gráfica limita a Ω por arriba es $g(x) = \sqrt{x}$. La función cuya gráfica limita a Ω por abajo viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 2 & 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

En consecuencia

$$\lambda(\Omega) = \int_0^4 |g(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - (\sqrt{x})) \, \mathrm{d}x + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x-2)) \, \mathrm{d}x = \frac{9}{2}$$

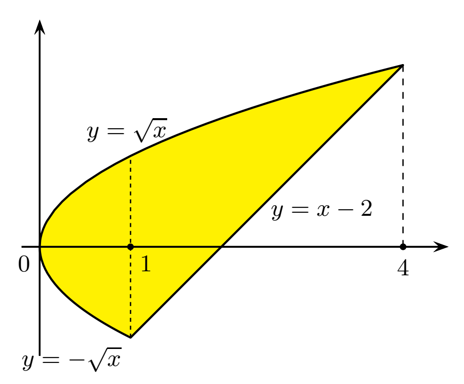
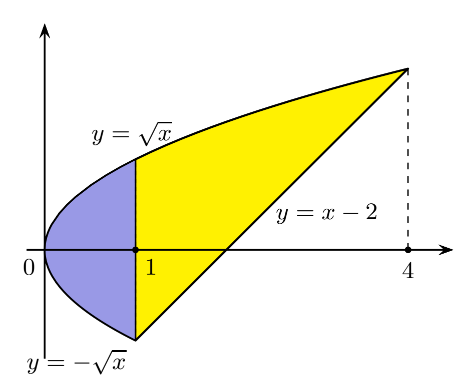


Figura 8.8. Ejemplo de región de tipo I

Observa que podemos ver Ω como unión de dos regiones de tipo I como se indica en la siguiente figura.



Y lo que hemos hecho antes ha sido calcular el área de cada una de estas dos regiones. ♦

8.7.1.2. Regiones de tipo II

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II. Es evidente que las longitudes de las secciones horizontales de Ω son iguales a $|f(y) - g(y)|$ por lo que su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y \tag{8.39}$$

lo que tiene una sencilla interpretación que puedes ver en la figura 8.9.

Es importante advertir que la distinción entre regiones de tipo I y de tipo II es tan sólo una cuestión de conveniencia. No son conjuntos de distinta naturaleza sino formas distintas de describir un conjunto. En la práctica te vas a encontrar con regiones que puedes considerar tanto de tipo I como de tipo II y deberás elegir la descripción que más facilite el cálculo de la correspondiente integral.

De todas formas, no debes olvidar que basta cambiar la variable x por la variable y para convertir una región de tipo II en otra de tipo I. Geométricamente, lo que hacemos es una

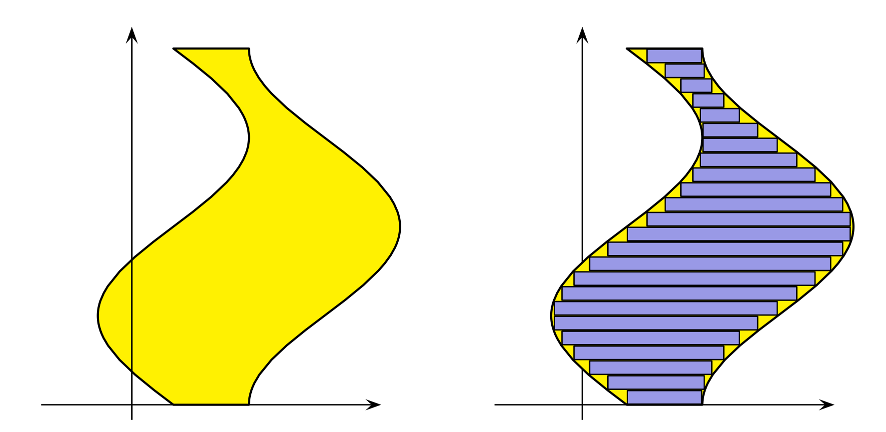


Figura 8.9. Aproximación al área de una región de tipo II

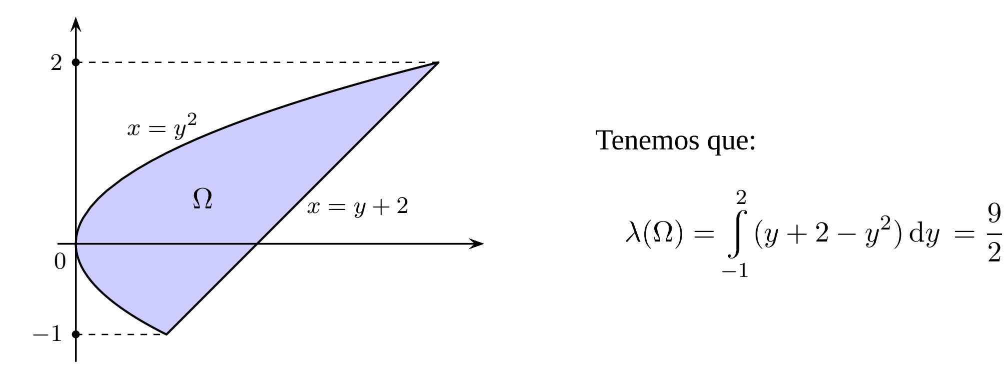
simetría respecto a la recta $y = x$, lo que deja invariante el área. Por tanto, si en un ejercicio resulta conveniente considerar la región cuya área quieres calcular como una región de tipo II y te encuentras más cómodo trabajando con regiones de tipo I, basta con que cambies los nombres de las variables.

Salvo por factores de escala, las figuras (8.7) y (8.9) son simétricas respecto de la recta $y = x$.

8.66 Ejemplo. La región del ejemplo (8.8) puedes considerarla como una región de tipo II.

La curva que limita esta región por la derecha es la gráfica de la recta $x = y + 2$ y la curva que limita esta región por la izquierda es la gráfica de la parábola $x = y^2$. La variable y está comprendida entre -1 y 2.

$$\Omega = \left\{(x, y) : y^2 \leqslant x \leqslant y + 2,\ -1 \leqslant y \leqslant 2\right\}$$



Tenemos que:

$$\lambda(\Omega) = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{9}{2}$$

Figura 8.10. Ejemplo de región de tipo II

También puedes transformar directamente Ω en una región de tipo I más sencilla que la anteriormente considerada en la figura 8.8 mediante una simetría respecto de la recta $y = x$, tal como se muestra en la figura 8.11. Aunque la región así obtenida,Ω_s, no es la misma Ω tiene, sin embargo, igual área que Ω.

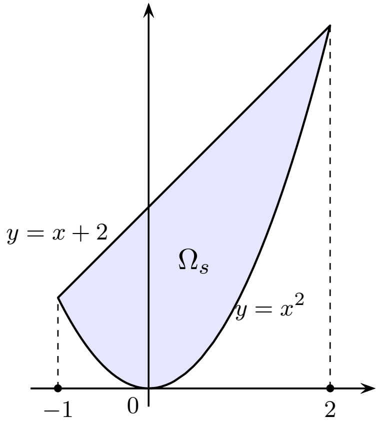


Figura 8.11. Simétrica de la figura 8.8

$$\lambda(\Omega_s) = \lambda(\Omega) = \int_1^2 (x+2-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$

♦

8.7.2. Ejercicios propuestos

---

399. Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 4x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$.

400. Calcula para qué valor de λ la curva $y = \lambda \cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

401. Calcula el área encerrada por el bucle de la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

402. a) Calcula $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(xt)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$

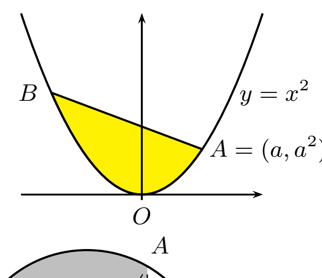
b) Calcula el área limitada por la gráfica de f y el eje OX.

403. Calcula el área de las regiones del plano limitadas por las siguientes curvas.

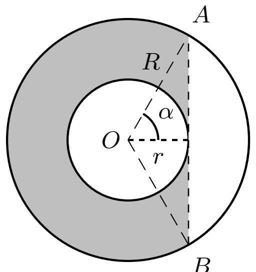
1. $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX.
2. $x = 12y^2 - 12y^3, \quad x = 2y^2 - 2y.$
3. $y = -x^2 - 2x, \quad y = x^2 - 4, \quad -3 \leqslant x \leqslant 1.$
4. $y = x^2, \quad x + y = 2, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$
5. $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 4.$
6. $y = \sec^2 x, \quad y = \operatorname{tg}^2 x, \quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4.$
7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.
8. $(y-x)^2 = x - 3, \quad x = 7.$
9. $y = (\log x)^2, \quad 0 < x \leqslant \mathrm{e}.$

10. $y^2 = \dfrac{1-x}{1+x}, \quad x = -1.$
11. $y = x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad y = x^2\,\mathrm{e}^{-x}, \quad x \geqslant 0.$

404. Calcula $a > 0$ por la condición de que el sector parabólico OAB de la figura de la derecha tenga área mínima. El punto B es la intersección de la parábola $y = x^2$ con su normal en el punto $A = (a, a^2)$.



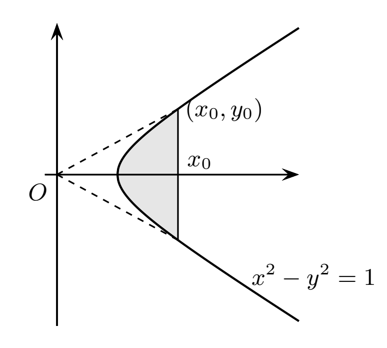
405. Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r, una arandela como la de la figura de la derecha. Se pide calcular el radio r por la condición de que el área de la parte de la arandela que queda a la izquierda de la recta $x = r$ (sombreada en gris) sea máxima. Sugerencia. Tomar α como variable.



406. Una corona circular de radio interior $\sqrt{2}$ y radio exterior $\sqrt{6}$ se corta con la parábola de ecuación $x = y^2$. Calcula el área de cada una de las dos regiones resultantes.

407. Se considera la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ y un punto (x_0, y_0) de la misma ($x_0 > 1$). Se pide calcular el área, ω_0, de la región sombreada en gris en la figura, y deducir que:

$$x_0 = \cosh(\omega_0), \quad y_0 = \operatorname{senh}(\omega_0).$$



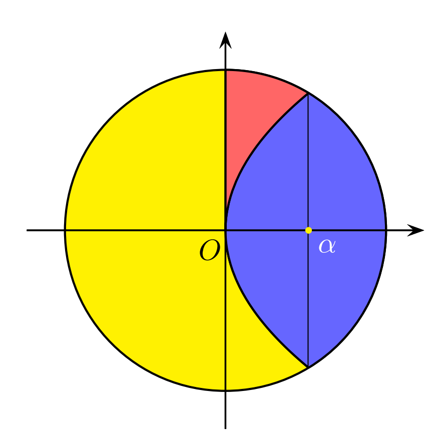
8.7.3. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **207** Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 4x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$.

Solución.

Hay que calcular los puntos de intersección de la parábola y de la circunferencia. Para ello calculamos la raíz positiva de la ecuación $x^2 + 4x - 8 = 0$ que es $\alpha = -2 + 2\sqrt{3}$. Los puntos de intersección son, por tanto, $(\alpha, 2\sqrt{\alpha})$ y $(\alpha, -2\sqrt{\alpha})$. Teniendo en cuenta la simetría, para calcular el área de la parte azul del círculo es suficiente calcular el área de la región comprendida entre la circunferencia y la parábola cuando $x \in [0, \alpha]$, es decir, el área de la región coloreada en rojo. Se trata de una región de tipo I cuya área viene dada por:



$$\int_0^\alpha \left(\sqrt{8 - x^2} - 2\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^\alpha \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x - \int_0^\alpha 2x^{1/2}\, \mathrm{d}x = \int_0^\alpha \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x - \frac{4}{3}\alpha^{3/2}.$$

Calculemos la integral que falta.

$$\int_0^\alpha \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x = \left[x = \sqrt{8}\operatorname{sen} t\right] = \sqrt{8} \int_0^{\operatorname{arc\,sen}(\frac{\alpha}{\sqrt{8}})} \cos^2 t\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2} \int_0^{\operatorname{arc\,sen}(\frac{\alpha}{\sqrt{8}})} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\alpha/\sqrt{8}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,sen}(\alpha/\sqrt{8})\right).$$

Por tanto, el área,S, de la región en rojo es igual a:

$$S = \sqrt{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\alpha/\sqrt{8}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,sen}(\alpha/\sqrt{8})\right) - \frac{4}{3}\alpha^{3/2}$$

La solución obtenida puede simplificarse más usando que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$ pero, tal como está, puede considerarse correcta.

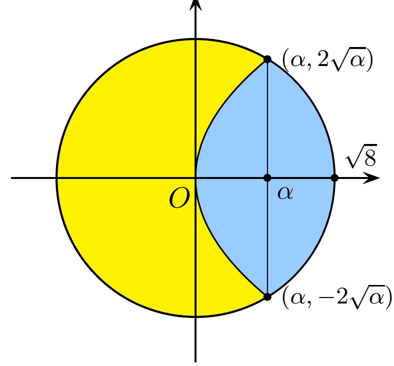
El área de la parte del círculo interior a la parábola (coloreada en azul) es igual $4\pi - 2S$, y el área de la parte del círculo exterior a la parábola (zonas amarilla y roja) es igual a $4\pi + 2S$.

Otras formas de hacer este ejercicio son las siguientes.

Teniendo en cuenta la simetría, el área de la parte azul del círculo es igual a:

$$2\int_0^\alpha 2\sqrt{x} + 2\int_\alpha^{\sqrt{8}} \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

que se calcula como antes.

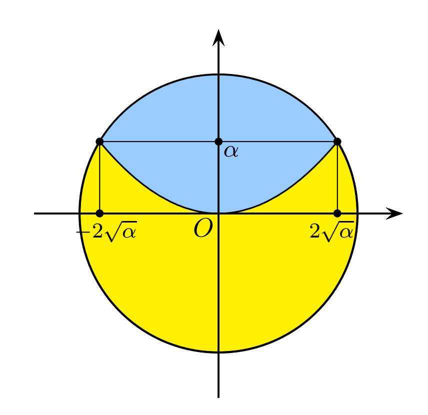


También puedes hacer este ejercicio cambiando los ejes (convirtiendo una región de tipo II en otra de tipo I) como en la siguiente figura obtenida simetrizando la anterior respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

El área de la parte azul del disco es igual a:

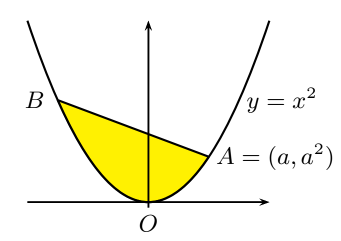
$$\int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{8-x^2} - x^2/4\right) \, dx$$

que se calcula igual que antes. ☺



Ejercicio resuelto **208**

Calcula $a > 0$ por la condición de que el sector parabólico OAB de la figura de la derecha tenga área mínima. El punto B es la intersección de la parábola $y = x^2$ con su normal en el punto $A = (a, a^2)$.



Solución.

Sabemos que la normal a una curva de ecuación $y = f(x)$ en un punto $(a, f(a))$ es la recta de ecuación $y = f(a) - \dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$. En nuestro caso la curva es la parábola $y = x^2$ cuya normal en el punto (a, a^2) es la recta $y = a^2 - \dfrac{1}{2a}(x-a)$. La intersección de dicha recta con la parábola se obtiene resolviendo la ecuación $x^2 = a^2 - \dfrac{1}{2a}(x-a)$, esto es, $2ax^2 + x - a - 2a^3 = 0$, cuyas soluciones son:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a+2a^3)^2 2a}}{4a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8a^2 + 16a^4}}{4a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1+4a^2)^2}}{4a} =$$

$$= \frac{-1 \pm (1+4a^2)}{4a} = \begin{cases} a \\ -\dfrac{1+2a^2}{2a} \end{cases}$$

Pongamos $x_0 = -\dfrac{1+2a^2}{2a}$. Tenemos que $B = (x_0, x_0^2)$. El área del sector parabólico de la figura viene dada por

$$G(a) = \int_{x_0}^{a} \left(a^2 - \frac{1}{2a}(x-a) - x^2\right) dx = \left[a^2 x - \frac{1}{4a}(x-a)^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=x_0}^{x=a} =$$

$$\frac{4}{3}a^3 + a + \frac{1}{4a} + \frac{1}{48a^3}$$

Para calcular el mínimo de esta función se procede de la forma usual. Calculemos los ceros de la derivada.

$$G'(a) = 4a^2 + 1 - \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{16a^4} = 0 \Longleftrightarrow 4a^2 + 1 = \frac{1}{4a^2}\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16a^4}(4a^2+1) \Longleftrightarrow 16a^4 = 1 \Longleftrightarrow a^4 = \frac{1}{16}$$

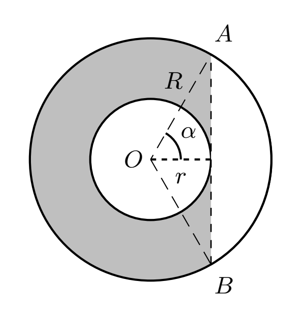
Como $a > 0$, la única solución es $a = 1/2$. Teniendo en cuenta que para todo $a > 0$:

$$G''(a) = 8a + \frac{1}{2a^3} + \frac{1}{4a^5} > 0,$$

y que $\lim\limits_{a\to 0} G'(a) = -\infty$, $\lim\limits_{a\to+\infty} G'(a) = +\infty$, deducimos que para $0 < a < \frac{1}{2}$ es $G'(a) < 0$, y para $\frac{1}{2} < a$ es $G'(a) > 0$. De aquí se sigue que G decrece en $]0, 1/2]$ y crece en $[1/2, +\infty[$, por lo que alcanza un mínimo absoluto en $a = 1/2$. ☺

Ejercicio resuelto **209**

Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r, una arandela como la de la figura de la derecha. Se pide calcular el radio r por la condición de que el área de la parte de la arandela que queda a la izquierda de la recta $x = r$ (sombreada en gris) sea máxima.
Sugerencia. Tomar α como variable.



Solución.

Todo lo que hay que hacer es calcular el área de la parte sombreada de la arandela. Podemos hacer esto de forma completamente elemental introduciendo como variable la medida en radianes, θ, del ángulo indicado en la figura.

Con ello tenemos que $r = R\cos\theta$. El área buscada es igual al área del disco grande (πR^2) menos el área del disco pequeño ($\pi(R\cos\theta)^2$), menos el área del sector circular OBA (θR^2) más el área del triángulo OAB ($R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta$). Por tanto, la función a maximizar es:

$$f(\theta) = \pi R^2 - \pi(R\cos\theta)^2 - \theta R^2 + R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta = R^2\big(\pi - \theta - \pi\cos^2\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\big) =$$
$$= R^2\big(\pi\operatorname{sen}^2\theta - \theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\big),$$

definida para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Calculamos la derivada:

$$f'(\theta) = 2R^2\operatorname{sen}\theta(\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta).$$

Se sigue que el único cero de la derivada en el intervalo donde está definida f es es $\theta_0 = \operatorname{arc\,tg}\pi \in]0, \pi/2[$. Como $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$, el signo de la derivada es igual al signo de $\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$. Deducimos que $f'(\theta) > 0$ para $0 < \theta < \theta_0$ y $f'(\theta) < 0$ para $\theta_0 \leqslant \theta < \pi/2$. En consecuencia, f es creciente en $[0, \theta_0]$ y decreciente en $[\theta_0, \pi/2]$. Por tanto el valor máximo absoluto de f en $[0, \pi/2]$ se alcanza en θ_0. El valor de r correspondiente es:

$$r = R\cos\theta_0 = \frac{R}{\sqrt{1+\pi^2}}.$$

Alternativamente, podemos calcular directamente, en función de r, el área del segmento circular determinado por la cuerda $\overline{AB}$, que viene dado por:

$$2\int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

En consecuencia, el área de la parte sombreada de la arandela viene dada por:

$$g(r) = \pi R^2 - \pi r^2 - 2\int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

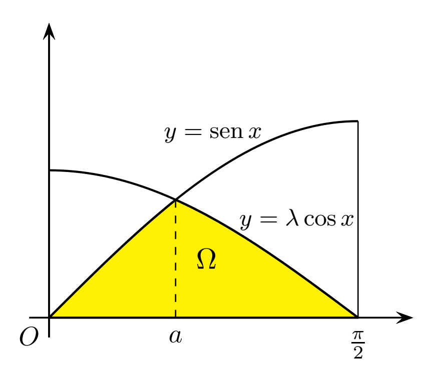
donde $0 \leqslant r \leqslant R$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada de g viene dada por

$$g'(r) = -2\pi r + 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Cuyo único cero es $r_0 = \dfrac{R}{\sqrt{1+\pi^2}}$. Se justifica fácilmente que dicho valor corresponde al máximo absoluto de g en $[0, R]$. ☺

Ejercicio resuelto **210**

Calcula para qué valor de λ la curva $y = \lambda\cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.



Solución.
El área limitada por la función seno entre $x = 0$ y $x = \pi/2$, es igual $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 1$. Por tanto, debemos calcular λ por la condición de que el área de la región Ω, en amarillo en la figura de la derecha, sea igual a $1/2$. Llamando a al único punto de corte de las gráficas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \lambda\cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$, el cual viene dado por la igualdad $\lambda\cos a = \operatorname{sen} a$, dicha área es igual a:

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \lambda\cos x\,\mathrm{d}x = 1 + \lambda - \cos a - \lambda\operatorname{sen} a.$$

Deberá verificarse que $1 + \lambda - \cos a - \lambda\operatorname{sen} a = 1/2$. Teniendo en cuenta que:

$$\lambda\cos a = \operatorname{sen} a \Rightarrow \operatorname{tg} a = \lambda \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \lambda^2 \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

donde hemos tenido en cuenta que como $0 < a < \pi/2$, $\cos a > 0$. Sustituyendo ahora en la igualdad anterior y teniendo en cuenta que debe ser $\lambda > 0$, obtenemos:

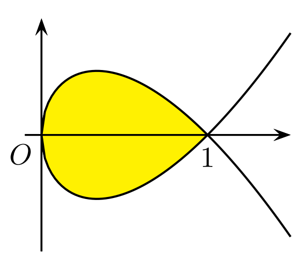
$$1 + \lambda - \cos a - \lambda\operatorname{sen} a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2\lambda = 2\cos a + 2\lambda\operatorname{sen} a = 2(1+\lambda^2)\cos a \Leftrightarrow$$
$$1 + 2\lambda = 2(1+\lambda^2)\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 2\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow (1+2\lambda)^2 = 4(1+\lambda^2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}.$$

☺

Ejercicio resuelto **211** Calcula el área encerrada por el bucle de la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

Solución. En problemas de cálculo de areas debemos hacer, siempre que no sea complicado, una representación gráfica para visualizar la región del plano cuya área queremos

calcular, de esta forma se evitan posibles errores. La curva de ecuación $y^2 = x(x-1)^2$ es simétrica respecto al eje de abscisas, pues para cada valor de x tenemos dos valores opuestos de y, que vienen dados por $y = \sqrt{x}|x-1|$, $y = -\sqrt{x}|x-1|$. Observa que esta curva está definida para $x \geqslant 0$. Los puntos de corte de la curva con el eje OX son $x = 0$ y $x = 1$. El bucle del enunciado debe estar comprendido entre ellos dos. Para $0 \leqslant x \leqslant 1$ la parte de arriba de la curva es $y = \sqrt{x}(1-x)$. Tenemos que $y' = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}}$. Deducimos que es creciente para $0 \leqslant x \leqslant 1/3$ y decreciente para $1/3 \leqslant x \leqslant 1$. Además, la derivada segunda es negativa, por lo que se trata de una curva cóncava (la parte de arriba del bucle). Con estos datos ya podemos representar la curva.



Teniendo en cuenta la simetría, el área pedida viene dada por:

$$2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}$$

☺

Ejercicio resuelto **212** Calcula el área de una elipse de semiejes a y b.

Solución. Por medio de un giro y de una traslación (que son movimientos del plano que conservan el área), la ecuación de la elipse puede escribirse de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

El área pedida viene dada por la integral:

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \pi ab.$$

Donde, para evaluar la integral hemos usado la tabla de primitivas inmediatas. Para el caso en que $a = b = r$, es decir, la elipse es un círculo de radio r, obtenemos la conocida fórmula πr^2 para el área de un círculo. ☺

8.7.4. Curvas en el plano

Seguramente te imaginas una curva en el plano como una línea continua que puede dibujarse de un trazo, sin levantar el lápiz del papel. Esa idea es esencialmente correcta. Las circunferencias, las elipses, las cardioides son todas ellas curvas. Faltaría más. Ninguna de ellas puedes representarla por una igualdad de la forma $y = f(x)$. Las curvas que pueden representarse por una ecuación cartesiana del tipo $y = f(x)$ son curvas muy particulares pues son gráficas de funciones. No olvides que cuando dices "sea la curva dada por la ecuación $y = f(x)$" te estás refiriendo a la curva cuya imagen es el conjunto de puntos del plano $\{(x,y) : x \in [a,b], y = f(x)\}$ es decir, a la gráfica de f.

Si lo piensas un momento, verás que muy pocas curvas son gráficas. Para que una curva sea una gráfica es necesario que cualquier recta vertical la corte a lo más en un solo punto; ninguna curva cerrada cumple esta condición. Precisamente entre las curvas cerradas se encuentran algunas de las curvas más interesantes, a ellas pertenecen los distintos tipos de óvalos y lemniscatas, las astroides, las cardioides y muchas más.

Vamos a ver ahora una forma de representar curvas planas mucho más general que las ecuaciones cartesianas del tipo $y = f(x)$ que sólo sirven para representar curvas que también son gráficas. Para empezar, consideremos una curva que viene dada por una ecuación cartesiana de la forma $y = f(x)$ donde $x \in [a,b]$. Nuestra curva es, por tanto, la imagen de la aplicación $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(x) = (x, f(x))$ para todo $x \in [a,b]$. Intuitivamente, cuando x recorre el intervalo $[a,b]$, el punto $(x, f(x))$ recorre la curva. Es fácil generalizar esta situación sin perder la idea intuitiva de curva. Lo esencial es que podamos describir las coordenadas de los puntos de la curva como funciones continuas de un parámetro. En la situación que estamos considerando se tiene que $y = f(x)$, es decir, la segunda coordenada es función continua de la primera. La generalización consiste en que ambas coordenadas sean funciones continuas de un parámetro. Llegamos así a la definición siguiente.

8.67 Definición. Una curva en el plano es una aplicación continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, decimos que $x = x(t)$, $y = y(t)$ son las **ecuaciones paramétricas** de la curva. El punto $\gamma(a)$ es el origen y $\gamma(b)$ el extremo de la curva. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva es **cerrada**. Se dice que una curva γ es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, si para $s, t \in [a,b]$ con $s \neq t$ se verifica que $\gamma(s) \neq \gamma(t)$. Una curva cerrada se llama simple si la función γ es inyectiva en $]a,b[$.

8.68 Ejemplos.

- La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a + r\cos t$, $y(t) = b + R\operatorname{sen} t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ es una elipse cuyo centro es el punto (a,b) y semiejes de longitudes r y R. Cuando $r = R$ se trata de una circunferencia.
- La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = r(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ es la **cicloide**. Es la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r que avanza girando sin deslizar.
- La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a(1 + \cos t)\cos t$, $y(t) = a(1 + \cos t)\operatorname{sen} t$ para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ se llama **cardioide**. Es la curva que describe un punto fijo del borde de un círculo de radio $a/2$ que rueda sin deslizar sobre el exterior de otro círculo del mismo radio.

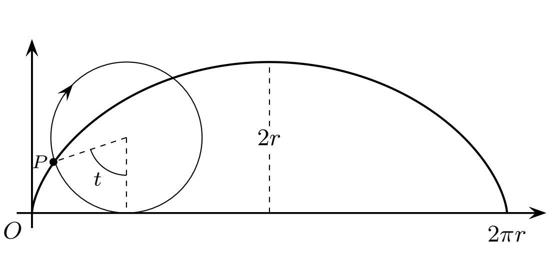


Figura 8.12. Cicloide

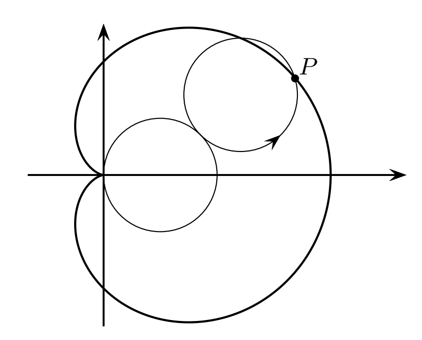


Figura 8.13. Cardioide

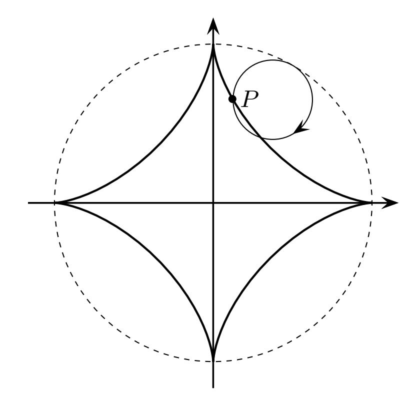


Figura 8.14. Astroide

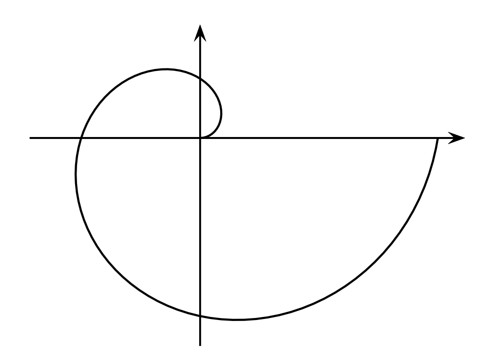


Figura 8.15. Espiral de Arquímedes

- La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\operatorname{sen}^3 t$ donde $a > 0$ y $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se llama **hipocicloide de cuatro picos** o **astroide**. Es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia de radio $r = a/4$ que rueda sin deslizar sobre el interior de otra circunferencia de radio a.

- La curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\operatorname{sen} t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se llama **espiral de Arquímedes**. Es la curva que describe un punto que se mueve alejándose del origen con velocidad uniforme sobre una semirrecta que gira alrededor del origen con velocidad angular constante.

- Otro ejemplo final, para que aprecies las curvas tan complicadas que pueden representarse fácilmente por ecuaciones paramétricas. Se trata de una curva de las llamadas *curvas de Lissajoux*. Sus ecuaciones son $x(t) = \operatorname{sen}(3t)$, $y(t) = \cos(5t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

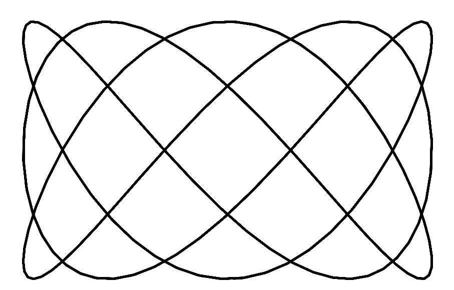


Figura 8.16. Una curva de Lissajoux

8.7.4.1. Área encerrada por una curva

Sea Ω la región rodeada por una curva cerrada simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, y supongamos que las funciones $x(t), y(t)$ tienen primera derivada continua. Se supone también que si, a medida que el parámetro t avanza desde a hasta b, andamos sobre la curva siguiendo al punto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entonces la región Ω queda a nuestra izquierda (ver figura 8.17).

En estas condiciones se verifica que el área de Ω viene dada por:

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b y'(t)x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - y'(t)x(t)\big)\,\mathrm{d}t \tag{8.40}$$

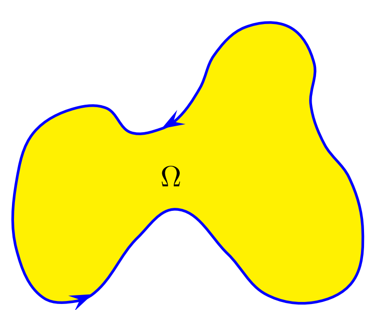


Figura 8.17. Una curva cerrada

8.7.4.2. Áreas planas en coordenadas polares

Un tipo particular de ecuaciones paramétricas son las de la forma:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = f(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta) \tag{8.41}$$

donde $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Dichas ecuaciones se representan simbólicamente en la forma $\rho = f(\vartheta)$. La curva definida por estas ecuaciones se dice que está dada en forma polar y que $\rho = f(\vartheta)$ es la ecuación polar de la curva. La razón de esta terminología se explica seguidamente.

Dado un punto $(x, y) \neq (0, 0)$, hay un único par de números (ρ, ϑ), tales que $\rho > 0$ y $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$, que verifican las igualdades $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$. Dichos números se llaman **coordenadas polares** del punto (x, y). Si consideras el número complejo $x + iy$, entonces ρ es su módulo y ϑ es su argumento principal.

Por tanto, dada una curva por una ecuación polar $\rho = f(\vartheta)$, el punto del plano que corresponde a cada valor del ángulo polar ϑ es:

$$\begin{cases} f(\vartheta)(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta), & \text{si } f(\vartheta) \geqslant 0. \text{ Coordenadas polares } (f(\vartheta), \vartheta) \\ |f(\vartheta)|\big(\cos(\vartheta + \pi), \operatorname{sen}(\vartheta + \pi)\big), & \text{si } f(\vartheta) < 0. \text{ Coordenadas polares } (|f(\vartheta)|, \vartheta + \pi) \end{cases}$$

Debes tener claro que esta forma de representar una curva no es más que un tipo particular de representación paramétrica.

Consideremos una curva dada por la ecuación polar $\rho = f(\vartheta)$ donde $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Queremos calcular el área de la región del plano (ver figura 8.18):

$$\Omega = \{(\rho\cos\vartheta, \rho\cos\vartheta) : 0 < \rho \leqslant f(\vartheta),\ \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta\}.$$

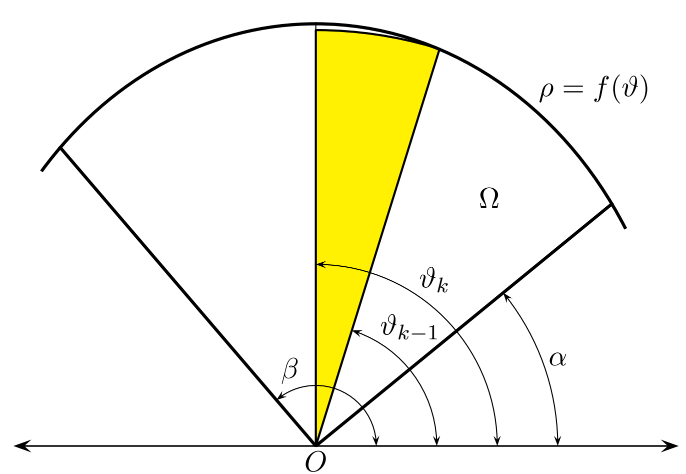


Figura 8.18. Aproximación por sectores circulares

Para ello lo que hacemos es aproximar Ω por medio de sectores circulares. Recuerda que el área de un sector circular de radio ρ y amplitud φ (medida en radianes) es igual a $\dfrac{1}{2}\rho^2\varphi$. Consideramos para ello una partición $\{\alpha = \vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n = \beta\}$ de $[\alpha, \beta]$ y formamos la suma $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2} f(\vartheta_k)^2(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})$. Como el número $\dfrac{1}{2} f(\vartheta_k)^2(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})$ es el área del sector circular, representado en amarillo en la figura 8.18, de radio $f(\vartheta_k)$ y amplitud igual a $\vartheta_k - \vartheta_{k-1}$, es claro que la suma anterior representa una aproximación del área de Ω. Como $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2} f(\vartheta_k)^2(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})$ es una suma de Riemann de la función $\vartheta \mapsto \dfrac{1}{2} f(\vartheta)^2$, se sigue que el área de Ω viene dada por la integral:

$$\lambda(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\vartheta)^2 \, \mathrm{d}\vartheta \tag{8.42}$$

Con frecuencia, las ecuaciones en coordenadas polares se usan para representar distintos tipos de curvas simétricas llamadas “rosas”. Por ejemplo, en la figura 8.19 se ha representado una rosa de 8 hojas o lazos, cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho = \cos(4\vartheta)$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$.

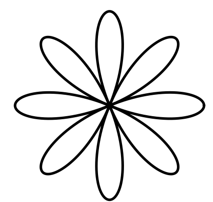


Figura 8.19. Rosa de 8 pétalos

8.7.5. Ejercicios propuestos

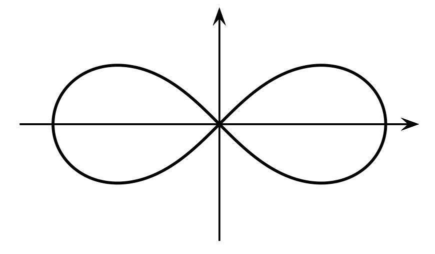
---

408. Calcula el área encerrada por la elipse $x(t) = a + r\cos t$, $y(t) = b + R\,\mathrm{sen}\, t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

408. Calcula el área encerrada por la cardioide $x(t) = \cos t(1+\cos t)$, $y(t) = \operatorname{sen} t(1+\cos t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

409.

Calcula el área de la región del plano rodeada por un lazo de la lemniscata de ecuación polar $\rho^2 = \cos(2\vartheta)$, $(-\pi/4 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/4)$.



410. Calcula el área limitada por el arco de la espiral de Arquímedes $\rho = a\vartheta$, $a > 0$, comprendido entre $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi$.

411. Calcula el área encerrada por el lazo interior de la curva $\rho = \dfrac{1}{2} + \cos\vartheta$.

412. Hallar el área encerrada por una de las hojas de la rosa $\rho = 2\cos(2\vartheta)$.

413. Calcular el área del lóbulo del folium de Descartes de ecuación $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$. Sugerencia. Expresa la ecuación en forma polar.

414. Calcula el área de la región común a las dos elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Sugerencia. Representa gráficamente las elipses. Usa la simetría polar para simplificar los cálculos y pasar a coordenadas polares.

8.7.6. Longitud de un arco de curva

Se trata de calcular la longitud de la curva plana γ dada por las ecuaciones paramétricas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, donde suponemos que $x(t)$, $y(t)$ tienen derivada primera continua. Para ello aproximamos la curva por poligonales inscritas en ella. Cada partición $\{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ induce una poligonal cuyos vértices son los puntos $\gamma(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

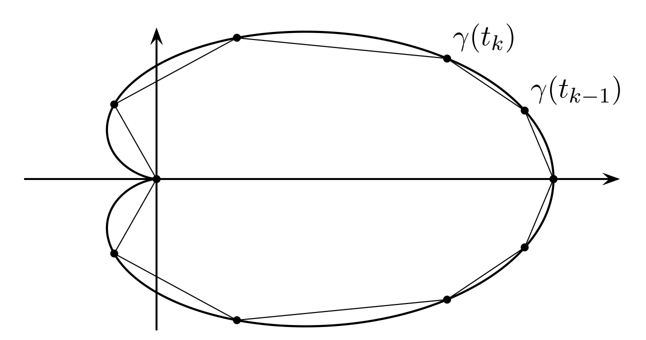


Figura 8.20. Aproximación por poligonales

La longitud de dicha poligonal viene dada por la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'(s_k)^2 + y'(s_k)^2}\,(t_k - t_{k-1})$$

Donde hemos usado el teorema del valor medio y la continuidad de las derivadas. Pero esta suma es una suma de Riemann de la función $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Deducimos que la longitud de la curva γ viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{8.43}$$

Para el caso particular de que la curva sea la gráfica de una función $y = f(x)$, esto es $\gamma(x) = (x, f(x))$, entonces su longitud viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Para el caso particular de que la curva venga dada por una parametrización polar de la forma (8.41), su longitud viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2}\,\mathrm{d}\vartheta$$

Si interpretamos que la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es la *función de trayectoria* seguida por un móvil, entonces la *velocidad* de dicho móvil en cada instante t viene dada por el vector derivada $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, y la *rapidez* es la norma euclídea de dicho vector, es decir $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. La igualdad (8.43) tiene ahora una interpretación clara: la distancia recorrida por un móvil se obtiene integrando la rapidez. Volveremos sobre esto más adelante.

8.7.7. Ejercicios propuestos

415. Calcula la longitud del arco de catenaria $y = \cosh x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

416. Calcula la longitud de un arco de la cicloide $x(t) = t - \operatorname{sen} t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

417. Calcular la longitud del arco de curva $y = x^2 + 4$, entre $x = 0$ y $x = 3$.

418. Calcula la longitud de la astroide $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$, $a > 0$.

Sugerencia. Obtener las ecuaciones paramétricas de la astroide y tener en cuenta la simetría.

419. Calcula la longitud de la cardioide $\rho = 3(1 + \cos\vartheta)$, $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$.

420. Calcula la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$ donde $2 \leqslant x \leqslant 4$.

421. Calcula la longitud de la curva $y = \log(1 - x^2)$, donde $1/3 \leqslant x \leqslant 2/3$.

8.7.8. Volúmenes de sólidos

Al igual que podemos calcular áreas de regiones planas integrando las longitudes de sus secciones por rectas paralelas a una dada, podemos también calcular volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$ integrando las áreas de sus secciones por planos paralelos a uno dado. Este resultado es un caso particular del teorema de Fubini que veremos al estudiar integrales múltiples.

8.69 Teorema (Cálculo de volúmenes por secciones planas). *El volumen de una región en $\mathbb{R}^3$ es igual a la integral del área de sus secciones por planos paralelos a uno dado.*

Para justificar esta afirmación, sea Ω una región en $\mathbb{R}^3$ como la de la figura 8.21.

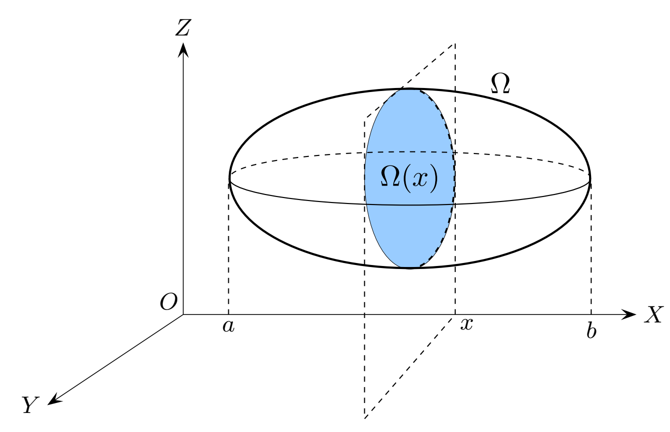


Figura 8.21. Cálculo del volumen por secciones

Representemos por $\Omega(x)$ la sección de Ω por el plano perpendicular al eje OX en el punto $(x,0,0)$. Sea $V(x)$ el volumen de la parte de Ω que queda a la izquierda de dicho plano y sea $\lambda(\Omega(x))$ el área de la sección $\Omega(x)$. Observa que la situación es totalmente análoga a la considerada en el Teorema Fundamental del Cálculo: allí teníamos la función área cuya derivada era la longitud de la sección. No debe sorprenderte por ello que ahora resulte que la derivada de la función volumen, $V(x)$, sea el área de la sección. En efecto, sea $h>0$. Suponiendo, naturalmente, que la función $x\mapsto\lambda(\Omega(x))$ es continua, tenemos que:

$$\text{mín}\left\{\lambda(\Omega(t)) : x\leqslant t\leqslant x+h\right\}h\leqslant V(x+h)-V(x)\leqslant\text{máx}\left\{\lambda(\Omega(t)) : x\leqslant t\leqslant x+h\right\}h$$

de donde se deduce que

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h}=\lambda(\Omega(x)).$$

Hemos obtenido así que $V'(x)=\lambda(\Omega(x))$. Deducimos que el volumen de Ω, que es $V(b)-V(a)$, viene dado por la integral:

$$Vol(\Omega)=\int_a^b\lambda(\Omega(x))\,\mathrm{d}x \tag{8.44}$$

El razonamiento anterior se ha hecho para secciones por planos verticales al eje OX, es decir planos paralelos al plano YZ; pero el resultado obtenido también es válido para secciones por planos paralelos a un plano dado.

Podemos llegar también a este resultado considerando sumas de Riemann. Para ello aproximamos la región Ω por cilindros de la siguiente forma. Consideremos una partición

$$\{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

de $[a, b]$. La parte de Ω comprendida entre los planos perpendiculares al eje OX por los puntos $(x_{k-1}, 0, 0)$ y $(x_k, 0, 0)$ puede aproximarse por un cilindro de altura $x_k - x_{k-1}$ y base $\Omega(x_k)$ cuyo volumen es igual $\lambda(\Omega(x_k))(x_k - x_{k-1})$. La suma de los volúmenes de todos estos cilindros, $\sum_{k=1}^{n} \lambda(\Omega(x_k))(x_k - x_{k-1})$, es por tanto una aproximación del volumen de Ω. Pero dicha suma es una suma de Riemann de la función $x \mapsto \lambda(\Omega(x))$, por lo que el volumen de Ω viene dado por $\int_a^b \lambda(\Omega(x))\,\mathrm{d}x$.

Vamos a estudiar algunos casos en los que es fácil calcular el área de las secciones de Ω.

8.7.8.1. Volumen de un cuerpo de revolución

Los cuerpos de revolución o sólidos de revolución son regiones de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen girando una región plana alrededor de una recta llamada eje de giro.

Método de los discos

Es fácil calcular el volumen de un cuerpo de revolución obtenido girando una región de tipo I alrededor del eje OX, o una región de tipo II alrededor del eje OY.

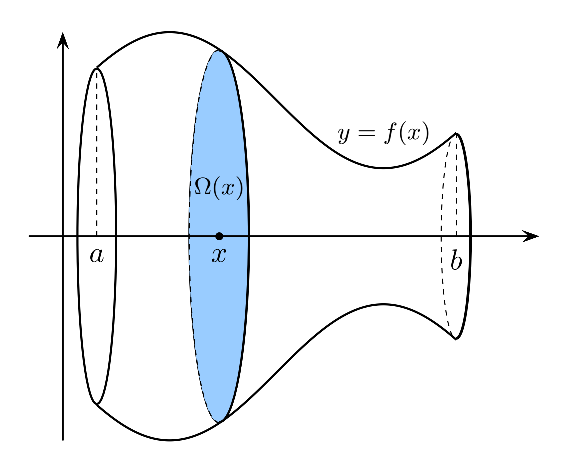


Figura 8.22. Método de los discos

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Girando la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje OX obtenemos un sólido de revolución Ω (ver figura 8.22). Es evidente que la sección, $\Omega(x)$, de Ω por el plano perpendicular al eje OX en el punto $(x, 0, 0)$, es un disco contenido en dicho plano de centro $(x, 0, 0)$ y radio $|f(x)|$. Por tanto el área de $\Omega(x)$ es $\lambda(\Omega(x)) = \pi f(x)^2$; en consecuencia el

volumen de Ω es igual a

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

El volumen del sólido de revolución, Ω, obtenido girando alrededor del eje OX una región de tipo I definida por dos funciones continuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se obtiene integrando las áreas de las coronas circulares o arandelas, $\Omega(x)$, de radio interior $f(x)$ y radio exterior $g(x)$, obtenidas al cortar Ω por un plano perpendicular al eje OX en el punto $(x, 0, 0)$.

$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2) \,\mathrm{d}x$$

Consideremos ahora un sólido de revolución obtenido girando alrededor del eje OY una región R de tipo II, definida por dos funciones continuas $\varphi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y)$ para todo $y \in [c, d]$, es decir, R es la región $R = \{(x, y) : y \in [c, d], \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$. El volumen del sólido de revolución resultante, Ω, viene dado por:

$$Vol(\Omega) = \pi \int_c^d (\psi(y)^2 - \varphi(y)^2) \,\mathrm{d}y$$

Este procedimiento se conoce como *método de los discos o de las arandelas*. Dicho método puede aplicarse con facilidad para calcular el volumen de cuerpos de revolución obtenidos girando regiones de tipo I alrededor de rectas horizontales, o regiones de tipo II alrededor de rectas verticales.

8.7.9. Ejercicios propuestos

422. Calcula el volumen de la esfera obtenida girando la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ alrededor del eje OX.

423. Calcula el volumen del cono circular recto de altura h y radio de la base R obtenido girando la recta $y = Rx/h$ entre $x = 0$ y $x = h$.

424. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX la parte de la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ comprendida entre 0 y π.

425. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{18x}{x^2 + 9}$.

426. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}\,(x^2 - 2x + 2)} \qquad (1 \leqslant x < +\infty)$$

427. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$ alrededor de dicha recta.

428. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y^2 = x$,$x^2 = y$ alrededor del eje OX.

429. Calcula el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

430. Calcula el volumen limitado por el paraboloide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = z$ y el plano $z = 7$.

Método de las láminas o de los tubos

Consideremos una función positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y la región $G(f, a, b)$ limitada por la gráfica de dicha función y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Observa que $G(f, a, b)$ es una región de tipo I pero, en general, no es una región de tipo II. Girando dicha región alrededor del eje OY obtenemos un sólido de revolución, Ω, cuyo volumen podemos aproximar considerando pequeños rectángulos verticales inscritos en la gráfica de f y girándolos alrededor del eje OY (ver figura 8.23).

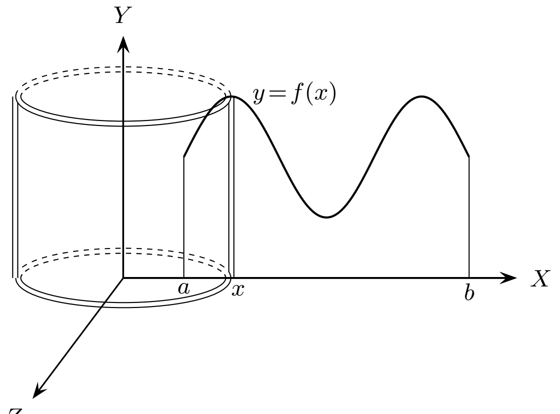


Figura 8.23. Método de las láminas o tubos

Cada uno de esos rectángulos engendra, al girarlo, un tubo cilíndrico de paredes delgadas. La suma de los volúmenes de dichos tubos es una aproximación del volumen de Ω. Naturalmente, la aproximación va mejorando a medida que hacemos que los tubos tengan paredes cada vez más delgadas.

Consideremos una partición $\{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$. Al girar alrededor del eje OY un rectángulo vertical cuya base es el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(x_k)$, obtenemos una lámina de un cilindro circular recto, esto es, un *tubo* cuya base tiene área $\pi(x_k^2 - x_{k-1}^2)$ y altura $f(x_k)$, cuyo volumen es, por tanto, igual a:

$$\pi(x_k^2 - x_{k-1}^2)f(x_k) = \pi(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1})f(x_k) =$$
$$= x_k f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + x_{k-1} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

La suma de todos ellos es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi x_k f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \pi x_{k-1} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Pero estas dos sumas son sumas de Riemann de la función $x \mapsto \pi x f(x)$. Deducimos que el volumen de Ω viene dado por:

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Esto es lo que se conoce como *método de las láminas o de las capas o de los tubos*. Puedes adaptar fácilmente esta expresión para el caso de que el eje de giro sea la recta vertical $x = c$. En general, si notamos por $R(x)$ el "radio de giro" de la lámina, entonces:

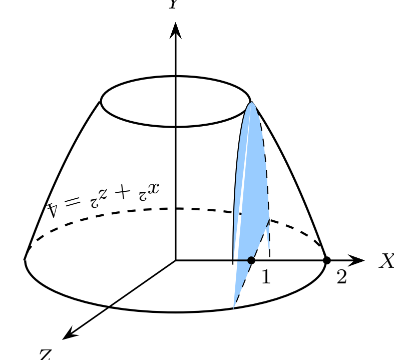
$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b R(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

8.7.10. Ejercicios propuestos

431. Calcula el volumen del toro engendrado al girar el círculo de centro $(a, 0)$ y radio $R < a$ alrededor del eje OY.

432.

La región plana limitada por el segmento de parábola $y = 4 - x^2$, donde $1 \leqslant x \leqslant 2$, y las rectas $x = 0$ e $y = 3$, gira alrededor del eje OY engendrando un sólido en forma de flan (un tronco de paraboloide de revolución). Calcula su volumen y el volumen de la porción obtenida al cortarlo verticalmente desde un punto del borde superior.



433. Calcular el volumen del sólido Ω engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ alrededor del eje OY.

434. Calcular el volumen del toro engendrado al girar el círculo de centro 0 y radio 3 alrededor de la recta $x = 6$.

435. Calcular el volumen del sólido Ω engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ alrededor la recta $x = 4$.

8.7.11. Área de una superficie de revolución

Una superficie de revolución se obtiene girando una curva dada alrededor de una recta. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con derivada primera continua. Girando la gráfica de dicha función alrededor del eje OX obtenemos una superficie de revolución, Γ. Fíjate en la siguiente representación gráfica.

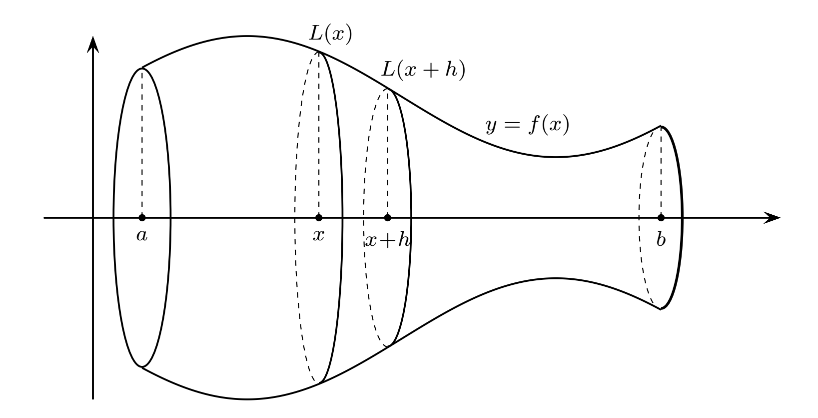


Figura 8.24. Superficie de revolución

Sea $S(x)$ el área de la parte de la superficie comprendida entre los planos $X = a$, y $X = x$. Representemos por $L(x)$ la longitud de la gráfica de f entre a y x. Recuerda que

$$L(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Sea $h > 0$. Teniendo en cuenta que el área lateral de un cilindro circular recto es igual a la longitud de la base por la altura, se deduce que:

$$\begin{aligned}2\pi \operatorname{mín}\{f(t) : t\in[x, x+h]\}(L(x+h) - L(x)) &\leqslant S(x+h) - S(x) \leqslant\\ &\leqslant 2\pi \operatorname{máx}\{f(t) : t\in[x, x+h]\}\,(L(x+h) - L(x)).\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}2\pi \operatorname{mín}\{f(t) : t\in[x, x+h]\}\frac{L(x+h) - L(x)}{h} &\leqslant \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqslant\\ &\leqslant 2\pi \operatorname{máx}\{f(t) :: t\in[x, x+h]\}\,\frac{L(x+h) - L(x)}{h}.\end{aligned}$$

Y tomando límite para $h \to 0$ se sigue que:

$$S'(x) = 2\pi f(x)L'(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Luego el área de la superficie Γ viene dada por:

$$\lambda(\Gamma) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \tag{8.45}$$

8.7.12. Ejercicios propuestos

---

436. Calcula el área de una superficie esférica de radio R.

437. Calcula el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, alrededor del eje OX.

438. Calcula el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, alrededor del eje OX.

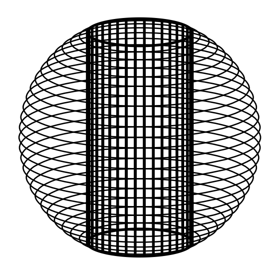
439. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OY.

440. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la catenaria $y = \cosh x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, alrededor del eje OX.

441. Al girar alrededor del eje OX el segmento de parábola $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, engendra un tronco de paraboloide de revolución cuya superficie tiene área igual a la de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$. Se pide calcular el valor de a.

442.

Se perfora, siguiendo un diámetro, una esfera de radio r con un agujero cilíndrico (ver figura) de modo que el anillo esférico resultante tiene altura h (la altura del cilindro). Calcula el volumen del anillo y el área de la superficie total del anillo.



443. Comprueba que el área de la superficie de revolución (llamada horno de Gabriel) engendrada al girar la curva $y = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant +\infty$, alrededor del eje OX es infinita (por tanto sería necesaria una cantidad infinita de pintura si quisiéramos pintarla) pero el volumen del sólido de revolución engendrado es finito(por tanto podemos llenarlo con una cantidad finita de pintura). Comenta a tu gusto esta aparente paradoja.

444. Calcula el área de un espejo parabólico de 3 metros de diámetro y 1 metro de fondo.

445. Calcula el volumen de una esfera de radio 3 en la que, siguiendo un diámetro, se ha perforado un agujero cilíndrico de radio $r < 3$. Calcula el área de la superficie total del solido obtenido. Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.

8.7.13. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **213** Calcular el área del lóbulo del folium de Descartes de ecuación cartesiana $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$.

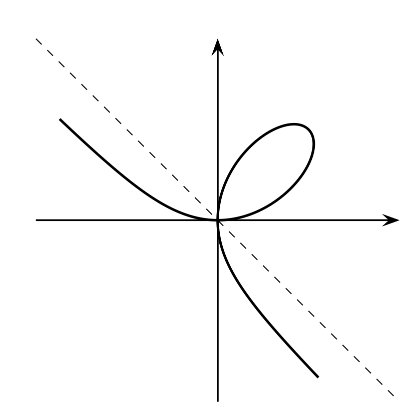
Sugerencia. Expresa la ecuación en forma polar.

Solución. Sustituyendo $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$ en la ecuación dada, después de simplificar por ρ^2, se obtiene:

$$\rho(\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta) - 3a\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta = 0.$$

Observamos que esta ecuación implica que en los puntos de dicha curva debe verificarse que $\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta \neq 0$. Pues si fuera $\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta = 0$, la ecuación anterior implica que también $\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta = 0$, de donde se sigue fácilmente que $\cos\vartheta = \operatorname{sen}\vartheta = 0$, lo que es imposible. En consecuencia, la ecuación polar de la curva puede escribirse en la forma:

$$\rho = \rho(\vartheta) = \frac{3a\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta}.$$



Se verifica que $\rho(\vartheta) = -\rho(\vartheta + \pi)$. Además, $\displaystyle\lim_{\substack{\vartheta\to-\pi/4\\ \vartheta>-\pi/4}} \rho(\vartheta) = \lim_{\substack{\vartheta\to 3\pi/4\\ \vartheta<3\pi/4}} \rho(\vartheta) = -\infty$. Por tanto, la recta $y = -x$ es una asíntota de la curva. Para $\vartheta \in]-\pi/4, 0[$ tenemos que $\rho(\vartheta) < 0$ y, por tanto, las coordenadas polares del punto correspondiente son $(|\rho(\vartheta)|, \vartheta + \pi)$; como $\vartheta + \pi \in]3\pi/4, \pi[$ estos puntos están en el segundo cuadrante. Para $\vartheta \in]0, \pi/2[$ tenemos que $\rho(\vartheta) > 0$ y los puntos correspondientes a estos valores de ϑ están en el primer cuadrante. Para $\vartheta \in]\pi/2, 3\pi/4[$ tenemos que $\rho(\vartheta) < 0$ y los puntos correspondientes a estos valores de ϑ tienen ángulo polar $\vartheta - \pi \in]-\pi/2, -\pi/4[$, por lo que están en el cuarto cuadrante. El lóbulo de la curva debe corresponder a los valores de ϑ comprendidos entre dos ceros consecutivos de ρ que solamente pueden ser $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi/2$.

El área pedida está dada por la integral:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta}{(\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta)^2}\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Parece una integral bastante impresionante, pero es todo apariencia. Se trata de una función racional par en seno y en coseno. Como ya debes saber, estas integrales se racionalizan con el cambio de variable $\operatorname{tg}\vartheta = t$.

$$I = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\vartheta = t,\ \mathrm{d}\vartheta = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \operatorname{sen}\vartheta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \vartheta = 0, t = 0;\ \vartheta = \frac{\pi}{2}, t = +\infty \end{bmatrix} = \frac{3}{4}a^2\int_0^{+\infty} \frac{6t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{4}a^2\,\frac{-1}{1+t^3}\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{3}{4}a^2.$$

☺

Ejercicio resuelto **214** Calcula el área de la región común a las dos elipses

$$(E_1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (E_2)\quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Sugerencia. Representa gráficamente las elipses. Usa la simetría polar para simplificar los cálculos y pasar a coordenadas polares.

Solución. Este ejercicio puede hacerse en coordenadas cartesianas y también pasando a coordenadas polares. Vamos a hacerlo de las dos formas.

Puedes ver las elipses en la figura 8.25. Por simetría, para calcular el área pedida es suficiente calcular el área de la parte común de las elipses que queda en el primer cuadrante. En coordenadas cartesianas dicha región, que se ha representado ampliada a la derecha de las elipses, es unión de dos regiones de tipo I, Ω_1 y Ω_2, cuyas áreas ya sabes calcular. La gráficas de las partes superiores de las elipses E_1 y E_2 vienen dadas respectivamente por:

$$y_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y_2(x) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Los puntos de intersección de las elipses se obtienen resolviendo la ecuación

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$$

cuyas soluciones son $x = \pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Pongamos $\alpha = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Puedes comprobar que $y_1(\alpha) = y_2(\alpha) = \alpha$. Por tanto, los cuatro puntos de intersección son $(\pm\alpha, \pm\alpha)$. El área pedida es igual a:

$$4\lambda(\Omega_1) + 4\lambda(\Omega_2) = 4\int_0^\alpha \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x + 4\int_\alpha^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

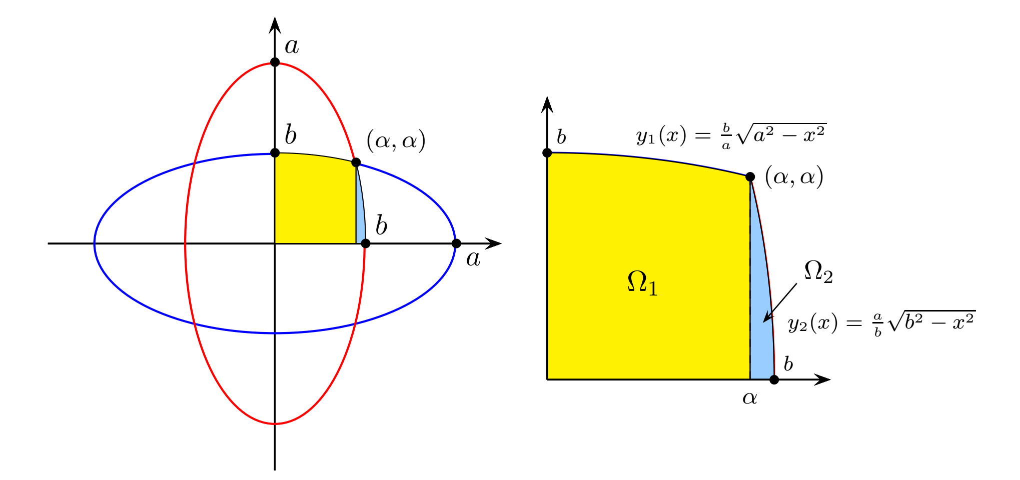


Figura 8.25. Área de una región limitada por dos elipses

Una primitiva de estas integrales se calcula fácilmente. Suponiendo que $|x| \leqslant c$, tenemos que:

$$\int \sqrt{c^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \big[x = c\,\mathrm{sen}\,t\big] = c^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = c^2\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= c^2\frac{t}{2} + c^2\frac{\mathrm{sen}(2t)}{4} = c^2\frac{t}{2} + c^2\frac{\mathrm{sen}\,t\cos t}{2} = \frac{c^2}{2}\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x}{c} + \frac{c^2}{2}\frac{x}{c}\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} =$$
$$= \frac{c^2}{2}\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x}{c} + \frac{x}{2}\sqrt{c^2 - x^2}.$$

Por tanto:

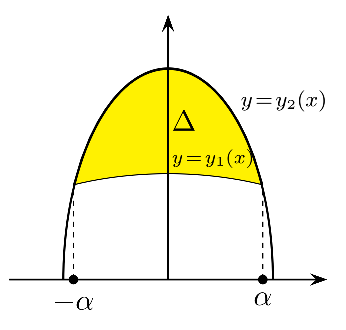
$$\int y_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}xy_1(x), \qquad \int y_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{b} + \frac{1}{2}xy_2(x).$$

Teniendo en cuenta que $y_1(\alpha) = y_2(\alpha)$ y que $y_2(b) = 0$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} 4\lambda(\Omega_1) + 4\lambda(\Omega_2) &= 2ab\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{\alpha}{a} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen}\frac{\alpha}{b}\right) = \\ &= 2ab\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \\ &= 4ab\operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad hemos usado que para todo $x \in [-1,1]$ se verifica que $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$, como fácilmente puedes comprobar.

Otra forma de proceder es como sigue. Recordando (ver ejercicio resuelto 212) que el área de una elipse de semiejes a y b es igual a πab, para calcular el área pedida es suficiente calcular el área de la región Δ interior a la elipse E_2 y que queda por encima de la elipse E_1. El área pedida será igual a $2(\pi ab/2 - \lambda(\Delta)) = \pi ab - 2\lambda(\Delta)$. Tenemos que:



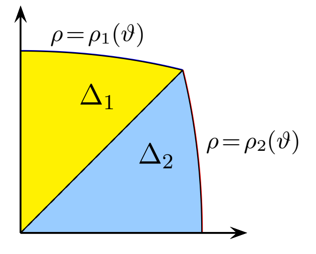
$$\lambda(\Delta) = \int_{-\alpha}^{\alpha} (y_2(x) - y_1(x))\,\mathrm{d}x = ab\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

El área pedida es igual a:

$$\pi ab - 2\lambda(\Delta) = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Valor que coincide con el antes obtenido.

Podemos hacer este ejercicio usando las ecuaciones polares de las elipses. Para ello, ponemos $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$ y sustituimos en las respectivas ecuaciones obteniendo:



$$(E_1)\ \ \rho_1 = \rho_1(\vartheta) = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\vartheta + a^2\operatorname{sen}^2\vartheta}} \qquad (E_2)\ \ \rho_2 = \rho_2(\vartheta) = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}$$

Por los cálculos hechos antes, sabemos que las elipses se cortan para valores de ϑ igual a $\pm\pi/4$ y $\pm 3\pi/4$. Si no lo supiéramos deberíamos calcular dichos valores resolviendo la ecuación $\rho_1(\vartheta) = \rho_2(\vartheta)$. Podemos calcular fácilmente en coordenadas polares el área de

la región común a las dos elipses que queda en el primer cuadrante. Su valor viene dado por:

$$\lambda(\Delta_1)+\lambda(\Delta_2)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\rho_1(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta\;+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\rho_2(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Para evaluar estas integrales, calcularemos una primitiva apropiada.

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{u^2\cos^2 t+v^2\operatorname{sen}^2 t}=[\operatorname{tg}t=x]=\int\frac{\mathrm{d}x}{v^2+u^2x^2}=\frac{1}{uv}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v}{u}\operatorname{tg}t\right).$$

Por tanto:

$$\lambda(\Delta_1)+\lambda(\Delta_2)=\frac{ab}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}t\right)\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}^{t\to\frac{\pi}{2}}+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}t\right)\bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}+\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)=ab\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

Donde en la última igualdad hemos usado que $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}(1/x)=\frac{\pi}{2}$ para todo $x>0$, como fácilmente puedes comprobar. Concluimos que el área de la región común de las dos elipses es:

$$4\lambda(\Delta_1)+4\lambda(\Delta_2)=4ab\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

Comparando con un resultado anterior, deducimos que debe ser:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}=\operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Equivalentemente, poniendo $x=\frac{b}{a}$ que es un número positivo cualquiera, debe verificarse que:

$$\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

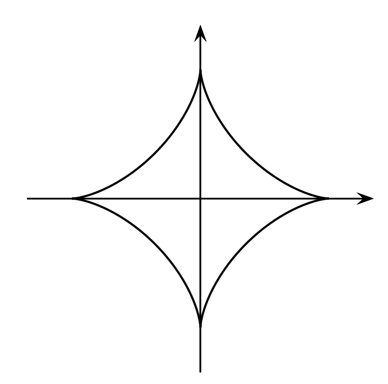
Igualdad que puedes comprobar muy fácilmente calculando la derivada de la función $h(x)=\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ para $x\in\mathbb{R}$. ☺

Ejercicio resuelto **215** Calcula la longitud de la astroide $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}=1$, $a>0$.

Sugerencia. Obtener las ecuaciones paramétricas de la astroide y usar la simetría.

Solución.

Como debes saber bien, dos números u, v tales que $u^2 + v^2 = 1$, pueden escribirse en la forma $u = \cos t$, $v = \operatorname{sen} t$ para algún valor de $t \in \mathbb{R}$; y dicho valor es único si se eligen valores para t en un determinado intervalo semiabierto de longitud 2π. La ecuación cartesiana de la astroide es de la forma $u^2 + v^2 = 1$ donde $u = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ y $v = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$. Por tanto, podemos representar los puntos (x, y) de la astroide en la forma $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\operatorname{sen}^3 t$ donde $t \in [-\pi, \pi]$. Estas son las ecuaciones paramétricas de dicha curva. Observa que las coordenadas



de los puntos de la astroide de parámetro a se obtienen elevando al cubo las coordenadas de los puntos de una circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt[3]{a}$. Esto pone de manifiesto las simetrías de la astroide con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen. Los puntos de la astroide que están en el primer cuadrante corresponden a valores de $t \in [0, \pi/2]$. Teniendo en cuenta la simetría de la curva, la longitud de la misma viene dada por:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}\,\mathrm{d}t = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2t)\,\mathrm{d}t = 6a.$$

☺

Ejercicio resuelto **216** Calcula la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$ donde $2 \leqslant x \leqslant 4$.

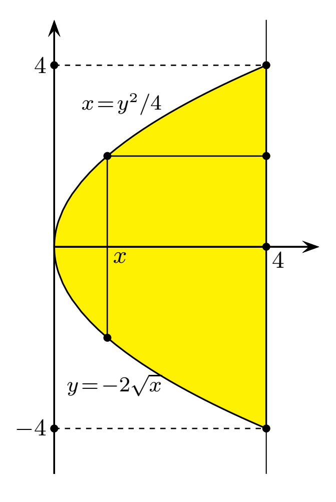
Solución. Lo único que hay que hacer es calcular la integral:

$$\int_2^4 \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^4 - 16}{8x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{x^4 + 16}{8x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{17}{6}.$$

Ejercicio resuelto **217** Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$ alrededor de dicha recta.

Solución. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.

Por el método de los discos debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y. Los puntos de corte de la parábola con la recta son $(4,4)$ y $(4,-4)$. Por tanto, en la región indicada, tenemos que $y \in [-4,4]$. La sección por una recta horizontal es un disco cuyo radio en cada punto de la curva $x = y^2/4$ es la distancia de dicho punto a la recta $x = 4$, que es igual a $4 - y^2/4$. El volumen pedido viene dado por la integral:

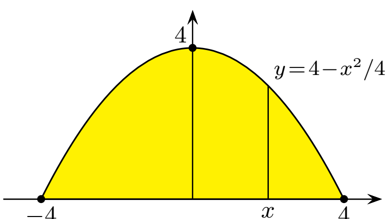


$$\pi \int_{-4}^{4} (4 - y^2/4)^2 \,\mathrm{d}y = \pi \frac{1024}{15}$$

Para calcular el volumen por el método de las láminas o tubos debemos tomar como variable x. Hay que tener en cuenta que cada segmento vertical de abscisa x que gira tiene de longitud $4\sqrt{x}$ y su radio de giro respecto al eje es $4 - x$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$2\pi \int_{0}^{4} (4 - x)4\sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \pi \frac{1024}{15}$$

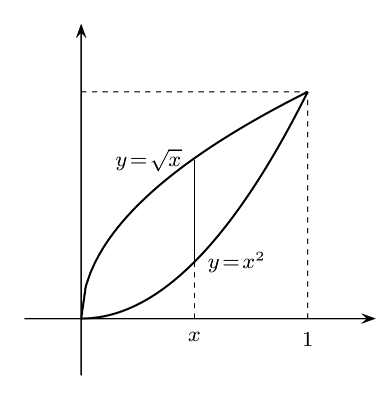
Observa que haciendo un giro y una traslación, este ejercicio equivale a calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la parábola $y = 4 - x^2/4$ alrededor del eje OX. ☺



Ejercicio resuelto **218** Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$ alrededor del eje OX.

Solución. Observa que para que para que las dos igualdades $y^2 = x$, $x^2 = y$ tengan sentido debe ser $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Por tanto, la igualdad, $y^2 = x$ equivale, por ser $y \geqslant 0$, a $y = \sqrt{x}$. Es inmediato que los puntos de corte de las parábolas son $(0,0)$ y $(1,1)$. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.

Por el método de los discos (arandelas en este caso) debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable x y que en la región indicada, tenemos que $x \in [0,1]$. La sección por una recta vertical de abscisa x es una corona circular o arandela cuyo radio interior es $r_1(x) = x^2$ y radio exterior $r_2(x) = \sqrt{x}$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:



$$\pi\int_0^1 (r_2(x)^2 - r_1(x)^2)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{10}.$$

Para calcular el volumen por el método de los tubos, debemos considerar los segmentos horizontales que giran alrededor del eje OX. Deberemos tomar como variable a y. La longitud del segmento horizontal de altura y es $\sqrt{y} - y^2$ y su radio de giro respecto del eje OX es y. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$2\pi\int_0^1 y(\sqrt{y} - y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{10}.$$

☺

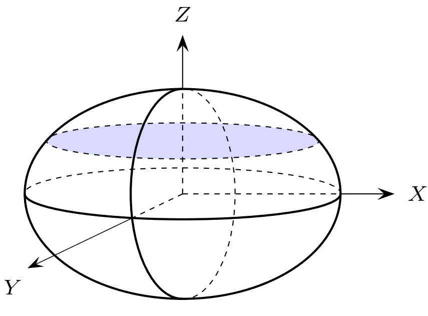
Ejercicio resuelto **219** Calcula el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución. La intersección del elipsoide con un plano de *altura fija* z paralelo al plano XY se proyecta sobre el plano XY en una elipse, $E(z)$, de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \iff \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

Es una elipse de semiejes $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ y $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$. Sabemos que el área de dicha elipse es igual a $\pi ab\big(1-\frac{z^2}{c^2}\big)$. Por tanto, el volumen del elipsoide podemos obtenerlo integrando el área de las secciones $E(z)$ para $z \in [-c,c]$.

Dicho volumen es igual a:

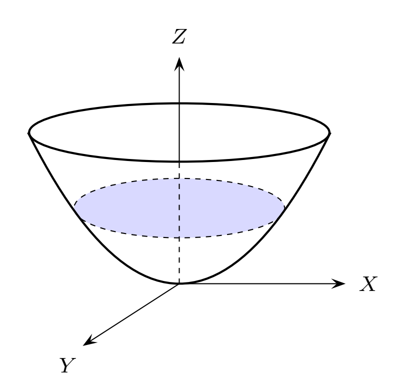


$$\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Observa que para el caso en que $a = b = c = r$, es decir, el elipsoide es una esfera de radio r, obtenemos la conocida fórmula para el volumen de una esfera. ☺

Ejercicio resuelto 220 Calcula el volumen limitado por el paraboloide $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=z$ y el plano $z=7$.

La intersección del paraboloide con un plano de *altura fija* z paralelo al plano XY se proyecta sobre el plano XY en una elipse, $E(z)$, de ecuación:



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=z \iff \frac{x^2}{\left(3\sqrt{z}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(4\sqrt{z}\right)^2}=1$$

Es una elipse de semiejes $3\sqrt{z}$ y $4\sqrt{z}$. Sabemos que el área de dicha elipse es igual a $12\pi z$. Por tanto, el volumen del paraboloide podemos obtenerlo integrando el área de dichas secciones $E(z)$ para $z\in[0,7]$. Dicho volumen es igual a:

$$12\pi\int_0^7 z\,\mathrm{d}z=\frac{49}{6}\pi.$$

Ejercicio resuelto 221 Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}\,(x^2-2x+2)}\qquad (1\leqslant x<+\infty).$$

Solución. Se trata de calcular la integral $\pi\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$. Es claro que el trinomio $x^2-2x+2=1+(x-1)^2$ no tiene raíces reales. El denominador tiene raíces imaginarias múltiples y podemos usar el método de Hermite. Para ello escribimos:

$$\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{Mx+N}{x^2-2x+2}\right)=$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{2M+2N-2Nx-Mx^2}{(x^2-2x+2)^2}=$$
$$=\frac{4A+(-8A+2C+2M+2N)x+(8A+2B-2C-2N)x^2+(-4A-2B+C-M)x^3+(A+B)x^4}{x(x^2-2x+2)^2}$$

Fácilmente se obtiene que $A=1$, $B=-1$, $C+M+N=4$, $C+N=3$, $C-M=2$, de donde, $M=1$, $C=3$, $N=0$. Por tanto

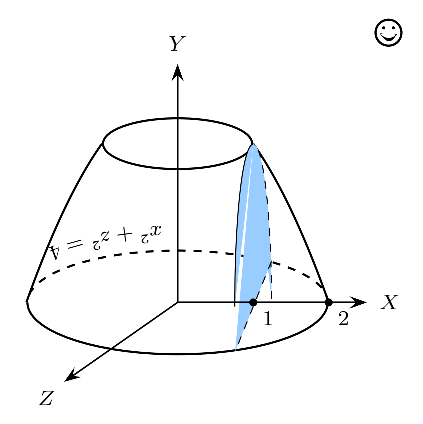
$$\int_1^t\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\log t+\int_1^t\frac{-x+3}{x^2-2x+2}dx+\frac{x}{x^2-2x+2}\Bigg|_1^t=$$
$$=\log t+2\operatorname{arc\,tg}(x-1)\Big|_1^t-\frac{1}{2}\log(x^2-2x+2)\Big|_1^t+\frac{t}{t^2-2t+2}-1=$$
$$=\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)+2\operatorname{arc\,tg}(t-1)+\frac{t}{t^2-2t+2}-1$$

Deducimos que

$$\pi \int_1^{+\infty} \frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \pi \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \pi(\pi-1)$$

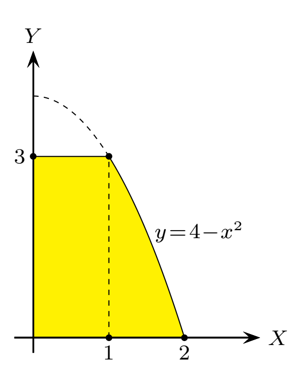
☺

Ejercicio resuelto 222



La región plana limitada por el segmento de parábola $y = 4 - x^2$, donde $1 \leqslant x \leqslant 2$, y las rectas $x = 0$ e $y = 3$, gira alrededor del eje OY engendrando un sólido en forma de flan (un tronco de paraboloide de revolución). Calcula su volumen y el volumen de la porción obtenida al cortarlo verticalmente desde un punto del borde superior.

Solución.

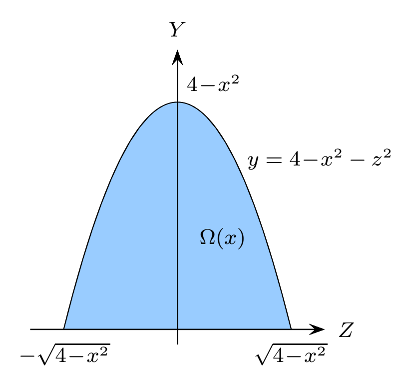


Podemos calcular el volumen por el método de los discos. Para ello debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y y que en la región indicada, tenemos que $y \in [0, 3]$. La sección por una recta horizontal de ordenada y es un disco cuyo radio es $r(y) = \sqrt{4-y}$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$\pi \int_0^3 r(y)^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^3 (4-y)\,\mathrm{d}y = \frac{15\pi}{2}.$$

También podemos calcular el volumen por el método de los tubos, en cuyo caso viene dado por:

$$2\pi \int_0^1 3x\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_1^2 x(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{15\pi}{2}.$$



Calcularemos ahora el volumen de la porción obtenida al cortar verticalmente el tronco de paraboloide desde un punto del borde superior. Observa que para cada *valor fijado* de $x \in [1, 2]$ la sección por el plano de abscisa x paralelo a ZY es un segmento parabólico, $\Omega(x)$, cuyo vértice es $4 - x^2$ y cuyo pie es el segmento de extremos $-\sqrt{4-x^2}$ y $\sqrt{4-x^2}$ (la cuerda que se obtiene al cortar la circunferencia de centro el origen y radio 2 por una recta de abscisa x). La proyección de

dicha parábola sobre el plano ZY debe tener una ecuación de la forma $y = 4 - x^2 - \mu z^2$ donde μ se calcula por la condición de que $y = 0$ para $z = \pm\sqrt{4 - x^2}$, con lo que resulta $\mu = 1$. En consecuencia, la ecuación de dicha parábola en el plano ZY es $y = 4 - x^2 - z^2$. El área del segmento parabólico $\Omega(x)$ viene dada por la integral:

$$\lambda(\Omega(x)) = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{16}{3}\sqrt{4-x^2} - \frac{4}{3}x^2\sqrt{4-x^2}$$

Integrando las áreas de dichas secciones se obtiene el volumen pedido, que viene dado por:

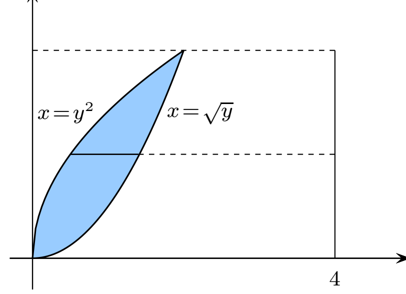
$$\int_1^2 \lambda(\Omega(x))\,\mathrm{d}x = -3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.$$

Cálculo que ya debes saber hacer. ☺

Ejercicio resuelto **223** Calcular el volumen del sólido Ω engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ alrededor la recta $x = 4$.

Solución.

Observa que para que para que las dos igualdades $y^2 = x$, $x^2 = y$ tengan sentido debe ser $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Por tanto, la igualdad, $y^2 = x$ equivale, por ser $y \geqslant 0$, a $y = \sqrt{x}$. Es inmediato que los puntos de corte de las parábolas son $(0,0)$ y $(1,1)$. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.



Por el método de los discos (arandelas en este caso) debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y y que en la región indicada, tenemos que $y \in [0,1]$. La sección por una recta horizontal de ordenada y es una corona circular o arandela cuyo radio interior es la distancia del eje de giro a la parábola $x = \sqrt{y}$, dicha distancias es $r_1(y) = 4 - \sqrt{y}$ y cuyo radio exterior es la distancia del eje de giro a la parábola $x = y^2$, dicha distancia es $r_2(y) = 4 - y^2$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$\pi\int_0^1 (r_2(y)^2 - r_1(y)^2)\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 \left((4 - y^2)^2 - (4 - \sqrt{y})^2\right)\mathrm{d}y = \frac{71\pi}{30}.$$

Para calcular el volumen por el método de las láminas o tubos debemos tomar como variable x. Hay que tener en cuenta que cada segmento vertical que gira de abscisa $x \in [0,1]$ tiene de longitud $\sqrt{x} - x^2$ y el radio de giro es $4 - x$. Por tanto el volumen es:

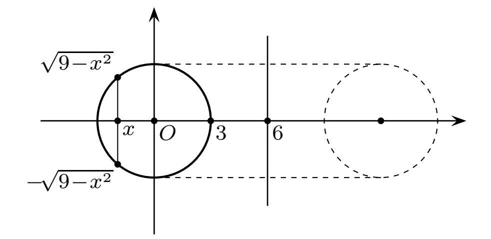
$$2\pi\int_0^1 (4 - x)(\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{71\pi}{30}.$$

☺

Ejercicio resuelto **224** Calcular el volumen del toro engendrado al girar el círculo de centro $(0,0)$ y radio 3 alrededor de la recta $x = 6$.

Solución.

Aplicaremos el método de las láminas o de los tubos. Para ello debemos considerar los segmentos paralelos al eje de giro; en nuestro caso serán los segmentos verticales comprendidos en el círculo de centro $(0,0)$ y radio 3. La longitud del segmento vertical de abscisa $x \in [-3,3]$ es igual a $2\sqrt{9-x^2}$ y su radio de giro es $6-x$. El volumen del toro engendrado es:



$$2\pi \int_{-1}^{1} (6-x)2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = 108\pi^2.$$

También se puede calcular el volumen por el método de las arandelas. Ya debes saber hacerlo, te lo dejo para que lo hagas tú. ☺

Ejercicio resuelto **225** Calcula el área de una superficie esférica de radio R.

Solución. Una superficie esférica de radio R se obtiene girando la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ alrededor del eje OX. El área viene dada por:

$$2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-R}^{R} R\,\mathrm{d}x = 4\pi R^2.$$

☺

Ejercicio resuelto **226** Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ alrededor del eje OY.

Solución. Expresando x como función de y, tenemos que $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, donde solamente consideramos la mitad de la elipse que está en el semiplano de la derecha $x \geqslant 0$. Queremos calcular el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $h(y)=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ alrededor del eje OY. Dicha área viene dada por la integral:

$$I = 2\pi \int_{-b}^{b} h(y)\sqrt{1+h'(y)^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi\frac{a}{b^2}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^4+(a^2-b^2)y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Para calcularla debemos considerar dos posibilidades según que $a>b$ o que $b>a$ (el caso $a=b$ es trivial y se vuelve a obtener el mismo resultado del ejercicio anterior). Pongamos $c=\sqrt{|a^2-b^2|}$. Entonces, si $a>b$ es $c^2=a^2-b^2$, y si $b>a$ es $c^2=b^2-a^2$. Por lo que:

$$I = 2\pi\frac{a}{b^2}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^4 \pm c^2y^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi\frac{ac}{b^2}\int_{-b}^{b}\sqrt{\left(\frac{b^2}{c}\right)^2 \pm y^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi\frac{a}{\alpha}\int_{-b}^{b}\sqrt{\alpha^2 \pm y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Donde hemos puesto $\alpha = \frac{b^2}{c}$. Podemos evaluar directamente estas integrales porque tienen primitivas inmediatas que deberías saber de memoria (repasa la tabla de primitivas inmediatas). Pero también podemos calcularlas muy fácilmente.

$$\int_{-b}^{b} \sqrt{\alpha^2 + y^2}\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} y = \alpha \operatorname{senh} t \\ \beta = \operatorname{argsenh} \frac{b}{\alpha} \end{bmatrix} = \alpha^2 \int_{-\beta}^{\beta} \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \alpha^2 \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}}{2} + 1\right) \mathrm{d}t = \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \cosh(2t)\,\mathrm{d}t = \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{4} \operatorname{senh}(2t)\Big|_{-\beta}^{\beta} =$$

$$= \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{2}\operatorname{senh}(2\beta) = \alpha^2\beta + \alpha^2 \operatorname{senh}(\beta)\cosh(\beta) = \alpha^2\beta + \alpha b\sqrt{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}} =$$

$$= \alpha^2 \operatorname{argsenh}\frac{b}{\alpha} + \alpha b\sqrt{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}}.$$

Simplificando, obtenemos que para el caso en que $a > b$, el área pedida es igual a:

$$2\pi a \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{argsenh}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) + a \right).$$

Es un buen ejercicio de cálculo que compruebes estos resultados paso a paso. Te garantizo que el resultado final obtenido es correcto. Un resultado parecido se obtiene para el caso en que $b > a$. Lo dejo para que lo hagas tú. ☺

8.8. Evolución de la idea de integral

8.8.1. Problemas de cuadraturas en las matemáticas griegas

[5] Los problemas de cuadraturas son problemas geométricos que consisten en lo siguiente: dada una figura, construir un cuadrado con área igual a la de la figura dada. Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás, siguiendo unas normas precisas. Según lo establecido en los *Elementos* de Euclides (*c.* 300 a.C.) la construcción debe constar de un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

- Trazar una recta que una dos puntos.
- Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios.
- Intersecar dos de las figuras anteriores.

Son famosos los problemas de la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la inscripción de polígonos regulares en una circunferencia. En la antigua Grecia se sabía cuadrar cualquier polígono.

[5] Para escribir estas notas históricas he seguido de cerca los trabajos de Kirsti Andersen [1], Israel Kleiner [10], González Urbaneja [7] y H. J. M. Bos [2].

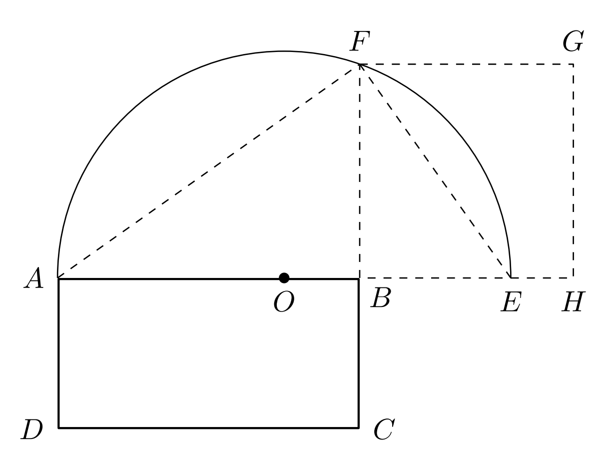


Figura 8.26. Cuadratura de un rectángulo

Para cuadrar el rectángulo $ABCD$ de la figura 8.26 se procede de la forma siguiente:

1) Se prolonga el lado AB y se determina sobre él un punto E tal que $BE = BC$.

2) Se traza con centro en el punto medio O de AE una semicircunferencia de radio OE.

3) Se traza por B una perpendicular a AE y se determina su punto de corte F con la semicircunferencia.

4) El segmento FB es el lado de un cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo $ABCD$. Esto es consecuencia de que la altura FB de un triángulo rectángulo AFE es media proporcional entre las dos partes en que divide a la hipotenusa, es decir, $FB/AB = BE/FB$, por lo que $FB^2 = AB.BE = AB.BC$.

A partir de aquí es fácil obtener la cuadratura de un triángulo, lo que permite obtener la cuadratura de cualquier polígono descomponiéndolo en triángulos. Los matemáticos griegos inventaron un procedimiento, que se conoce con el nombre de "exhausción", por el cual podían lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas. Se atribuye a Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) la invención de este método, que fue perfeccionado posteriormente por Arquímedes (*c.* 287 - 212 a.C.). El siguiente es un notable ejemplo de su aplicación.

8.8.1.1. Cuadratura de un segmento de parábola por Arquímedes

8.70 Teorema. *El área del segmento parabólico PVQ es igual a cuatro tercios el área del triángulo inscrito $\triangle PVQ$.*

Demostración. Esta demostración aparece en una carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus, obra que se conoce con el nombre de *Sobre la Cuadratura de la Parábola*. La demostración consiste en hacer una descomposición exhaustiva del segmento parabólico por medio de triángulos de una forma muy ingeniosa. Empezaremos explicando la construcción geométrica de la figura 8.27.

Una *cuerda* PQ de una parábola es un segmento que une dos de sus puntos. La región plana acotada, cuya frontera está formada por la cuerda PQ y el arco de la parábola comprendido

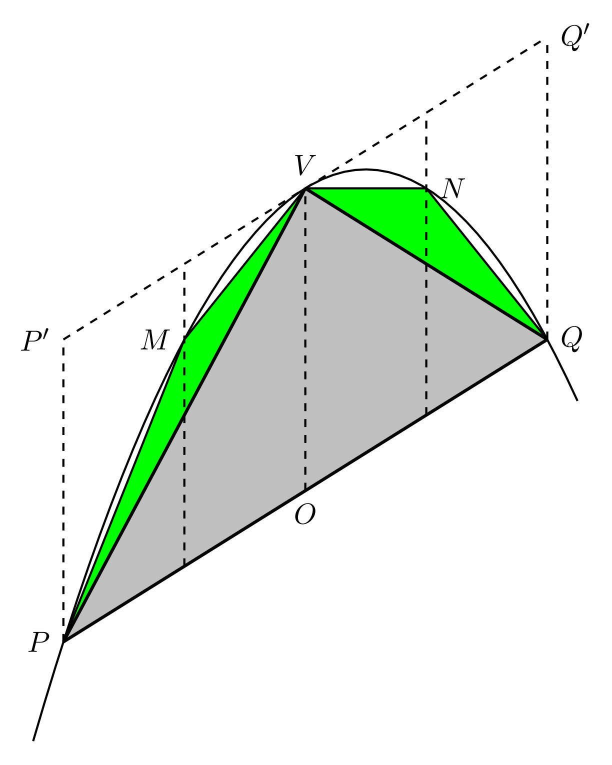


Figura 8.27. Cuadratura de un segmento de parábola

entre los puntos P y Q se llama un *segmento parabólico*. El *vértice* de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la cuerda que define el segmento.

Se verifica que el vértice de un segmento parabólico PVQ es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio $O = \frac{1}{2}(P+Q)$ del segmento PQ.

El triángulo $\triangle PVQ$ cuya base es el segmento PQ y cuyo otro vértice es el vértice V del segmento parabólico le llamaremos el triángulo inscrito.

En la figura 8.27 se han representado también los triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$ inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PV y VQ.

La primera parte de la demostración consiste en calcular el área de los dos triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$. Arquímedes demuestra que

$$\lambda(\triangle VNQ) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOQ), \qquad \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOP)$$

Por tanto

$$\lambda(\triangle VNQ) + \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle PVQ) \tag{8.46}$$

Llamando S al área del triángulo $\triangle PVQ$, el área de los dos nuevos triángulos es $\frac{1}{4}S$. Naturalmente, este proceso se puede repetir ahora con cada uno de los cuatro segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PM, MV, VN y NQ inscribiendo en ellos los respectivos triángulos, la suma de cuyas áreas será igual a $\frac{1}{16}S$. Y puede repetirse indefinidamente.

Nosotros ahora acabaríamos calculando el área del segmento parabólico por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} S = \frac{4}{3} S$$

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series ni falta que le hace, razona de forma muy elegante por medio de la doble reducción al absurdo usual en la matemática griega.

Para ello hace uso de la llamada *propiedad arquimediana* o *axioma de Arquímedes*. Este axioma aparece en el libro de Arquímedes *La Esfera y el Cilindro* así como en *Sobre la Cuadratura de la Parábola* y en *Espirales*. Al parecer, dicho axioma fue ya formulado por Eudoxo. Como sabemos, la propiedad arquimediana establece que:

> *Dadas magnitudes cualesquiera $a > 0$ y $b > 0$, siempre es posible, por pequeña que sea a y grande que sea b, conseguir que un múltiplo conveniente de a exceda a b, es decir $na > b$ para algún número natural n.*

Partiendo de la propiedad arquimediana se deduce fácilmente el siguiente resultado, llamado *principio de convergencia de Eudoxo*, en el que se basa el llamado *método de exhausción* griego:

> *Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este procesos de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.*

Arquímedes razona como sigue. Sea K el área del segmento parabólico PVQ.

(I) Supongamos que $K > \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S > 0$.

Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico PVQ es la mitad del área del paralelogramo circunscrito $PP'QQ'$, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Por tanto, en la sucesión de áreas

$$K, K - S, K - (S + \frac{1}{4}S), K - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S), \dots$$

cada una es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que

$$K - \frac{4}{3}S > K - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right)$$

Esto implica que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S$$

lo que es contradictorio con la igualdad, conocida por Arquímedes, que dice que:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S \tag{8.47}$$

la cual implica que $S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S$. Por tanto, no puede ser $K > \frac{4}{3}S$.

(II) Supongamos que $K < \frac{4}{3}S$; es decir, que $\frac{4}{3}S - K > 0$.

Como cada una de las áreas $S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \dots, \frac{1}{4^n}S$ es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que $\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K$. Entonces

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right)$$

Lo que implicaría que

$$K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S$$

Que es absurdo pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico. Por tanto, no puede ser $K < \frac{4}{3}S$.

La única posibilidad es $K = \frac{4}{3}S$. □

8.8.1.2. *El Método* de Arquímedes

En su tratado *El Método*, que se creía perdido y fue descubierto en 1906, Arquímedes obtiene la cuadratura de la parabola por medios mecánicos usando el principio de la palanca. Aunque el propio Arquímedes *reconoce que esa forma de proceder no es una demostración*, merece la pena decir algo sobre ella.

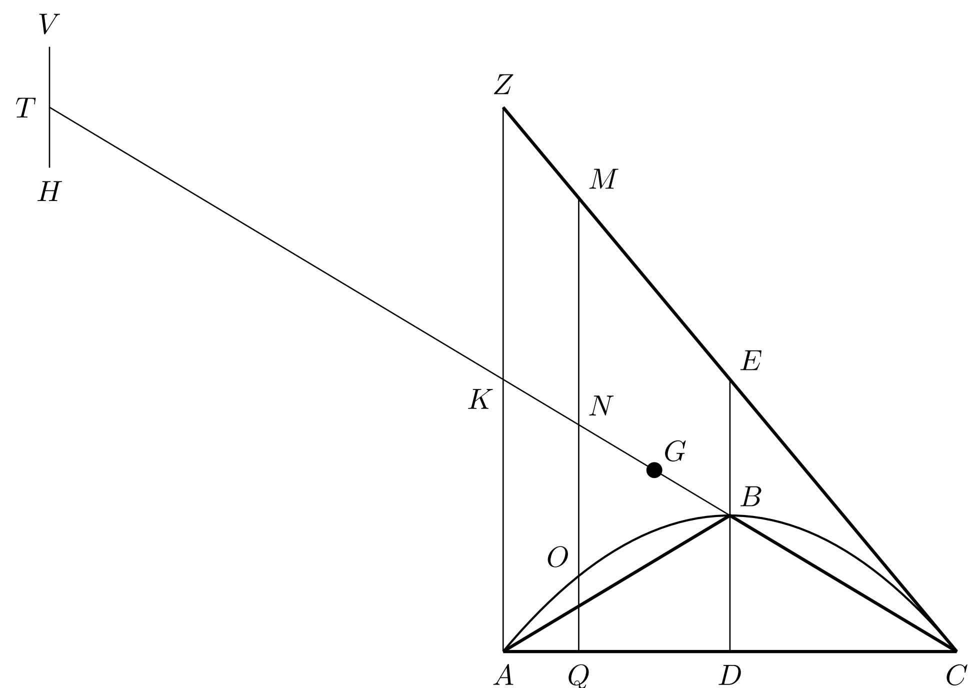


Figura 8.28. El *Método* de Arquímedes

La recta CZ es la tangente a la parábola en C, B es el vértice del segmento parabólico. El segmento AZ es perpendicular a la cuerda AC, CT es la recta que pasa por el punto C y el vértice B de forma que K es el punto medio del segmento CT. Se considera CT como un brazo de palanca con fulcro en K.

Por ser ABC una parábola, se sabe que la subtangente ED en un punto C es igual al doble de la abscisa BD (conviene imaginarse la parábola girada 90 grados), es decir, $ED = 2BD$, de donde, $EB = BD$. Deducimos, por la semejanza de triángulos en la figura, que $MN = NQ$ y ZK=KA.

Arquímedes demuestra en *Sobre la Cuadratura de la Parábola* que

$$\frac{CA}{AQ} = \frac{MQ}{QO}$$

Y, como también es $\dfrac{CA}{AQ} = \dfrac{CK}{KN}$, y por construcción es $TK = CK$, obtenemos que

$$\frac{TK}{KN} = \frac{MQ}{QO} \Longleftrightarrow TK.QO = KN.MQ$$

Si ahora trasladamos al punto T un segmento de longitud igual a QO y lo ponemos como en la figura el segmento VH de modo que su centro de gravedad sea el punto T, la igualdad anterior nos dice que el segmento $VH = QO$ queda equilibrado por el segmento MQ, pues el producto de dichos segmentos por la longitud correspondiente del brazo de palanca con fulcro en K es la misma. Obsérvese que N es el centro de gravedad del segmento MQ. Deducimos que K es el centro de gravedad de los segmentos VH y MQ.

Análogamente puede razonarse con cualquier paralela al eje de la parábola ED, todas ellas estarán en equilibrio con los segmentos determinados sobre ellas por el segmento parabólico trasladados al punto T, de manera que el centro de gravedad de cada par de segmentos será el punto K.

Ahora bien, los segmentos paralelos a DE *“componen”* el triángulo $\triangle AZC$ y los correspondientes segmentos dentro del segmento parabólico *“componen”* dicho segmento parabólico. Por tanto el triángulo AZC *“permaneciendo en su lugar”*, estará en equilibrio respecto del punto K con el segmento parabólico trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos será el punto K.

Dividimos ahora CK por el punto G de forma que CK sea el triple de KG, el punto G será el centro de gravedad del triángulo AZC,y puesto que el triángulo AZC, “permaneciendo en su lugar” está en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento parabólico ABC, trasladado con centro de gravedad en T, y que G es el centro de gravedad del triángulo AZC, se verifica, por consiguiente, que la razón del triángulo AZC al segmento parabólico ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de TK a KG. Ahora bien, siendo TK triple de KG, el triángulo AZC será triple del segmento parabólico ABC. Además, el triángulo AZC es cuádruple del triángulo inscrito ABC, ya que ZK es igual que KA y KA es doble de BD al ser AD igual que DC. Concluimos que el segmento parabólico ABC equivale a cuatro tercios del triángulo inscrito ABC. □

8.8.1.3. Área de una espiral

El siguiente ejemplo de cuadratura sigue un procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo de la integral de Riemann.

La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas *curvas mecánicas*. La ecuación polar de una espiral de Arquímedes es de la forma $\rho = a\vartheta$, donde $a > 0$ es una constante.

8.71 Teorema. *El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.*

Demostración. Consideremos una espiral de Arquímedes de ecuación polar $\rho = a\vartheta$ y calculemos el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a 2π, es decir, de la primera vuelta de la espiral. El radio del círculo circunscrito es $2\pi a$. Para ello dividimos este círculo en sectores de amplitud $\vartheta = 2\pi/n$, desde $\vartheta = 2\pi k/n$ a $\vartheta = 2\pi(k+1)/n$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$. En cada sector examinamos el arco de espiral que queda dentro del mismo y acotamos el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares. Teniendo en cuenta que el área de un sector circular de radio r y amplitud φ radianes es $\frac{1}{2}r^2\varphi$, resulta que el área de sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es $\frac{1}{2}(a2\pi k/n)^2(2\pi/n)$, y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es $\frac{1}{2}(a2\pi(k+1)/n)^2(2\pi/n)$. Deducimos que el área, S, de la espiral verifica que:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 < S < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

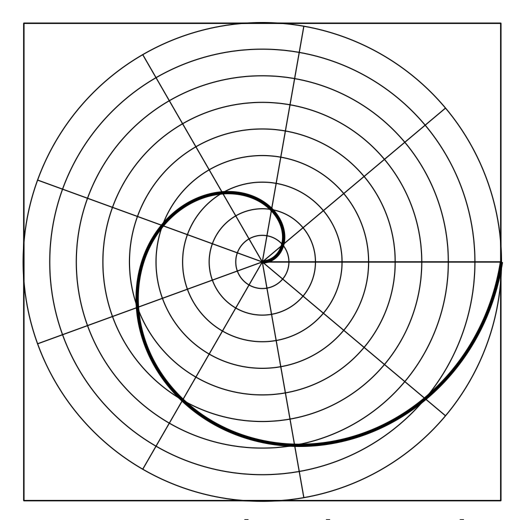


Figura 8.29. Cuadratura de una espiral

Arquímedes conocía que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Usando este resultado podemos

escribir la desigualdad anterior en la forma:

$$4\pi^3a^2\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < S < 4\pi^3a^2\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Pongamos $K = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$ que es una tercera parte del área del círculo circunscrito. Restando K en la desigualdad anterior y haciendo operaciones sencillas, obtenemos que:

$$K\left(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) < S-K < K\left(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right);$$

y como $1/n^2 \leqslant 1/n$, obtenemos que $-2K/n < S-K < 2K/n$. Usando ahora el axioma de Arquímedes se concluye que $S = K$. □

8.8.2. La integración antes del Cálculo

8.8.2.1. Los indivisibles de Cavalieri

El método de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhausción que había sido inventado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. El nombre es desafortunado porque la idea central del método es la de evitar el infinito y por lo tanto este método no lleva a un "agotamiento" de la figura a determinar.

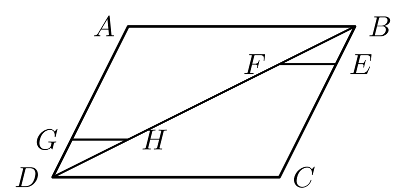
Entre los matemáticos del siglo XVII era general el deseo de encontrar un método para obtener resultados y que, a diferencia del método de exhausción, fuera directo. Y mejor que mejor si el nuevo método, aparte de dar resultados, pudiera ser utilizado para demostrarlos.

El camino que siguieron fue el que se deriva de una concepción intuitiva inmediata de las magnitudes geométricas. Se imaginaron un área como formada, por ejemplo, por un número infinito de líneas paralelas. Kepler ya había hecho uso de métodos infinitesimales en sus obras; el interés que se tomó en el cálculo de volúmenes de toneles de vino dio como resultado un libro *Nova stereometria doliurum vinariorum* (1615). En él consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos de diversas maneras por una cantidad infinita de partes sólidas. Por ejemplo, consideraba una esfera como formada por un número infinito de conos con vértice común en el centro y base en la superficie de la esfera. Esto le conducía al resultado de que la esfera es igual en volumen al cono que tiene como altura el radio de la esfera y como base un círculo igual al área de la esfera, es decir un círculo con el diámetro de la esfera como radio.

Galileo tenía la intención de escribir un libro sobre indivisibles, pero este libro nunca se publicó.

Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), discípulo de Galileo y profesor en la Universidad de Bolonia, publicó en 1635 un tratado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota* en el que, siguiendo ideas de Kepler y Galileo, desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas, llamada *método de los indivisibles*. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los *indivisibles* de área y volumen respectivamente. En líneas generales los "indivisibilistas" mantenían, como expresa Cavalieri en sus *Exercitationes Geometricae Sex* (1647), que *una línea*

está hecha de puntos como una sarta de cuentas; el plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras y un sólido de áreas planas como un libro de hojas.



La forma en que se aplicaba el método o principio de Cavalieri puede ilustrarse como sigue. Para demostrar que el paralelogramo $ABCD$ tiene área doble que cualquiera de los triángulos ABD o BCD, hace notar que cuando $GD = BE$, se tiene que $GH = FE$. Por tanto los triángulos ABD y BCD están constituidos por igual número de líneas iguales, tales como GH y EF, y por tanto sus áreas deben ser iguales.

8.8.2.2. Cuadratura de la cicloide por Roberval

En 1630, Mersenne, propuso a sus amigos matemáticos hacer la cuadratura de la cicloide. Esta fue llevada a cabo por Gilles Personne de Roberval en 1634, utilizando esencialmente el método de los indivisibles de Cavalieri. Recuerda que la cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar.

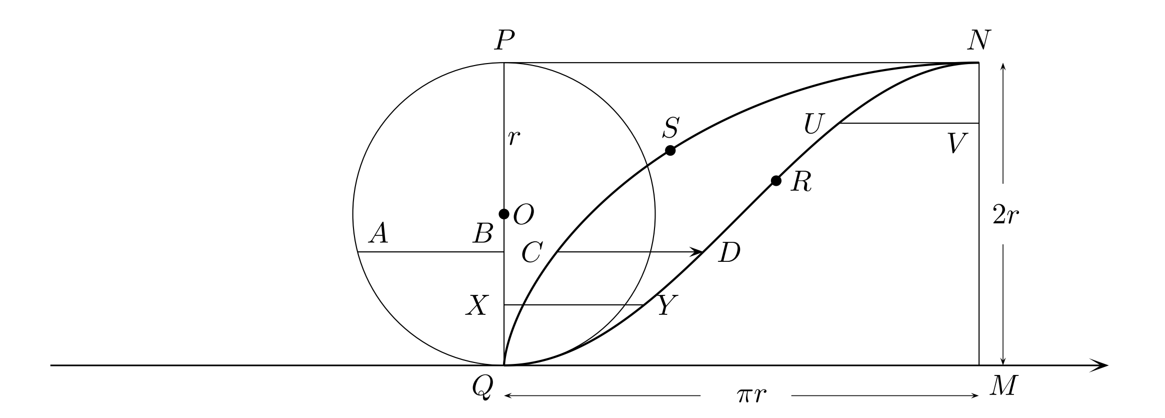


Figura 8.30. Cuadratura de la cicloide

En la figura 8.30, sea $QMNS$ la mitad de un arco de la cicloide generada por el círculo de radio r centrado en O. El área del rectángulo $QMNP$ es el doble del área del círculo. Construimos segmentos de línea infinitesimales horizontales, AB, con longitud determinada por la distancia horizontal entre el diámetro PQ y la circunferencia. Cada punto C de la cicloide lo sometemos a una traslación horizontal hasta el punto D, según el correspondiente segmento $AB = CD$, y así obtenemos la curva QRN, llamada compañera de la cicloide. Por la construcción realizada, las secciones horizontales del semicírculo y de la región comprendida entre la cicloide y su

curva compañera son segmentos de igual longitud, por lo que dicha región tiene área igual a la mitad del circulo. Por otra parte, la curva compañera de la cicloide divide en dos partes iguales al rectángulo $QMNP$, pues, como Roberval demostró, las secciones horizontales de altura a y $2r - a$ dan en cada una de las partes en que dicha curva divide al rectángulo, segmentos iguales XY y UV. Deducimos así que el área encerrada por la mitad de un arco de cicloide es $\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$. Por tanto, concluimos que el área encerrada por un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera.

Los matemáticos no se mostraban de acuerdo acerca del valor que había que dar a una demostración por el método de los indivisibles. La mayoría de los que se preocupaban de la cuestión consideraban el método de los indivisibles sólo como un método heurístico y creían que era aún necesaria una demostración por exhausción.

8.8.2.3. Parábolas e hipérbolas de Fermat

La cuadratura de las curvas definidas por $y = x^n$ donde n es un número natural o bien un entero negativo $n \neq -1$, había sido realizada para $n = 1, 2 \ldots, 9$ por Cavalieri, aunque podemos remontarnos hasta Arquímedes que había resuelto geométricamente los casos correspondientes a $n = 1, 2, 3$. Fermat, con una ingeniosa idea, logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas $x^n y^m = 1$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

Fermat seguía un método clásico de exhausción, pero con una idea feliz que consistió en considerar rectángulos infinitesimales inscritos en la figura a cuadrar cuyas bases estaban en progresión geométrica. Fermat considera al principio las hipérbolas $yx^n = k$ y manifiesta:

> *Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general.*

Vamos a hacernos una idea de cómo calculaba Fermat la cuadratura de la hipérbola generalizada $y = x^{-2}$ para $x \geqslant a$. Usaremos notación y terminología actuales.

Elegimos un número $r > 1$ y consideremos los puntos de abscisas $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$. Los rectángulos inscritos (ver figura 8.31) tienen área

$$(ar - a)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \cdots = \frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{1}{ar}$$

El área de los rectángulos circunscritos viene dada por

$$(ar - a)\frac{1}{a^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \cdots = \frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{r}{a}$$

Por tanto, llamando S al área bajo la curva, tenemos que

$$\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a}$$

Como esta desigualdad es válida para todo $r > 1$, concluimos que $S = \dfrac{1}{a}$. Observa que dicho valor es precisamente el área del rectángulo $OABa$.

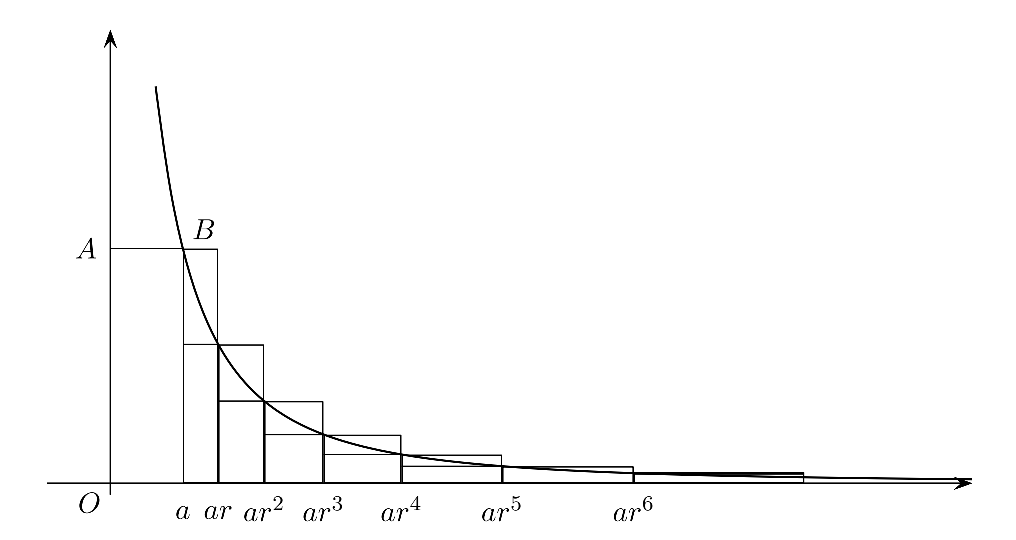


Figura 8.31. Cuadratura de la hipérbola de Fermat $y = x^{-2}$

El razonamiento de Fermat tiene detalles muy interesantes que se pierden usando la terminología y símbolos actuales. Vamos a reproducir parte de su razonamiento. Fermat se apoya en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, que enuncia como sigue:

> *Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes.*

Llamemos $R_1, R_2, R_3, \dots$ a las áreas de los sucesivos rectángulos y S a la suma de todas ellas. Como se trata de una progresión geométrica decreciente, se tiene que:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$$

Simplificando, resulta

$$S - R_1 = OA.AB = \frac{1}{a}$$

Dice Fermat:

> [...] *si ahora añadimos* [a ambos miembros de esta igualdad] *el rectángulo* R_1 *que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes... No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto la que ha sido indicada* [la hipérbola de Apolonio].

Vemos cómo en las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas, subyacen los aspectos esenciales de la integral definida:

- La división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.

- Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva.
- Un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

8.8.2.4. La integración aritmética de Wallis

Jhon Wallis (1616 - 1703) publicó en 1655 un tratado *Arithmetica infinitorum* ("La Aritmética de los infinitos") en el que aritmetizaba el método de los indivisibles de Cavalieri. Para ilustrar el método de Wallis consideremos el problema de calcular el área bajo la curva $y = x^k$ ($k = 1, 2, \dots$) y sobre el segmento $[0, a]$ (ver figura (8.32)). Siguiendo a Cavalieri, Wallis considera la región PQR formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud igual a x^k. Por tanto, si dividimos el segmento $PQ = AB = a$ en n partes de longitud $h = a/n$, donde n es infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es del tipo

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k \tag{8.48}$$

Análogamente, el área del rectángulo $ABCD$ es

$$a^k + a^k + a^k + \cdots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \cdots + (nh)^k \tag{8.49}$$

La razón entre el área de la región PQR y el rectángulo $ABCD$ es

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} \tag{8.50}$$

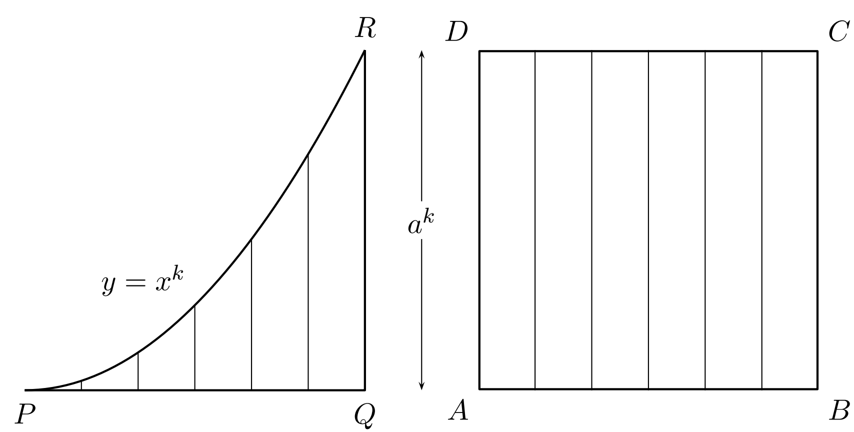


Figura 8.32. Comparando indivisibles

Esto lleva a Wallis a estudiar el valor de la expresión (8.50) para $n = \infty$[6]. Después de estudiar varios casos para valores de $k = 1, 2, 3$ haciendo, en cada caso, sumas para distintos

[6] Fue precisamente Wallis quien introdujo en 1655 en la obra *De Sectionibus Conicis*, el símbolo del "lazo del amor", ∞, con el significado de "infinito".

valores de $n = 1, 2, 3, 4$, Wallis observa ciertas regularidades en las mismas y, con tan débil base, acaba afirmando que para $n = \infty$ y para todo $k = 1, 2, \ldots$, se verifica que:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1} \tag{8.51}$$

Naturalmente, de aquí deduce el valor del área de la región PQR:

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{\text{Área } PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \text{Área } PQR = \frac{a^{k+1}}{k+1} \quad k = 1, 2, 3 \ldots \tag{8.52}$$

Este resultado ya era conocido anteriormente, pero Wallis no se paraba aquí y extendía la validez de la igualdad (8.51) a todos los exponentes racionales positivos. Su peculiar razonamiento tiene interés pues en él se basó Newton para obtener la serie binomial. Lo esencial del mismo puede resumirse, en términos actuales, como sigue.

Definamos el índice, $\sigma(f)$, de una función f mediante la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{f(n) + f(n) + f(n) + \cdots + f(n)} = \frac{1}{\sigma(f) + 1} \tag{8.53}$$

suponiendo que dicho límite tenga sentido. Por ejemplo, (8.51) nos dice que el índice de la función $f_k(x) = x^k$ es $\sigma(f_k) = k$ para $k = 1, 2, \ldots$.

Wallis observó que, dada una progresión geométrica de potencias de x como, por ejemplo $1, x^3, x^5, x^7, \ldots$, la correspondiente sucesión de índices $0, 3, 5, 7, \ldots$ forman una progresión aritmética. Como $\sigma(f_k) = k$, esta observación es trivial, pero le permite dar un atrevido salto adelante, de manera que mediante una audaz interpolación establece (sin demostración) que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica

$$1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \ldots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x$$

de manera que la sucesión de sus índices debe formar una progresión aritmética, de donde se sigue que debe ser $\sigma\big((\sqrt[q]{x})^p\big) = p/q$ para $p = 1, 2, \ldots, q$. De esta forma obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{0})^p + (\sqrt{1})^p + (\sqrt{2})^p + (\sqrt{3})^p + \cdots + (\sqrt{n})^p}{(\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + \cdots + (\sqrt{n})^p} = \frac{1}{p/q + 1}$$

Wallis estaba convencido de la validez de su método, conocido posteriormente como *interpolación de Wallis*, que tuvo importancia en el siglo XVIII. Puede considerarse como un intento de resolver el siguiente problema:

> *Dada una sucesión P_k, definida para valores enteros de k, encontrar el significado de P_α cuando α no es un número entero.*

Además, Wallis deduce que *necesariamente debe ser* $(\sqrt[q]{x})^p = x^{p/q}$. Será Newton, poco más tarde, quien siguiendo los pasos de Wallis, introducirá el uso de potencias fraccionarias y negativas.

Wallis, incluso llega a afirmar que la igualdad

$$\int_0^a x^r \, dx = \frac{a^{r+1}}{r+1} \tag{8.54}$$

no es válida solamente para exponentes r racionales, sino también para otros como $r = \sqrt{3}$ pero, naturalmente, no puede dar ninguna justificación.

Obtenida, a su manera, la cuadratura fundamental (8.54), Wallis intenta calcular la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Dicha integral representa el área bajo la semicircunferencia de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$, su valor es, por tanto, $\pi/8$. Wallis quería obtener dicho resultado evaluando directamente la integral. No tuvo éxito en este empeño que Newton habría de resolver posteriormente, pero sus resultados le llevaron a obtener la llamada *fórmula de Wallis*

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

8.8.2.5. El resultado fundamental de Barrow

Barrow estuvo muy cerca de descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer uso efectivo de esta relación. Veamos cómo aparece esa relación tal como se expone en la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Geometricae*.

En la figura (8.33) se han representado dos curva $y = f(x)$ e $y = g(x)$. El segmento AD representa el eje de abscisas donde toma valores x. La cantidad $g(x)$ representa el valor del área bajo la gráfica de f comprendida entre el punto A y x. Dado un punto de abscisa D, se trata de probar que la pendiente de la tangente a $y = g(x)$ en el punto F, es decir en el punto $(D, g(D))$, es igual a $f(D) = DE$. La demostración de Barrow es geométrica.

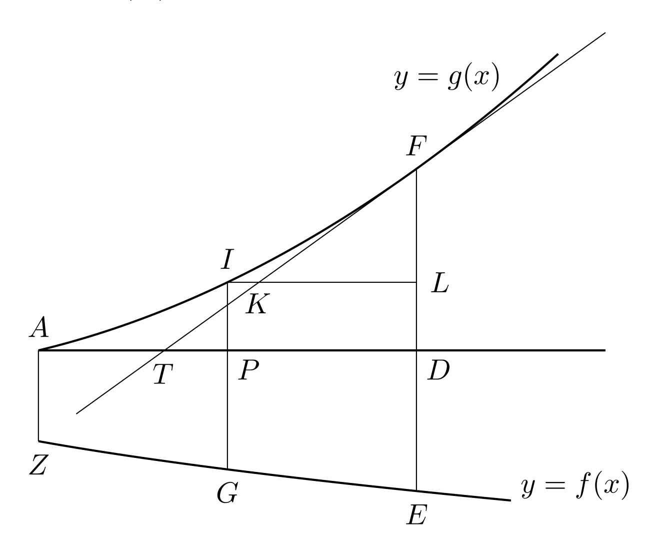


Figura 8.33. Teorema Fundamental

Tracemos una línea recta FT por F que corta en T a la recta AD y tal que

$$DF/TD = f(D) = DE$$

Queremos probar que FT es la tangente a $y = g(x)$ en el punto F. Para ello vamos a ver que la distancia horizontal, KL, de cualquier punto L de la recta EF a la recta FT es menor que la distancia, IL, de dicho punto L a la curva $y = g(x)$. Esto probará que la recta FT queda siempre por debajo de $y = g(x)$.

Tenemos que:

$$FL/KL = DF/TD = DE$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\text{área } ADEZ &= FD \\ \text{área } APGZ &= PI = LD \\ \text{área } PDEG &= FD - LD = FL\end{aligned}$$

Ya que

$$\text{área } PDEG < \text{rectángulo } PD.DE \tag{8.55}$$

Se sigue que

$$FL < PD.DE \longrightarrow DE > FL/PD$$

y por tanto

$$FL/KL > FL/PD \longrightarrow KL < PD = IL$$

Deducimos que el punto K queda debajo de la curva $y = g(x)$ y por tanto la recta FT queda a un lado de la curva. Para completar la demostración es necesario repetir el razonamiento tomando puntos a la derecha de EF. Esto prueba que TF es tangente a $y = g(x)$ en D y su pendiente es $DE = f(D)$. En términos actuales, lo que Barrow ha probado es que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

8.8.3. La relación fundamental entre cuadraturas y tangentes

8.8.3.1. El Teorema Fundamental del Cálculo según Newton

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow. Este trabajo, además de contener el teorema binomial y los descubrimientos de Newton relativos a series infinitas, contiene también un claro reconocimiento de la relación inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes. La exposición que hace Newton de esta relación fundamental es como sigue. Supone una curva y llama z al área bajo la curva hasta el punto de abscisa x (ver figura 8.34). Se supone conocida la relación entre x y z. Aunque Newton explica su método con un ejemplo, queda perfectamente claro su carácter general. El ejemplo que Newton considera es

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}} \tag{8.56}$$

Pongamos, por comodidad $r = \frac{m+n}{n}$. Newton se imagina que el punto $P = (x, y)$ se mueve a lo largo de la curva y razona como sigue. Incrementemos la abscisa x a $x + o$ donde o es

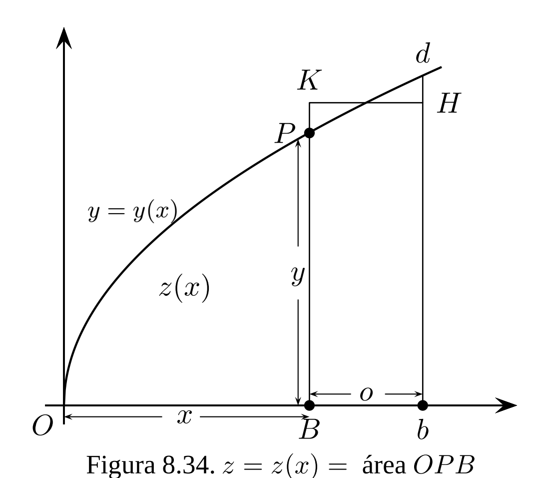


Figura 8.34. $z = z(x) =$ área OPB

una cantidad infinitesimal o *momento*. Tomemos $BK = v$ de forma que $ov =$ área $BbHK =$ área $BbPd$. El incremento del área viene dado por:

$$ov = z(x+o) - z(x) = \frac{a}{r}(x+o)^r - \frac{a}{r}x^r \tag{8.57}$$

Desarrollando en potencias

$$\frac{a}{r}(x+o)^r = \frac{a}{r}x^r(1+o/x)^r = \frac{a}{r}x^r\left(1 + r\frac{o}{x} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{o^2}{x^2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{o^3}{x^3} + \cdots\right) \tag{8.58}$$

De (8.57) y (8.58) deducimos, después de dividir por o, que:

$$v = ax^{r-1} + \frac{a(r-1)}{2}ox^{r-2} + \frac{a(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}o^2x^{r-3} + \cdots$$

Si en esta igualdad suponemos que o va disminuyendo hasta llegar a ser nada, en cuyo caso v coincidirá con y, después de eliminar los términos que contienen o que desaparecen, resulta que:

$$y = ax^{r-1} = ax^{\frac{m}{n}} \tag{8.59}$$

Este es, por tanto, el valor de la ordenada de la curva en $P = (x, y)$. El proceso puede invertirse y, de hecho, ya se sabía que la cuadratura de (8.59) viene dada por (8.56).

Observemos que Newton no ha usado el significado tradicional de la integral al estilo de sus predecesores, es decir, no ha interpretado la integral como un límite de sumas de áreas infinitesimales, sino que ha probado que la expresión que proporciona la cuadratura es correcta estudiando la variación momentánea de dicha expresión. De hecho, lo que Newton ha probado es que la razón de cambio del área bajo la curva, esto es, el cociente

$$\frac{z(x+o) - z(x)}{o}$$

se hace igual a la ordenada de la curva cuando o "se hace nada". En términos actuales, la derivada de $z(x)$ es la función $y = y(x)$. La relación simétrica entre cuadraturas y derivadas queda así puesta claramente de manifiesto. Para calcular cuadraturas, basta con calcular una antiderivada, lo que llamamos una primitiva de la función $y = y(x)$.

8.8.3.2. La invención del *calculus summatorius* por Leibniz

Ya hemos comentado en el capítulo 6 (ver pg. 320) las principales ideas que guiaron a Leibniz en la invención del Cálculo:

- La creación de un simbolismo matemático que automatizara los cálculos y permitiera formular fácilmente procesos algorítmicos.
- La apreciación de que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra.
- La consideración de las curvas como polígonos de infinitos lados de longitudes infinitesimales y de las variables como sucesiones que toman valores consecutivos infinitamente próximos.

Se conservan en el archivo Leibniz en Hannover los manuscritos que contienen las investigaciones de Leibniz sobre los problemas de cuadraturas. En dichos documentos, fechados del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675, Leibniz investiga la posibilidad de formular simbólicamente los problemas de cuadraturas e introduce los símbolos que actualmente usamos para la integral y la diferencial. Los progresos de Leibniz se exponen de forma concisa y clara en el trabajo de H.J.M. Bos [2] que sigo muy de cerca. Algunos de los resultados de Leibniz en estos manuscritos son casos particulares de la regla de integración por partes, como, por ejemplo, la siguiente igualdad (se supone $f(0)=0$):

$$\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x = af(a)-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = a\int_0^a f'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \tag{8.60}$$

Por supuesto, Leibniz no la escribe así. Recuerda que la notación que usamos para la derivada se debe a J.L. Lagrange y es bastante tardía, de finales del siglo XVIII. Además, la notación que usamos para indicar los límites de integración fue introducida por J. Fourier en el primer tercio del siglo XIX. Incluso el término "integral" no se debe a Newton ni a Leibniz. Leibniz llamó *calculus differentialis*, esto es "cálculo de diferencias", a la parte de su cálculo que se ocupa del estudio de tangentes, y *calculus summatorius*, o sea "cálculo de sumas", a la que se ocupa de problemas de cuadraturas. Para Leibniz una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales, el símbolo que ideó para representarlas, "$\int$" tiene forma de una "s" alargada como las que en aquel tiempo se usaban en la imprenta; además, es la primera letra de la palabra latina *summa*, o sea, "suma". Fue Johann Bernoulli quien, en 1690, sugirió llamar *calculus integralis* al cálculo de cuadraturas, de donde deriva el término "integral" que usamos actualmente.

De hecho, Leibniz obtuvo la fórmula (8.60) antes de inventar su notación para las integrales y las diferenciales. Es interesante mostrar cómo lo hizo. Para ello vamos a seguir el camino opuesto al seguido por Leibniz, modificando la notación de dicha fórmula hasta llegar a escribirla como lo hizo él.

Podemos interpretar gráficamente la igualdad (8.60) sin más que observar la figura 8.35.

El número $af(a)$ es el área del rectángulo $OAPB$, la integral $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ es el área de la parte de dicho rectángulo OAP que queda bajo la curva $y=f(x)$. Deducimos de (8.60) que

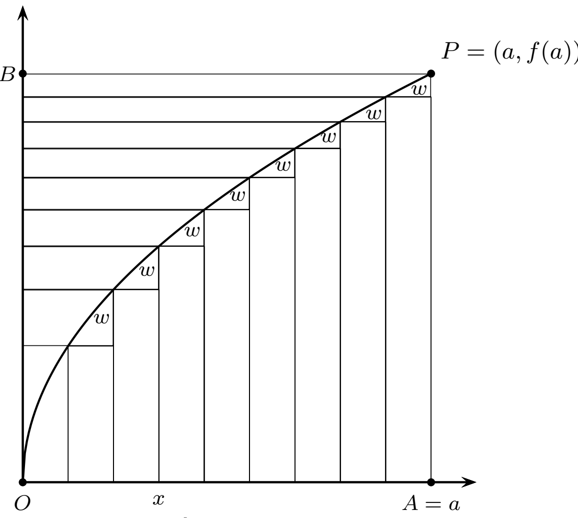


Figura 8.35. Áreas complementarias

la integral $\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x$ es el área de la parte OBP de dicho rectángulo que queda por encima de la curva $y = f(x)$. Esta área es la suma de las áreas de rectángulos horizontales como los representados en la figura 8.35. Estos rectángulos horizontales tienen como base el valor de la abscisa correspondiente, x, y como altura la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, que Leibniz representa por w. Esta diferencia es lo que posteriormente se llamará diferencial de y. Podemos, pues, interpretar que $w = \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Por su parte, el área de la región OAP es considerada por Leibniz como la suma de las ordenadas y. Finalmente, podemos eliminar y porque para Leibniz el valor de una variable puede obtenerse sumando sus diferencias consecutivas, por eso, y puede verse como la suma de las w. Esto equivale, en nuestra notación, a sustituir $f(x)$ por $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ (o, al estilo de Leibniz, y por $\int \mathrm{d}y$), lo que también hemos hecho en la igualdad (8.60). La forma exacta en que Leibniz escribió la igualdad 8.60, según se lee en [2], es:

$$\text{omn.}\,\overline{xw} \sqcap \text{ult.}\,x,\ \overline{\text{omn.}\,w,} - \overline{\text{omn.}\,\text{omn.}\,w} \tag{8.61}$$

Aquí $\sqcap$ es el símbolo para la igualdad, "ult. x" significa el *ultimus* x, el último de los x, es decir, $OA = a$. El símbolo "omn." es la abreviatura de *omnes lineae*, "todas las líneas", símbolo que había sido usado por Cavalieri y que Leibniz usa con el significado de "una suma". Se usan también líneas por encima de los términos y comas donde ahora pondríamos paréntesis.

En un manuscrito posterior en algunos días, Leibniz vuelve a escribir la igualdad 8.61 en la forma:

$$\text{omn.}\,x\ell \sqcap x\,\text{omn.}\,\ell - \text{omn.}\,\text{omn.}\,\ell, \tag{8.62}$$

y observa que omn. antepuesto a una magnitud lineal como ℓ da un área; omn. antepuesto a un área como $x\ell$ da un volumen y así sucesivamente.

> [2]... Estas consideraciones de homogeneidad dimensional parecen haber sido las que sugirieron a Leibniz el usar una única letra en vez del símbolo "omn.", porque escribe a continuación: "Sería conveniente escribir "$\int$" en lugar de "omn.", de tal manera que $\int \ell$ represente omn.ℓ, es decir, la suma de todas las ℓ". Así fue como se introdujo el signo "$\int$" [...] E inmediatamente a continuación escribe Leibniz la fórmula (8.62) utilizando el

nuevo formalismo:

$$\int x\ell = x\int \ell - \int\int \ell \tag{8.63}$$

haciendo notar que:

$$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

y subrayando que estas reglas se aplican a "las series en las que la razón de las diferencias de los términos a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada", es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas.

Una líneas más adelante nos encontramos también con la introducción del símbolo "d" para la diferenciación. Aparece en el contexto de un brillante razonamiento que puede resumirse de la forma siguiente: el problema de las cuadraturas es un problema de suma de sucesiones, para lo cual hemos introducido el símbolo "$\int$" y para el que queremos elaborar un *cálculo*, es decir, un conjunto de algoritmos eficaces. Ahora bien, sumar sucesiones, es decir hallar una expresión general para $\int y$ dada la y, no es posible normalmente, pero siempre lo es encontrar una expresión para las diferencias de una sucesión dada. Así pues, el cálculo de diferencias es la operación recíproca del cálculo de sumas, y por lo tanto podemos esperar dominar el cálculo de sumas desarrollando su recíproco, el cálculo de diferencias. Para citar las mismas palabras de Leibniz:

> Dada ℓ y su relación con x, hallar $\int \ell$. Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, supongamos que $\int \ell = ya$ y sea $\ell = ya/d$; entonces de la misma manera que la $\int$ aumenta las dimensiones, d las disminuirá. Pero la $\int$ representa una suma y d una diferencia, y de la y dada podemos encontrar siempre y/d o ℓ, es decir, la diferencia de las y.

Así se introduce el símbolo "d" (o más bien el símbolo "$1/d$"). [. . .] De hecho, pronto se da cuenta de que ésta es una desventaja notacional que no viene compensada por la ventaja de la interpretación dimensional de la $\int$ y de d, y pasa a escribir "$d(ya)$" en vez de "ya/d", y de ahí en adelante son interpretadas la d y la $\int$ como símbolos adimensionales [. . .].

En el resto del manuscrito Leibniz se dedica a explorar este nuevo simbolismo, al que traduce viejos resultados, y a investigar las reglas operacionales que rigen la $\int$ y la d.

Esta larga cita, extraída del trabajo de H.J.M. Bos *Newton, Leibniz y la tradición leibniziana* ([2]), nos da una idea de cómo llegó Leibniz a la invención del cálculo. No fueron los caminos del razonamiento lógico deductivo los seguidos por Leibniz sino los de la intuición, la conjetura, el estudio de casos particulares y su generalización . . . Los mismos caminos que hoy siguen los matemáticos activos en sus trabajos de investigación. Pese a que los conceptos que maneja Leibniz son oscuros e imprecisos fue capaz de desarrollar algoritmos de cálculo eficaces y de gran poder heurístico. Como ya hemos indicado en el capítulo 6, el cálculo de Leibniz triunfó en el continente europeo gracias a los trabajos de los hermanos Bernouilli y al libro de texto del Marqués de L'Hôpital que divulgó las técnicas del cálculo leibniziano por toda Europa.

Capítulo 9

Series numéricas

Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. ¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera?– dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una serie infinita *de distancias? Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse.*

Lewis Carroll

9.1. Conceptos básicos

En este capítulo continuamos con el estudio de las sucesiones empezado en el Capítulo 7. La novedad es que ahora vamos a considerar un tipo *particular* de sucesiones que, sin exagerar, puede afirmarse que son las más útiles del Análisis. Estas sucesiones se llaman *series*.

En lo que sigue vamos a considerar sucesiones de números reales por lo que evitaremos esa innecesaria precisión.

9.1 Definición. Dada una sucesión $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,\ A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \dots$$

o, si te gusta más, $A_1 = a_1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$. La sucesión $\{A_n\}$ así definida se llama *serie de término general* a_n o *serie definida por la sucesión* $\{a_n\}$, y la representaremos por $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ o, más sencillamente, $\sum a_n$. El número $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ se llama *suma parcial de orden* n de la serie $\sum a_n$.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***. Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series***. En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "acotada", "convergente" o "positivamente divergente".

Si una serie $\sum a_n$ es convergente se usa el símbolo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

Por tanto, la igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, hay un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|\sum_{k=1}^{n} a_k - S| < \varepsilon$.

9.2 Ejemplo (Serie geométrica). Dado un número x, la sucesión $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$ se llama serie geométrica de razón x. Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\right\}$. Es costumbre representar la serie geométrica de razón x con el símbolo $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$. Dicha serie converge si, y sólo si, $|x| < 1$, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \,. \tag{9.1}$$

Todas las afirmaciones hechas se deducen de que si $x \neq 1$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}. \tag{9.2}$$

Si $|x| < 1$ entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ y obtenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1).$$

Si $|x| > 1$ o $x = -1$ entonces la sucesión $\{x^n\}$ no converge; y si $x = 1$ entonces $\sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1$ tampoco converge.

Te recuerdo que ya habíamos estudiado la serie geométrica en el ejemplo 7.5. ♦

9.3 Ejemplo (Serie armónica). La serie de término general $1/n$, es decir, la sucesión $\{H_n\}$ donde $\displaystyle H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, que simbólicamente representamos por $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, se llama **serie armónica**. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\} = +\infty.$$

En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\} \geqslant \lim_{n\to\infty} \log n = +\infty \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Este resultado es también consecuencia directa de que, según vimos en el ejercicio resuelto 164, la serie armónica es asintóticamente equivalente a la sucesión $\{\log n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n}{\log n} = 1.$$

♦

9.4 Ejemplo (Serie armónica alternada). Se llama así la serie de término general $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; es decir, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

Esto ya ha sido probado en el ejercicio resuelto 164. Pero podemos dar otra prueba más directa. Sustituyendo x por $-x$ en la igualdad (9.2), obtenemos la siguiente igualdad válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \neq -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}. \tag{9.3}$$

Integrando esta igualdad entre 0 y 1 tenemos que:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

De donde

$$\left| \log 2 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

Y deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \log 2 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = 0 \longrightarrow \log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

♦

El siguiente ejemplo te ayudará a entender el concepto de serie convergente. Vamos a ver que modificando el orden de los términos en una serie convergente podemos obtener otra serie convergente con distinta suma.

9.5 Ejemplo (Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma). Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de la sucesión

$$\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \dots\dots\right\} \tag{9.4}$$

Vamos a cambiar el orden de los términos en esta sucesión poniendo uno positivo seguido de dos negativos manteniendo sus posiciones relativas. Obtenemos así la sucesión

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \dots\dots\right\}, \tag{9.5}$$

cuya serie asociada, obtenida sumando *consecutivamente* sus términos, es la sucesión $\{S_n\}$ dada por:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= 1-\frac{1}{2}\\
S_3 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\
S_4 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\\
S_5 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\\
S_6 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\\
\dots\dots &= \dots\dots\\
S_9 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\\
\dots\dots &= \dots\dots\\
S_{3n} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{4j-2}-\frac{1}{4j}\right)
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
S_{3n} &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{4n}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}.
\end{aligned}$$

Deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Es claro que $\lim\{S_{3n} - S_{3n-1}\} = \lim\{S_{3n} - S_{3n-2}\} = 0$ de donde se sigue que:

$$\lim\{S_n\} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Es decir, hemos probado que la serie obtenida reordenando los términos de la serie armónica alternada por el criterio de sumar uno positivo seguido de dos negativos, es convergente y su suma es $\frac{1}{2}\log 2$. ♦

9.6 Observación (La *suma* de una serie convergente no es una suma). El ejemplo anterior pone claramente de manifiesto que la *suma* de una serie convergente no es una suma en el sentido usual de la palabra, es decir, no es una suma algebraica de números. Observa que los *conjuntos* de números (9.4) y (9.5) son los mismos pero las series correspondientes tienen *distinta* suma; la primera tiene *suma* $\log 2$ y la segunda $\frac{1}{2}\log 2$. Si la suma de una serie consistiera en sumar los infinitos términos de una sucesión, entonces el orden en que los sumáramos sería indiferente porque la suma de números tiene la propiedad conmutativa. Debes tener claro, por tanto, que cuando calculas la suma de una serie no estás haciendo una suma infinita sino que estás calculando un *límite de una sucesión* cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión dada. Insisto: calcular la suma de una serie no es una operación algebraica, no consiste en sumar infinitos términos, es un proceso analítico que supone un límite.

9.1.1. La particularidad del estudio de las series

Ahora viene la pregunta del millón: si las series no son nada más que sucesiones, ¿por qué dedicarles una atención especial? La respuesta a esta pregunta es que en el estudio de las series hay una *hipótesis implícita* que los libros silencian. A saber: se supone que las series son sucesiones demasiado difíciles de estudiar *directamente*.

La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: se trata de deducir propiedades de la serie $\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, a partir del comportamiento de $\{a_n\}$. Es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\{A_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$. ¿Por qué esto es así?, ¿no sería más lógico, puesto que lo que queremos es estudiar la serie $\{A_n\}$, hacer hipótesis directamente sobre ella? La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de $A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión* $\{a_n\}$ *es el dato que podemos utilizar*. Naturalmente, esto hace que el estudio de las series se preste a muchas confusiones porque, aunque su objetivo es obtener propiedades de la serie $\{A_n\}$, las hipótesis y la notación $\sum a_n$ hacen siempre referencia a la sucesión $\{a_n\}$, por lo que puede caerse en el error de creer que lo que se está estudiando es dicha sucesión $\{a_n\}$ cuando lo que realmente se estudia es la sucesión $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$. Un error muy común y que debes evitar es confundir las sucesiones $\{a_n\}$ y $\sum a_n$: ¡son sucesiones muy diferentes!

Si lo piensas un poco, esta forma de proceder no es del todo nueva. Ya estás acostumbrado a usar la derivada de una función para estudiar propiedades de la función; pues bien, la situación aquí es parecida: para estudiar la serie $\sum a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ (la función) estudiamos la sucesión $\{a_n\}$ (la derivada). Un buen ejemplo de esto que digo son los criterios de convergencia que veremos dentro de poco.

Otra dificultad adicional en el estudio de las series es la notación tan desafortunada que se emplea. En la mayoría de los textos se representa con el mismo símbolo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la serie (que es una sucesión) y su suma (que es un límite que no siempre existe). Esto es un disparate: se está confundiendo una sucesión con un número. ¿Es lo mismo la sucesión $\{1/n\}$ que el número 0 que es su límite? En ninguna parte verás escrita la igualdad disparatada $\{1/n\} = 0$ ¿Por qué entonces, al tratar con series, se confunde el número $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ con $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^k}$ que es la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$?

Quizás esto se debe a que, parece increíble pero es cierto, no hay acuerdo unánime para representar de forma apropiada la serie de término general a_n. La notación que estamos usando aquí, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, tiene la ventaja de que es clara y evita las confusiones que estoy comentando, pues permite distinguir entre la serie y su eventual suma. Tiene el inconveniente de que la mayoría de los autores no la usan (quizás porque la desconocen). Estoy convencido de que las ventajas de esta notación compensan ampliamente este posible inconveniente. Es más, confío en que dicha notación acabe imponiéndose y siendo aceptada universalmente. Pero esto no va a suceder pasado mañana, por eso te advierto de que en los libros encontrarás las usuales notaciones confusas que no distinguen entre la serie (una sucesión) y su posible límite (su suma).

Todavía queda una última sorpresa. Estamos de acuerdo en que las series son sucesiones. ¿Muy especiales? En absoluto. Toda sucesión podemos verla, si así nos interesa, como una serie. Pues *toda sucesión $\{a_n\}$ es la serie definida por la sucesión de sus diferencias*, esto es, por la sucesión $\{d_n\}$ dada por:

$$d_1 = a_1,\ d_2 = a_2 - a_1,\ d_3 = a_3 - a_2, \ldots, d_{n+1} = a_{n+1} - a_n, \ldots$$

Es claro que $a_n = \sum_{j=1}^{n} d_j$. Por tanto, toda sucesión podemos considerarla como una serie. En resumen, series y sucesiones son lo mismo: toda serie es una sucesión y toda sucesión puede ser vista como una serie. *Lo que distingue a la teoría de series es el punto de vista específico de su estudio*, pero sus resultados pueden aplicarse a cualquier sucesión.

Creo que con lo dicho ya puedes hacerte una idea correcta de lo que son las series. Insisto en esto porque en los libros encontrarás disparates para todos los gustos. Voy a comentar seguidamente algunos de ellos. Mis comentarios están pensados para hacer reflexionar a los profesores que los lean.

9.7 Observación (**Sobre algunas definiciones usuales de serie**). En algunos libros se da a siguiente definición.

Definición de serie "a la Bourbaki". Una serie es un par de sucesiones $\big(\{x_n\},\{S_n\}\big)$ donde para todo $n\in\mathbb{N}$ $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. La sucesión $\{S_n\}$ se llama sucesión de sumas parciales de la serie.

El problema con esta definición está en las primeras 7 palabras: una serie es un *par* de sucesiones. Quien lea esta definición pensará que una serie es algo diferente a una sucesión. Si, además, como ocurre con más frecuencia de la deseada, el libro que da esta definición vuelve a enunciar para series – ¡e incluso a demostrar! – algunos de los resultados anteriormente vistos para sucesiones, el desastre ya es total: el lector de ese libro acabará pensando que las series son algo diferente de las sucesiones.

Esta definición de serie adolece de la pedantería lamentable de las definiciones "al estilo Bourbaki". Son definiciones excesivamente formalistas cuya precisión formal las hace confusas e ininteligibles para quien no sabe de qué va la cosa. Con un ejemplo se entiende mejor lo que quiero decir. Tú sabes lo que es la derivada de una función. Sabes que para derivar una función primero tienen que darte la función cuya derivada vas a usar. Por tanto, el concepto de derivada involucra a *dos* funciones: la función f y la función f'. Una definición "al estilo Bourbaki" de derivada sería como sigue:

> Una derivada es un par de funciones (f,f'), donde f es una función definida en un intervalo I, y para cada punto $a\in I$ $f'(a)$ es el número definido por $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Estarás de acuerdo en que la supuesta mayor precisión formal de esta definición está muy lejos de compensar su mayor dificultad de comprensión. Esto es exactamente lo que se hace en la definición de serie que estamos comentando. Para formar la serie $\{A_n\}=\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ primero tienen que darnos la sucesión $\{a_n\}$. Eso y no otra cosa es lo que significa la expresión "una serie es un par de sucesiones". Todos sabemos que el Tajo pasa por Toledo pero eso no nos hace decir que Toledo es un par (Tajo,Toledo)... ¿Me explico?

En el extremo opuesto del "estilo Bourbaki" está el "estilo todo vale".

Definición de serie al "estilo todo vale". Una serie es una suma infinita

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

Ya está, eso es todo. Definiciones parecidas a esta se encuentran con frecuencia en libros de autores ingleses o norteamericanos. Se trata de una definición que no define nada e introduce símbolos confusos.

Entre el excesivo formalismo y la informalidad absoluta, con notaciones inapropiadas y confusas, la verdad es que la mayoría de los libros que conozco no ayudan a comprender el concepto de serie ni las particularidades de su estudio.

Convenios de notación. Usaremos la notación $\sum a_n$ para representar la serie de término general a_n. Por tanto, una última vez lo repito, $\sum a_n$ es una sucesión, más concretamente, $\sum a_n$ es la aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número natural $n\in\mathbb{N}$ hace corresponder el número $\sum_{k=1}^{n}a_k$.

A pesar de lo dicho, también usaré de vez en cuando la notación $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ para la serie de término general a_n. Creo que un uso adecuado de ambas notaciones es la mejor

forma de ayudarte para que tengas siempre presente que la sucesión que estamos estudiando es $\sum a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y no $\{a_n\}$.

A veces conviene considerar, por comodidad, series que empiezan en un índice entero $q \in \mathbb{Z}$, usaremos en tal caso la notación $\sum\limits_{n \geqslant q} a_n$. Por ejemplo, es más cómodo escribir $\sum\limits_{n \geqslant 3} \dfrac{1}{\log n}$ que $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{\log(n+2)}$ aunque ambas son la misma serie.

9.1.2. Propiedades básicas de las series convergentes

Es importante que te des cuenta de que cambiar un solo término en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar infinitos términos en la serie $\sum a_n$. El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión $\{a_n\}$ ello no afecta a la posible convergencia de la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ pero sí afecta a la suma de dicha serie.

9.8 Proposición. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y supongamos que hay un número $q \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant q+1$ es $a_n = b_n$. Entonces se verifica que las series $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ o bien convergen ambas o no converge ninguna, y en el primer caso se verifica que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{j=1}^{q} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{j=1}^{q} b_j .$$

Demostración. Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{q} a_j$, $\beta = \sum\limits_{j=1}^{q} b_j$. Las afirmaciones hechas se deducen todas de que para todo $n \geqslant q+1$ se verifica la igualdad:

$$\sum_{k=q+1}^{n} a_k = A_n - \alpha = \sum_{k=q+1}^{n} b_k = B_n - \beta$$

Observa que los números α y β son constantes fijas. De la igualdad $A_n + \alpha = B_n + \beta$, válida para todo $n \geqslant q+1$, deducimos que las series $\sum a_n = \{A_n\}$ y $\sum b_n = \{B_n\}$ ambas convergen o ninguna converge. Cuando hay convergencia tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \{A_n - \alpha\} = \lim_{n\to\infty} \{A_n\} - \alpha = \lim_{n\to\infty} \{B_n - \beta\} = \lim_{n\to\infty} \{B_n\} - \beta .$$

Lo que prueba la igualdad del enunciado. □

Consideremos una serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$. Dado $q \in \mathbb{N}$ definamos $b_n = 0$ para $1 \leqslant n \leqslant q$, $b_n = a_n$ para todo $n \geqslant q+1$. La serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} b_n$ se llama **serie resto de orden** q de la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$. Es usual representar dicha serie resto con la notación $\sum\limits_{n \geqslant q+1} a_n$. De la proposición anterior deducimos que

las series $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant q+1} a_n$ ninguna converge o ambas convergen y, cuando esto ocurre es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{q} a_k = \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n.$$

No lo olvides: para calcular la suma de una serie debes tener siempre presente el índice desde el que se empieza a sumar.

El siguiente resultado es importante porque establece una condición necesaria general para la convergencia de una serie.

9.9 Proposición (Condición necesaria para la convergencia de una serie). *Para que la serie* $\sum a_n$ *sea convergente es necesario que* $\lim\{a_n\} = 0$.

Demostración. Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim\{A_n\} = \lim\{A_{n-1}\} = S$ es un número real. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ tenemos que $a_n = A_n - A_{n-1}$, deducimos que $\lim\{a_n\} = \lim\{A_n\} - \lim\{A_{n-1}\} = S - S = 0$. □

Esta condición necesaria no es suficiente: $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ pero la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente. Se trata de una condición necesaria para la convergencia de una serie, por tanto cuando dicha condición no se cumple la serie no es convergente.

9.10 Ejemplo. Las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)$ no son ninguna de ellas convergente porque sus términos generales no convergen a 0:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}}, \quad n \operatorname{sen}\frac{1}{n} \to 1, \quad n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right) \to 1.$$

♦

9.1.3. Propiedades asociativas y conmutativas

Ya hemos dicho que el límite, L, de una serie convergente, $L = \lim\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, no es, como a veces se dice, una "suma de los infinitos términos" de la sucesión $\{a_n\}$. ¿Qué sentido tiene eso de "sumar infinitos términos"? Ninguno, desde luego. Lo que dicho número verifica es que $\left|L - \sum_{j=1}^{n} a_j\right|$ se conserva menor que cualquier número $\varepsilon > 0$, a partir de un cierto $n \in \mathbb{N}$ en adelante. Si bien, puede ser sugerente la interpretación de L como "la suma de los términos de la sucesión $\{a_n\}$", no hay que olvidar que esto no es más que una forma de hablar, y que el límite de una serie convergente es, justamente, el límite de una sucesión de sumas y no debe confundirse con una operación algebraica. Por ello cabe preguntarse si las propiedades asociativa y conmutativa de la adición se conservan para series convergentes. De hecho, ya hemos visto que la propiedad conmutativa no se verifica en general, pues reordenando los términos de una serie convergente podemos obtener otra serie con suma distinta. Las cosas van mejor en lo que se refiere a la asociatividad. Precisemos estas ideas.

Sea $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ la serie definida por la sucesión $\{a_n\}$. Dada una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definamos una sucesión $\{b_n\}$ por:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\sigma(1)}, \quad b_{n+1} = a_{\sigma(n)+1} + \cdots + a_{\sigma(n+1)} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{9.6}$$

En estas condiciones se dice que la serie $\sum b_n$ se ha obtenido *asociando términos* en la serie $\sum a_n$. Poniendo $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, y $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, se tiene que $B_n = A_{\sigma(n)}$, es decir la sucesión $\{B_n\}$ es una sucesión parcial de $\{A_n\}$. Deducimos el siguiente resultado.

9.11 Proposición. *Toda serie obtenida asociando términos en una serie convergente también es convergente y ambas series tienen la misma suma.*

Es importante advertir que asociando términos en una serie no convergente puede obtenerse una serie convergente. Por ejemplo, la serie definida por la sucesión $\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$ no es convergente, y la serie que se obtiene de ella asociando términos dos a dos, es decir, la serie definida por la sucesión $b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = 0$, es evidentemente convergente. A este respecto tiene interés el siguiente resultado que establece una condición suficiente para que de la convergencia de una serie obtenida asociando términos en otra pueda deducirse la convergencia de esta última.

9.12 Proposición. *Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente, $\{a_n\}$ una sucesión y $\{b_n\}$ la sucesión definida como en (9.6). Supongamos que la serie $\sum b_n$ es convergente y que la sucesión*

$$\alpha_n = |a_{\sigma(n)+1}| + |a_{\sigma(n)+2}| + \cdots + |a_{\sigma(n+1)}|$$

converge a cero. Entonces la serie $\sum a_n$ es convergente y tiene la misma suma que la serie $\sum b_n$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant \sigma(1)$, definamos:

$$\tau(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : \sigma(k) \leqslant n\}.$$

Evidentemente, $\tau(n) \leqslant \tau(n+1)$. Además $\sigma(\tau(n)) \leqslant n < \sigma(\tau(n)+1)$, y para todo $p \in \mathbb{N}$ $\tau(\sigma(p)) = p$. Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Se comprueba fácilmente, usando que τ es creciente y no mayorada, que $\lim \{B_{\tau(n)}\} = \lim\{B_n\}$ (observa que $\{B_{\tau(n)}\}$ es "parecida" a una sucesión parcial de $\{B_n\}$). Para $n > \sigma(1)$ tenemos:

$$\begin{aligned} A_n &= (a_1 + \cdots + a_{\sigma(1)}) + \cdots + (a_{\sigma(\tau(n-1))+1} + \cdots + a_{\sigma(\tau(n))}) + a_{\sigma(\tau(n))+1} + \cdots + a_n \\ &= B_{\tau(n)} + a_{\sigma(\tau(n))+1} + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Por tanto

$$|A_n - B_{\tau(n)}| \leqslant |a_{\sigma(\tau(n))+1}| + \cdots + |a_n| \leqslant |a_{\sigma(\tau(n))+1}| + \cdots + |a_{\sigma(\tau(n)+1)}| = \alpha_{\tau(n)} \to 0.$$

De donde se sigue que $\lim\{A_n\} = \lim \{B_{\tau(n)}\} = \lim\{B_n\}$. □

Estudiaremos seguidamente las series convergentes para las que se verifica la propiedad conmutativa. Precisaremos estos conceptos. Sea $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ la serie definida por la sucesión $\{a_n\}$. Dada una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definamos una sucesión $\{b_n\}$ por $b_n = a_{\pi(n)}$. En estas condiciones se dice que la serie $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ se ha obtenido *reordenando términos* en la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$.

9.13 Definición. Se dice que una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es **conmutativamente convergente** si para *toda* biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir la serie $\{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$, es convergente.

Observa que, tomando como biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ la identidad, si la serie $\sum a_n$ es conmutativamente convergente entonces *es convergente*. En otras palabras, una serie es conmutativamente convergente, cuando es convergente y también son convergentes todas las series que se obtienen de ella por reordenación de sus términos (en cuyo caso se verifica que todas ellas tienen la misma suma). La serie armónica alternada es un ejemplo de serie convergente que no es conmutativamente convergente.

El siguiente teorema da una sencilla caracterización de las series conmutativamente convergentes. Debes entender lo que afirma el teorema pero no es preciso que leas su demostración. Si acaso, puede ser interesante que leas el comienzo de la demostración de la implicación $b) \longrightarrow a)$ porque es muy parecida a la demostración del teorema 8.33. Esto no es casual: hay bastantes analogías entre la convergencia de integrales impropias y de series.

9.14 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es conmutativamente convergente.

b) La serie $\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$ es convergente.

Además, en caso de que se verifiquen a) y b), se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

cualquiera sea la biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Demostración. $b) \longrightarrow a)$ Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Supongamos que $\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$ es convergente. Probaremos en primer lugar que la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ también es convergente. Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy para $\{B_n\}$ nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|B_q - B_p\right| = \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todos } p, q \in \mathbb{N} \text{ tales que } q > p \geqslant n_0. \tag{9.7}$$

Deducimos que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $q > p \geqslant n_0$ se verifica que

$$\left|A_q - A_p\right| = \left|a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Lo que prueba que la serie $\{A_n\}$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.

Pongamos $A = \operatorname{lím}\{A_n\}$, y sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se verifica (9.7) y además $\left|A_{n_0} - A\right| < \varepsilon/2$. Definamos

$$m_0 = \operatorname{máx}\{j \in \mathbb{N} : \pi(j) \leqslant n_0\}, \quad F_m = \{\pi(k) : 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Para $m > m_0$, se verifica que $F_m \supsetneqq \{1, 2, \dots, n_0\}$. Por tanto, el conjunto $H = F_m \backslash \{1, 2, \dots, n_0\}$ no es vacío. Sea $p = \min(H)$, $q = \max(H)$. Tenemos entonces que $q \geqslant p \geqslant n_0 + 1$, y por tanto:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{m} a_{\pi(j)} - A\right| &= \left|\sum_{k \in F_m} a_k - A\right| = \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k \in H} a_k - A\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - A\right| + \sum_{k \in H} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=p}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Hemos probado así que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$ y por tanto que $b)$ implica $a)$.

$a) \longrightarrow b)$ Probaremos que si la serie $\{B_n\}$ no es convergente entonces la serie $\{A_n\}$ no es conmutativamente convergente. Supondremos, pues, en lo que sigue que $\{B_n\}$ no es convergente. Tenemos para la serie $\{A_n\}$ dos posibilidades: o bien converge o bien no converge. Evidentemente, si $\{A_n\}$ no converge entonces, con mayor razón, no es conmutativamente convergente. Consideraremos, por tanto, el caso en que $\{A_n\}$ es convergente. Para nuestro propósito es suficiente probar que, en tal caso, hay una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la serie $\{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$ es positivamente divergente. Veamos cómo puede justificarse la existencia de dicha biyección.

De las hipótesis hechas se deduce que los conjuntos $U = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant 0\}$, y $V = \mathbb{N} \setminus U$ son infinitos. Sean λ y γ biyecciones crecientes de $\mathbb{N}$ sobre U y V, respectivamente. Evidentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$\{k \in \mathbb{N} : \lambda(k) \leqslant n\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \gamma(k) \leqslant n\} = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

por lo que, poniendo

$$P_n = \sum_{\lambda(k) \leqslant n} a_{\lambda(k)}, \quad Q_n = \sum_{\gamma(k) \leqslant n} a_{\gamma(k)}$$

tenemos que $A_n = P_n + Q_n$ y $B_n = P_n - Q_n$, de donde se sigue que *ninguna* de las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ es convergente y, como son monótonas, deducimos que $\{P_n\}$ diverge positivamente y $\{Q_n\}$ diverge negativamente.

Lo que sigue es fácil de entender: vamos a ir formando grupos de términos positivos consecutivos de la sucesión $\{a_n\}$ y, entre cada dos de tales grupos, vamos a ir poniendo consecutivamente los términos negativos de dicha sucesión. El criterio para ir formando los grupos de términos positivos es que la suma de cada grupo con el término negativo que le sigue sea mayor que 1. Formalmente sería como sigue. Definimos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:

$$\begin{aligned}&\sigma(1) = \min\{q \in \mathbb{N} : P_{\lambda(q)} + a_{\gamma(1)} > 1\} \\ &\sigma(k+1) = \min\{q \in \mathbb{N} : P_{\lambda(q)} - P_{\sigma(k)} + a_{\gamma(k+1)} > 1\} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Pongamos, por comodidad de notación $\sigma(0) = 0$. Nótese que el grupo k-ésimo de términos positivos está formado por $a_{\lambda(\sigma(k-1)+1)}, a_{\lambda(\sigma(k-1)+1)+1}, \dots, a_{\lambda(\sigma(k))}$, y dicho grupo va seguido por el término negativo $a_{\gamma(k)}$. Pues bien, la biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por:

$$\begin{aligned}&\pi(j) = \lambda(j-k) \ \text{ para } \ \sigma(k) + k + 1 \leqslant j \leqslant \sigma(k+1) + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ &\pi(\sigma(k) + k) = a_{\gamma(k)}, \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

es tal que la serie $\{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$ es positivamente divergente, pues para $n \geqslant \sigma(k) + k$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{\pi(j)} &\geqslant \sum_{j=1}^{\sigma(k)+k} a_{\pi(j)} = \sum_{j=1}^{k} a_{\pi(\sigma(j)+j)} + \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{j=\sigma(q)+q+1}^{\sigma(q+1)+q} a_{\pi(j)} = \\ &= \sum_{j=1}^{k} a_{\gamma(j)} + \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{j=\sigma(q)+q+1}^{\sigma(q+1)+q} a_{\lambda(j-q)} = \sum_{j=1}^{k} a_{\gamma(j)} + \sum_{j=1}^{\sigma(k)} a_{\lambda(j)} = \\ &= \sum_{j=1}^{k} a_{\gamma(j)} + P_{\sigma(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} \big(P_{\sigma(j+1)} - P_{\sigma(j)} + a_{\gamma(j+1)}\big) + P_{\sigma(1)} + a_{\gamma(1)} \\ &\geqslant (1 + \overset{(k-1}{\cdots} + 1) + 1 = k. \qquad \square\end{aligned}$$

La utilidad del teorema que acabamos de probar está clara: para estudiar la convergencia conmutativa de una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ lo que se hace es estudiar la convergencia de la serie $\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$. Es usual utilizar la siguiente terminología.

9.15 Definición. Se dice que la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es **absolutamente convergente**, si la serie $\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$ es convergente.

Debes entender bien esta definición. Que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolutamente quiere decir que es convergente la sucesión

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n| = \{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}.$$

Y el teorema anterior afirma, entre otras cosas, que esto implica la convergencia de la sucesión

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}.$$

¡Son sucesiones muy diferentes!

Naturalmente, si una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ converge, también converge la sucesión que se obtiene tomando valores absolutos $\{|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|\}$; pero esta sucesión ***no es igual*** a $\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$. Por eso *puede ocurrir que una serie sea convergente pero no sea absolutamente convergente*. La serie armónica alternada es un ejemplo de serie convergente que no es absolutamente convergente.



Con esta terminología, el teorema 9.14 afirma que *la convergencia absoluta es lo mismo que la convergencia conmutativa*[1].

[1] En muchos libros a las series que son absolutamente convergentes las llaman también *incondicionalmente convergentes* y a las series que son convergentes pero no son absolutamente convergentes las llaman también *condicionalmente convergentes*. En mi opinión esta terminología solamente sirve para confundir un poquito más.

9.1.4. Ejercicios propuestos

446. Estudia la convergencia de las series: a) $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ y b) $\sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

447. Justifica las igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right)=\log 2.$

b) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{\log 2}{2}.$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{3}{2}\log 2.$

448. Demuestra que si los términos de la serie armónica alternada se permutan de tal modo que a cada grupo de p términos positivos consecutivos le siga un grupo de q términos negativos consecutivos, entonces la nueva serie así obtenida es convergente con suma igual a $\log 2+\frac{1}{2}\log(p/q)$.

449. Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos y supongamos que la serie $\sum a_n$ es convergente. Prueba que $\{na_n\}$ converge a 0.

Sugerencia. Considera $A_{2n}-A_n$.

9.1.5. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 227 Estudia la convergencia de las series: a)$\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ y b)$\sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Solución. a) $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$

Luego $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}=\left\{1-\frac{1}{n+1}\right\}\to 1$, es decir la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y su suma es igual a 1.

b) $\displaystyle\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\log\frac{k+1}{k}=\log(k+1)-\log k\longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\log(n+1).$

Luego $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\{\log(n+1)\}\to+\infty$, es decir la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ es positivamente divergente. ☺

Ejercicio resuelto 228 Justifica las igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right)=\log 2.$

b) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{\log 2}{2}.$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{3}{2}\log 2.$

Solución. a) y b) Sabemos que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log 2$. También sabemos que una serie obtenida asociando términos en una serie convergente también es convergente y con la misma suma. Las series en a) y en b) se obtienen de la serie armónica alternada asociando términos de 4 en 4 o de 2 en 2 respectivamente, lo que justifica las igualdades en a) y en b). Finalmente, observa que la serie en c) se obtiene sumando las series en a) y en b). ☺

Ejercicio resuelto 229 Demuestra que si los términos de la serie armónica alternada se permutan de tal modo que a cada grupo de p términos positivos consecutivos le siga un grupo de q términos negativos consecutivos, entonces la nueva serie así obtenida es convergente con suma igual a $\log 2+\frac{1}{2}\log(p/q)$.

Solución. Pongamos $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Consideremos la sucesión $\left\{S_{n(p+q)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es precisamente la serie que se obtiene asociando términos de $p+q$ en $p+q$ en la serie del enunciado. Si dicha sucesión es convergente, aplicando la proposición 9.12 (con $\sigma(n)=n(p+q)$), se sigue que la serie del enunciado también es convergente y su suma es igual a $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n(p+q)}$. Llamando, como de costumbre $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, y recordando la estrategia 7.33, tenemos que:

$$\begin{aligned}
S_{n(p+q)} &= \sum_{k=1}^{pn}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{nq}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{pn}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}H_{nq}=\\
&= H_{2pn-1}-\frac{1}{2}H_{np}+\frac{1}{2np}-\frac{1}{2}H_{nq}=\\
&= \frac{1}{2np}+\gamma_{2pn-1}+\log(2pn-1)-\frac{1}{2}\gamma_{np}-\frac{1}{2}\log(np)-\frac{1}{2}\gamma_{nq}-\frac{1}{2}\log(nq)=\\
&= \frac{1}{2np}+\gamma_{2pn-1}-\frac{1}{2}\gamma_{np}-\frac{1}{2}\gamma_{nq}+\frac{1}{2}\log\frac{2np-1}{np}+\frac{1}{2}\log\frac{2np-1}{nq}\to\\
&\to \frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{2p}{q}=\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}.
\end{aligned}$$



9.2. Criterios de convergencia para series de términos positivos

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*. Observa que una serie de términos positivos es una sucesión creciente por lo que o bien es convergente (cuando está mayorada) o es positivamente divergente.

9.16 Proposición (Criterio básico de convergencia). *Una serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número $M > 0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M$, en cuyo caso su suma viene dada por:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Una serie de términos positivos que no está mayorada es (positivamente) divergente.

9.17 Ejemplo. La serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ es convergente porque para todo $n \geqslant 2$ se verifica:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{(2^j)^2}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2^j}{2^{2j}} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2.$$

♦

Si $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es una serie de términos positivos, suele escribirse $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ para indicar que dicha serie converge.

Teniendo en cuenta la proposición 9.8, los criterios que siguen pueden aplicarse para estudiar la convergencia de series cuyos términos son todos positivos a partir de uno de ellos en adelante.

9.18 Proposición (Criterio básico de comparación). *Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.*

Demostración. Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Las hipótesis hechas implican que para todo $n > k$ es $A_n \leqslant B_n + A_k$. Deducimos que si $\{B_n\}$ está mayorada también lo está $\{A_n\}$. □

9.19 Ejemplos. La serie $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{\log n}$ es divergente porque es de términos positivos, $\dfrac{1}{\log n}\geqslant\dfrac{1}{n}$ y la serie armónica es divergente.

La serie $\sum_{n\geqslant 1}\log\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ es convergente porque es de términos positivos y:

$$\log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\log\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\log\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)<\frac{1}{n^2+2n}<\frac{1}{n^2},$$

y la serie $\sum\dfrac{1}{n^2}$ es convergente.

La serie $\sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{n}-\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ es convergente. Para ello usamos la desigualdad (ver (7.5)):

$$\frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

De la que se deduce:

$$0<\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}.$$

9.20 Proposición (Criterio límite de comparación). *Sean* $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *y* $\sum_{n\geqslant 1}b_n$ *dos series de términos positivos, y supongamos que*

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=L\in\mathbb{R}_o^+\cup\{+\infty\}.$$

a) Si $L=+\infty$ *y* $\sum_{n\geqslant 1}b_n$ *es divergente también* $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *es divergente.*

b) Si $L=0$ *y* $\sum_{n\geqslant 1}b_n$ *es convergente también* $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *es convergente.*

c) Si $L\in\mathbb{R}^+$ *las series* $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *y* $\sum_{n\geqslant 1}b_n$ *son ambas convergentes o ambas divergentes.*

En particular, si dos sucesiones de números positivos, $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *son asintóticamente equivalentes, las respectivas series,* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *ambas convergen o ambas divergen.*

Demostración. Supongamos que $L\in\mathbb{R}^+$. Sea $0<\alpha<L<\beta$. Todos los términos de la sucesión $\{a_n/b_n\}$, a partir de uno en adelante, están en el intervalo $]\alpha,\beta[$, es decir, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant k$ es $\alpha<a_n/b_n<\beta$, y, por tanto, $\alpha\,b_n<a_n<\beta\,b_n$. Concluimos, por el criterio de comparación, que la convergencia de una de las series implica la convergencia de la otra. Queda, así, probado el punto *c)* del enunciado. Los puntos *a)* y *b)* se prueban de manera parecida. □

9.21 Ejemplos. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)$ es divergente porque es de términos positivos y se verifica que $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}$.

Por la misma razón las series $\sum\limits_{n\geqslant 1}\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ son todas ellas series de términos positivos divergentes, porque sus términos generales son asintóticamente equivalentes al término general de la serie armónica $\dfrac{1}{n}$.

La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)$ es convergente porque es de términos positivos, se verifica que $\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\sim\dfrac{1}{5n^2}$ y la serie $\sum\dfrac{1}{5n^2}$ es convergente.

Observa el parecido de estos criterios con los correspondientes criterios de convergencia para integrales impropias de funciones positivas. El siguiente resultado establece, en un caso particular, una relación aún más estrecha entre ambos tipos de convergencia.

9.22 Proposición (Criterio integral). *Sea $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ una función positiva y decreciente. Entonces se verifica que*

$$\sum_{k=2}^{n+1}f(k)\leqslant\int_1^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

En consecuencia, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}f(n)$ y la integral $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ ambas convergen o ambas divergen.

Demostración. Por ser f decreciente, para todo $x\in[k,k+1]$ es $f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k)$. Integrando, deducimos que:

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(k).$$

Sumando estas desigualdades desde $k=1$ hasta $k=n$, obtenemos la desigualdad del enunciado. □

Para poder usar los criterios de comparación, necesitamos conocer ejemplos de series convergentes con las que poder comparar una serie dada. Unas series de términos positivos muy útiles para comparar con otras series son las siguientes.

9.23 Proposición (Series de Riemann). *Dado un número real α, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha>1$.*

Demostración. Para que se cumpla la condición necesaria de convergencia es preciso que sea $\alpha>0$. Supuesto que esto es así, podemos aplicar el criterio integral a la función $f(x)=1/x^\alpha$ y tener en cuenta que la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y sólo si, $\alpha>1$. □

9.24 Ejemplos. Las series $\sum \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\sum \log\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ convergen si, y sólo si, $\alpha > 1$ porque son de términos positivos y su término general es asintóticamente equivalente a $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

La serie $\sum n^\beta\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right)$, donde α y β son números reales, no converge para ningún valor de β si $\alpha < 0$, porque en tal caso su término general no converge a 0. Si $\alpha \geqslant 0$ converge si y sólo si, $\alpha - \beta > 1$ porque es una serie de términos positivos y su término general es asintóticamente equivalente a $\dfrac{1}{n^{\alpha-\beta}}$

Si en el criterio límite de comparación hacemos $b_n = 1/n^\alpha$, obtenemos el siguiente criterio de convergencia.

9.25 Proposición (Criterio de Prinsheim). *Sea* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *una serie de términos positivos,* α *un número real y supongamos que* $\{n^\alpha a_n\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$. *Entonces:*

i) Si $L = +\infty$ *y* $\alpha \leqslant 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es divergente.*

ii) Si $L = 0$ *y* $\alpha > 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

iii) Si $L \in \mathbb{R}^+$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *converge si* $\alpha > 1$ *y diverge si* $\alpha \leqslant 1$.

Observando que si $a_n > 0$, la desigualdad $a_n \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ equivale a $\dfrac{-\log(a_n)}{\log n} \geqslant \alpha$, se deduce el siguiente criterio de convergencia que es eficaz para estudiar la convergencia de series que pueden compararse con series de Riemann.

9.26 Proposición (Primer criterio logarítmico). *Supongamos que* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y pongamos* $L_n = \dfrac{-\log(a_n)}{\log n}$.

i) Si $\{L_n\} \to L$, *donde* $L > 1$ *o* $L = +\infty$, *la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

ii) Si $\{L_n\} \to L$, *donde* $L < 1$ *o* $L = -\infty$, *o bien si existe algún* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $L_n \leqslant 1$ *para todo* $n \geqslant k$, *entonces la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es divergente.*

9.27 Ejemplo. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ donde $a_n = \left(1 - \dfrac{\alpha \log n}{n}\right)^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, es una serie de términos positivos (a partir de uno de ellos en adelante) y se tiene que:

$$\frac{-\log a_n}{\log n} = \frac{-n \log\left(1 - \dfrac{\alpha \log n}{n}\right)}{\log n} = \alpha \frac{\log\left(1 - \dfrac{\alpha \log n}{n}\right)}{-\dfrac{\alpha \log n}{n}} \to \alpha.$$

El primer criterio logarítmico nos dice que si $\alpha > 1$ la serie converge y si $\alpha < 1$ la serie diverge.

Si $\alpha = 1$ tenemos que $a_n = \left(1 - \dfrac{\log n}{n}\right)^n$. Recordando que $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^x$, podemos esperar que para n suficientemente grande $a_n = \left(1 - \dfrac{\log n}{n}\right)^n \approx \mathrm{e}^{-\log n} = \dfrac{1}{n}$. Esto lleva a conjeturar que $na_n \to 1$. Tenemos que:

$$\log(na_n) = n\log\left(1 - \frac{\log n}{n}\right) + \log n = n\left(\log\left(1 - \frac{\log n}{n}\right) + \frac{\log n}{n}\right) =$$

$$= \frac{(\log n)^2}{n} \frac{\log\left(1 - \dfrac{\log n}{n}\right) + \dfrac{\log n}{n}}{\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^2}$$

Si ahora recuerdas que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$, se sigue que $\log(na_n) \to 0$, es decir, $na_n \to 1$. El criterio de Prinsheim implica que la serie $\sum a_n$ es divergente. ♦

Vamos a estudiar a continuación unas series más generales que las series de Riemann. Dados dos números reales α y β, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ se llama **serie de Bertrand** de exponentes α y β

9.28 Proposición (Series de Bertrand). *La serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ *converge si* $\alpha > 1$ *cualquiera sea* β*, y también si* $\alpha = 1$ *y* $\beta > 1$*. En cualquier otro caso es divergente.*

Demostración. Sabemos que cualesquiera sean $\rho > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\mu}{n^\rho} = 0.$$

Supongamos que $\alpha > 1$ y sea λ un número verificando que $1 < \lambda < \alpha$. Podemos escribir:

$$n^\lambda \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} = \frac{(\log n)^\mu}{n^\rho}$$

donde $\rho = \alpha - \lambda$ y $\mu = -\beta$. Deducimos así que

$$\lim_{n\to\infty} n^\lambda \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} = 0.$$

El criterio de Prinsheim implica que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ es convergente.

Si $\alpha < 1$ un razonamiento parecido muestra que la serie diverge cualquiera sea β.

Sea ahora $\alpha = 1$. Entonces, si $\beta \leqslant 0$, tenemos que $\dfrac{1}{n(\log n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geqslant 3$, y el criterio de comparación implica que la serie es divergente. Sea, pues, $\beta > 0$ y pongamos

$f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^\beta}$ para $x \geqslant 2$. La función f es positiva y decreciente en $[2, +\infty[$. Tenemos:

$$\int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\beta} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta}(\log x)^{1-\beta}\Big|_2^t = \dfrac{1}{1-\beta}\left((\log t)^{1-\beta} - (\log 2)^{1-\beta}\right), & \text{si } \beta \neq 1. \\ \log(\log x)\Big|_2^t = \log(\log t) - \log(\log 2), & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

Deducimos que la integral impropia $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y solo si, $\beta > 1$. El criterio integral nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 2} f(n) = \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n(\log n)^\beta}$ converge si, y sólo si, $\beta > 1$. □

9.29 Ejemplo. Se trata de estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\log n!}{n^r}$ donde $r \in \mathbb{R}$. En el ejercicio resuelto 171 hemos visto que $\log n!$ es asintóticamente equivalente a $n \log n$. Por tanto, a efectos de convergencia, la serie dada se comporta igual que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\log n}{n^{r-1}}$ la cual es una serie de Bertrand con $\beta = -1$ y $\alpha = r - 1$. Dicha serie converge si, y sólo si, $r - 1 > 1$, o sea, $r > 2$. ♦

Si $a_n > 0$, la desigualdad $a_n \leqslant \dfrac{1}{n(\log n)^\beta}$ equivale a $\dfrac{-\log(na_n)}{\log(\log n)} \geqslant \beta$. Se deduce de aquí el siguiente criterio de convergencia que es eficaz para estudiar la convergencia de series que pueden comparase con una serie de Bertrand de exponente $\alpha = 1$.

9.30 Proposición (Segundo criterio logarítmico). *Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos $L_n = \dfrac{-\log(na_n)}{\log(\log n)}$.*

i) Si $\{L_n\} \to L$, donde $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $\{L_n\} \to L$, donde $L < 1$ o $L = -\infty$, o bien si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $L_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Vamos a estudiar a continuación dos criterios de convergencia que se aplican a series que pueden compararse con una serie geométrica. El primero de estos criterios parte de que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = x < 1$, esto lleva, en el caso general de una serie términos positivos, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$, a considerar el comportamiento de la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$.

9.31 Proposición (Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)). *Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

a) Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

b) Si $L > 1$ *o si* $L = +\infty$ *o si hay un número* $k \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geqslant k$ *es* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$*, entonces* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es divergente y además* $\{a_n\}$ *no converge a* 0*.*

Demostración. a) Sea λ un número tal que $L < \lambda < 1$. La definición de límite implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} \leqslant \lambda^{n-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}} \lambda^n.$$

Como $0 < \lambda < 1$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \lambda^n$ es convergente. Deducimos, en virtud del criterio de comparación, que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

b) Si $L > 1$ entonces, tomando λ tal que $1 < \lambda < L$ y razonando como antes, obtenemos que para todo $n \geqslant n_0$ es $a_n \geqslant \dfrac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}} \lambda^n$. Como $\lambda > 1$ se sigue que la sucesión $\{a_n\}$ diverge positivamente y, con mayor razón, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge positivamente. □

9.32 Ejemplo. Sea la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$, donde x es un número real. Es una serie de términos positivos por lo que podemos aplicar el criterio del cociente para estudiar su convergencia. Pongamos $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} x^{2n+2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{-2n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} x^2 \to \frac{x^2}{4}$$

El criterio del cociente nos dice que si $\dfrac{x^2}{4} < 1$, es decir, $|x| < 2$, la serie es convergente; si $\dfrac{x^2}{4} > 1$, es decir, $|x| > 2$, la serie no es convergente porque $\{a_n\}$ no converge a 0. El caso en que $x^2 = 4$, o sea $x = \pm 2$, se tiene que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1} \geqslant 1.$$

Y concluimos que la serie no converge para $x = \pm 2$. ♦

El segundo criterio parte de que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\sqrt[n]{a_n} = x < 1$, esto lleva, en el caso general de una serie de términos positivos, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, a considerar el comportamiento de la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$.

9.33 Proposición (Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)). *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

a) Si $L < 1$ *la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

b) Si $L > 1$ *o si* $L = +\infty$ *o o si hay un número* $k \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geqslant k$ *es* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ *entonces* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es divergente y además* $\{a_n\}$ *no converge a* 0*.*

Demostración. a) Sea λ un número tal que $L < \lambda < 1$. La definición de límite implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ es $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \lambda$, es decir, $a_n \leqslant \lambda^n$. Puesto que $0 < \lambda < 1$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \lambda^n$ es convergente y, en virtud del criterio de comparación, se sigue que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

b) Si $L > 1$ entonces, tomando λ tal que $1 < \lambda < L$ y razonando como antes, obtenemos que para todo $n \geqslant n_0$ es $a_n \geqslant \lambda^n$ y, como $\lambda > 1$, se sigue que la sucesión $\{a_n\}$ diverge positivamente y, con mayor razón, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge positivamente. □

9.34 Ejemplo. Sea la serie $\sum_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n}$. Como es una serie de términos positivos podemos estudiar su convergencia usando el criterio de la raíz. Pongamos $a_n = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n}$. Tenemos que:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-2} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2} \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^2 \to \mathrm{e}^{-2} < 1.$$

Concluimos que la serie es convergente. ♦

Cuando $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ y $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, también es $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. En esta situación los criterios del cociente y de la raíz no proporcionan información suficiente sobre el comportamiento de la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$. Por ejemplo, para las series de Riemann, $a_n = 1/n^\alpha$, se tiene que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ cualquiera sea α. Observa que *estos criterios solamente pueden proporcionar información sobre la convergencia de series que pueden compararse con una serie geométrica*. El siguiente criterio suele aplicarse cuando fallan los anteriores.

9.35 Proposición (Criterio de Raabe (1832)). *Supongamos que* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, y pongamos* $R_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

i) Si $\{R_n\} \to L$*, donde* $L > 1$ *o* $L = +\infty$*, la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

ii) Si $\{R_n\} \to L$*, donde* $L < 1$ *o* $L = -\infty$*, o bien si existe algún* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $R_n \leqslant 1$ *para todo* $n \geqslant k$*, entonces la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es divergente.*

Demostración. i) Las hipótesis hechas implican que existen $\alpha > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $k \geqslant n_0$ es $R_k \geqslant \alpha$. Sea $\delta = \alpha - 1 > 0$. Tenemos que:

$$R_k - 1 = (k-1) - k\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant \delta \qquad (k \geqslant n_0),$$

por lo que

$$a_k \leqslant \frac{1}{\delta}\big((k-1)a_k - ka_{k+1}\big) \qquad (k \geqslant n_0).$$

Sumando estas desigualdades desde $k = n_0$ hasta $k = n > n_0$, obtenemos que:

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k \leqslant \frac{1}{\delta}\big((n_0-1)a_{n_0} - na_{n+1}\big) < \frac{1}{\delta}(n_0-1)a_{n_0}.$$

Por el criterio básico de convergencia para series de términos positivos, deducimos que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces $(n-1)a_n - na_{n+1} \leqslant 0$ y resulta que la sucesión $\{na_{n+1}\}$ es creciente para $n \geqslant k$, luego $na_{n+1} \geqslant ka_{k+1}$, es decir, para todo $n \geqslant k$ es $a_{n+1} \geqslant ka_{k+1}\dfrac{1}{n}$ y, por el criterio de comparación, deducimos que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente. □

El criterio de Raabe suele aplicarse cuando el criterio del cociente no proporciona información, es decir, cuando $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. En tal caso la sucesión:

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$$

es de la forma $v_n(u_n - 1)$ donde $v_n = -n$ y $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. Aplicando el criterio de equivalencia logarítmica tenemos que:

$$\lim R_n = L \iff \lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-n} = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n} \to \mathrm{e}^L$$

con los convenios usuales para los casos en que $L = \pm\infty$.

9.36 Proposición (Forma alternativa del criterio de Raabe). *Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Pongamos $S_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$.*

i) Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L < 1$ o si $S_n \to 0$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Los criterios de convergencia que acabamos de estudiar hacen siempre hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$ para obtener información sobre el comportamiento de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Ya dijimos antes que esto es típico del estudio de las series. Pero no lo olvides: no estamos estudiando la sucesión $\{a_n\}$ sino la sucesión $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$.

9.2.1. Ejercicios propuestos

450. Estudia la convergencia de las siguientes series donde $a>0$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

$a)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ $\quad b)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$ $\quad c)\ \sum_{n\geqslant 1}n^{-1-1/n}$

$d)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{3^n n!}$ $\quad e)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n$ $\quad f)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)^{\log n}$

$g)\ \sum_{n\geqslant 1}a^{\log n}$ $\quad h)\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$ $\quad i)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}-\left(1+1/n^2\right)^{n^2}\right)$

$j)\ \sum_{n\geqslant 1}(\sqrt[n]{n}-1)^\alpha$ $\quad k)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ $\quad l)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha}$

$m)\ \sum_{n\geqslant 1}a^{\sum_{j=1}^n 1/j}$ $\quad n)\ \sum_{n\geqslant 1}n^\alpha\left(\sqrt[n]{n+1/n}-\sqrt[n]{n}\right)$ $\quad o)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

$p)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\left((2n)!\right)^3}{2^{6n}(n!)^6}$ $\quad q)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n-1\right)$ $\quad r)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\alpha}}$

$s)\ \sum_{n\geqslant 1}\log\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$ $\quad t)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^3$ $\quad u)\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt[n^2]{n}-1}{\log n}$

451. Estudia la convergencia de las siguientes series donde $a>0$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$a)\ \sum_{n\geqslant 1}(n^{1/n^2}-1);$ $\quad b)\ \sum_{n\geqslant 1}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$c)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right)a^{\log n};$ $\quad d)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right)^\alpha$

$e)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}-(1+1/n)^n\right);$ $\quad f)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(n^{n^\alpha}-1\right)$

$g)\ \sum_{n\geqslant 1}n^\alpha\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right);$ $\quad h)\ \sum_{n\geqslant 1}n^\alpha\exp\left(-\beta\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)$

452. Estudia la convergencia de las series.

a) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}$

b) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+2)}{5\cdot 6\cdot 7\cdots(n+5)}\right)^{1/2}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(a-\sqrt{a})(a-\sqrt[3]{a})\cdots(a-\sqrt[n]{a}) \ \ (a>0)$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)n^{\alpha}} \ \ (a>0,\ \alpha\in\mathbb{R})$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^{\log n}\log(1+1/n) \ \ (a>0)$

f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\left(\log(1+1/n)\right)^{\beta}, \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(1+\alpha)(3+\alpha)(5+\alpha)\cdots(2n-1+\alpha)}{(2+\beta)(4+\beta)(6+\beta)\cdots(2n+\beta)}\right)^{\rho}, \quad (\alpha,\beta,\rho\in\mathbb{R}^{+})$

453. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente de números positivos. Dar condiciones que garanticen que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ es convergente.

454. Dar ejemplos de sucesiones $\{a_n\}\to 1$ y decrecientes tales que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ sea en un caso convergente y en otro caso divergente.

455. Sea $a_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{1+a_n}$ ambas convergen o ambas divergen.

456. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos convergente. ¿Qué puede decirse de las series $\sum a_n^2$ y $\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$?

457. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos convergente. Prueba que la sucesión $\{z_n\}$ dada para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$z_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

es convergente.

458. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos convergente. Prueba que para $0<\alpha<1$ la serie $\displaystyle\sum\frac{a_n^{\alpha}}{n}$ es convergente.

Sugerencia. Utilizar la desigualdad de Hölder (ver ejercicio resuelto 140).

459. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos. Prueba que la serie $\displaystyle\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n^{\alpha}}$ es convergente si $\alpha>1/2$. Da un ejemplo de una serie $\sum a_n$ convergente tal que la serie $\displaystyle\sum\frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$ sea divergente.

460. Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$a)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}, \qquad b)\ y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\log k}{k}-\frac{(\log n)^2}{2}.$$

Sugerencia. Estudia la convergencia de las respectivas series de diferencias consecutivas.

9.2.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto 230 Estudia la convergencia de las siguientes series donde $a>0$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

$a)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ $\quad b)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$ $\quad c)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^{-1-1/n}$

$d)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{3^n n!}$ $\quad e)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n$ $\quad f)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)^{\log n}$

$g)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a^{\log n}$ $\quad h)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$ $\quad i)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}-\left(1+1/n^2\right)^{n^2}\right)$

$j)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(\sqrt[n]{n}-1)^{\alpha}$ $\quad k)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ $\quad l)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha}$

$m)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a^{\sum_{j=1}^{n}1/j}$ $\quad n)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^{\alpha}\left(\sqrt[n]{n+1/n}-\sqrt[n]{n}\right)$ $\quad o)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

$p)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\big((2n)!\big)^3}{2^{6n}(n!)^6}$ $\quad q)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n-1\right)$ $\quad r)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\alpha}}$

$s)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\log\left(n\operatorname{sen}\tfrac{1}{n}\right)$ $\quad t)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\tfrac{1}{n}\right)^3$ $\quad u)\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt[n^2]{n}-1}{\log n}$

Solución. Salvo una excepción, son todas series de términos positivos. Para estudiar su convergencia aplicaremos los criterios que acabamos de estudiar.

$a)$ Pongamos $a_n=\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Aplicaremos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}\frac{2^{n^2}}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}\frac{n^2+2n+1}{4^n}\to 0.$$

La serie es convergente. ☺

$b)$ Pongamos $a_n=\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$. Apliquemos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+3}}\frac{n^{n+2}}{(n+1)^n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{n^2}{(n+2)^2}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\frac{n^2}{n^2+4n+4}\to \mathrm{e}\,\frac{1}{\mathrm{e}}=1.$$

Además $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1$, por tanto el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de esta serie. Cuando esto ocurre igual sucede con el criterio de la raíz. Esto

nos indica que la serie no es comparable con una serie geométrica. El criterio de Raabe no parece fácil de aplicar. Podemos intentar el primer criterio logarítmico. Tenemos que:

$$\frac{-\log(a_n)}{\log n} = \frac{-n\log(n+1)+(n+2)\log n}{\log n} = \frac{n\log\frac{n}{n+1}}{\log n} + 2 \to 2 > 1.$$

Por tanto la serie es convergente. Este criterio nos dice que la serie $\sum a_n$ es comparable con una serie de Riemann de exponente $\alpha = 2$. Que efectivamente esto es así es fácil de comprobar. Si nos fijamos en a_n y recordamos que la sucesión $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ es creciente y converge a e, enseguida nos damos cuenta de lo que sigue:

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n^2}$$

lo que permite concluir, por el criterio de comparación, que la serie es convergente. ☺

9.37 Observación. Antes de empezar a aplicar criterios de convergencia, fíjate bien en la forma que tiene el término general de la serie e intenta relacionarlo con alguna sucesión conocida.

$e)$ Pongamos $a_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$. Apliquemos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{a}\right)^{n+1} n!\left(\frac{a}{n}\right)^n = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{a}.$$

Deducimos que si $a > \mathrm{e}$ la serie es convergente, si $0 < a < \mathrm{e}$ la serie es divergente. Para $a = \mathrm{e}$ el criterio no proporciona información. Ni el criterio de Raabe ni el primer criterio logarítmico parecen fáciles de aplicar. Cuando no queda otro recurso hay que intentar aplicar el criterio de comparación. Supuesto que $a = \mathrm{e}$, tenemos que:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}\frac{1}{\mathrm{e}^n} > \frac{n^n}{n!}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{n+1} > \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{n+1} > \frac{1}{5n}.$$

Donde hemos usado que para todo $k\in\mathbb{N}$ es $\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$, de donde se sigue que para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\mathrm{e}^n} > \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{n!}{(n+1)^n}.$$

Concluimos, por comparación con la serie armónica, que la serie es divergente para $a = \mathrm{e}$. ☺

$f)$ Pongamos $a_n = \left(\dfrac{1}{\log(n+1)}\right)^{\log n}$. Aquí no es apropiado aplicar el criterio del cociente porque no hay factores que se simplifiquen al calcular el cociente de un término al anterior. El criterio de la raíz puede aplicarse, pero no proporciona información sobre el carácter de la serie porque, como debes comprobar, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ y $\sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$. Podemos aplicar el primer criterio logarítmico.

$$\frac{-\log(a_n)}{\log n} = \log(\log(n+1)) \to +\infty.$$

La serie es convergente. Deducimos que se trata de una serie que converge más rápidamente que cualquier serie de Riemann y menos rápidamente que cualquier serie geométrica. ☺

$h)$ Pongamos $a_n = \dfrac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$. Es apropiado aplicar el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{\log n}{n}}}{\log n} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{(\log n)^2}{n}}}{\log n} \to 0.$$

La serie es convergente. ☺

$i)$ Pongamos $a_n = \mathrm{e} - \left(1 + 1/n^2\right)^{n^2}$. Observa que como $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \mathrm{e}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_n > 0$. Los criterios del cociente, de la raíz, de Raabe y los logarítmicos no parecen apropiados para estudiar esta serie. Cuando esto sucede hay que intentar aplicar un criterio de comparación. Si recuerdas el límite, que hemos visto varias veces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\mathrm{e}}{2},$$

se deduce que si $\{x_n\} \to 0$ se verifica la equivalencia asintótica $\mathrm{e} - (1+x_n)^{1/x_n} \sim \frac{\mathrm{e}}{2} x_n$. Por tanto:

$$a_n = \mathrm{e} - \left(1 + 1/n^2\right)^{n^2} \sim \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n^2},$$

y deducimos que la serie converge por el criterio límite de comparación. También podemos usar el criterio básico de comparación usando que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$. Con ello se tiene:

$$a_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+1} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\frac{1}{n^2} < \frac{\mathrm{e}}{n^2}.$$

☺

$j)$ Pongamos $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$. Trata de aplicar algunos criterios de convergencia. Las series que cuesta más trabajo estudiar son aquellas en las que los criterios del cociente, de la raíz, de Raabe y los logarítmicos no sirven para estudiar su convergencia, ya sea porque los límites que hay que calcular son difíciles o porque dichos criterios no proporcionan información. Cuando esto ocurre hay que aplicar un criterio de comparación. En nuestro caso tenemos que:

$$\sqrt[n]{n} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\log n}{n}} - 1 \sim \frac{\log n}{n} \longrightarrow a_n \sim \left(\frac{\log n}{n}\right)^\alpha.$$

Deducimos que la serie converge si, y sólo si, $\alpha > 1$. ☺

$l)$ Pongamos $a_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha} = \left(1 - \dfrac{n}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha}$. Después de pensarlo un poco, parece apropiado usar el primer criterio logarítmico. Tenemos que:

$$\frac{-\log(a_n)}{\log n} = -\frac{n^\alpha}{\log n}\log\left(1 - \frac{n}{n^2+n+1}\right) \sim \frac{n^\alpha}{\log n}\frac{n}{n^2+n+1} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\log n}.$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\log(a_n)}{\log n}=\begin{cases}+\infty, & \text{si } \alpha>1;\\ 0, & \text{si } \alpha<1.\end{cases}$$

La serie converge si $\alpha>1$ y no converge si $\alpha<1$. Para $\alpha=1$ se tiene que $\{a_n\}\to\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ y por tanto la serie no converge porque su término general no converge a 0. ☺

$m)$ Pongamos $a_n=a^{\sum_{j=1}^{n}1/j}$. Es evidente que si $a\geqslant 1$ se tiene que $a_n\geqslant 1$ y, por tanto, la serie no es convergente porque $\{a_n\}$ no converge a 0. Podemos aplicar el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a^{\frac{1}{n+1}}\to 1.$$

Este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Intentemos el criterio de Raabe.

$$R_n=n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=n\big(1-a^{\frac{1}{n+1}}\big)=-n\big(\,\mathrm{e}^{\frac{\log a}{n+1}}-1\big)\sim -n\frac{\log a}{n+1}\to-\log a.$$

Deducimos que si $-\log a>1$, es decir, $a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ la serie converge, y si $-\log a<1$, es decir, $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ la serie no converge. En el caso en que $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ se tiene que:

$$R_n=n\big(1-\mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}}\big)\leqslant 1\iff \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}}\geqslant 1-\frac{1}{n}\iff \mathrm{e}\leqslant\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n+1}.$$

Esta última desigualdad es cierta porque para todo $k\in\mathbb{N}$ es $\mathrm{e}<\big(1+\frac{1}{k}\big)^{k+1}<\big(1+\frac{1}{k}\big)^{k+2}$.

También podemos hacer este ejercicio recordando la estrategia 7.33 con lo que:

$$a_n=a^{\sum_{j=1}^{n}1/j}=a^{\gamma_n+\log n}=a^{\gamma_n}a^{\log n}\sim a^{\gamma}a^{\log n}.$$

También puede aplicarse el primer criterio logarítmico. ☺

$n)$ Pongamos $a_n=n^{\alpha}\big(\sqrt[n]{n+1/n}-\sqrt[n]{n}\,\big)$. Tenemos que:

$$a_n=n^{\alpha}\sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\sim n^{\alpha}\left(\exp\left(\frac{\log\big(1+\frac{1}{n^2}\big)}{n}\right)-1\right)\sim n^{\alpha}\frac{\log\big(1+\frac{1}{n^2}\big)}{n}\sim n^{\alpha-3}.$$

Por el criterio límite de comparación la serie converge si, y sólo si, $\alpha-3<-1$, esto es, $\alpha<2$. ☺

$o)$ Pongamos $a_n=\left(n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$. Aplicaremos el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Se trata de una indeterminación del tipo 1^{∞}. Aplicamos el criterio de equivalencia logarítmica:

$$n^2\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}-1\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}\to-\frac{1}{6}$$

porque, como debe saber, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$. Luego $\sqrt[n]{a_n} \to e^{\frac{-1}{6}} < 1$ y la serie es convergente. ☺

$p)$ Pongamos $a_n = \dfrac{\big((2n)!\big)^3}{2^{6n}(n!)^6}$. Aplicaremos el criterio del cociente porque hay muchos factores que se van a simplificar.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\big((2n+2)!\big)^3}{2^{6n+6}((n+1)!)^6}\frac{2^{6n}(n!)^6}{\big((2n)!\big)^3} = \frac{(2n+1)^3(2n+2)^3}{2^6(n+1)^6} = \frac{(2n+1)^3}{8(n+1)^3} \to 1.$$

Como este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie, aplicaremos el criterio de Raabe.

$$R_n = n\left(1 - \frac{(2n+1)^3}{8(n+1)^3}\right) = \frac{12n^3 + 18n^2 + 7n}{8n^3 + 24n^2 + 24n + 8} \to \frac{3}{2} > 1.$$

La serie converge. ☺

$r)$ Pongamos $a_n = \dfrac{n!\,e^n}{n^{n+\alpha}}$. Apliquemos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 1.$$

Este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Apliquemos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \frac{1}{e^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+\alpha n} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha n}$$

Tenemos que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\alpha n} \to e^\alpha$. La sucesión $z_n = \left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n$ es una indeterminación 1^∞, por tanto $\{z_n\} \to e^L$ donde L es el límite de:

$$n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} - 1\right) = \frac{1}{e}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} \to -\frac{1}{2}.$$

Por tanto:

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n \to e^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

La serie converge si $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, esto es $\alpha > \frac{3}{2}$ y no converge para $\alpha < \frac{3}{2}$. Para $\alpha = 3/2$ la serie no converge; de hecho se verifica que:

$$R_n = n\left(1 - e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}}\right) \leqslant 1$$

pero esta desigualdad no parece que sea fácil de probar. ☺

$s)$ Pongamos $a_n = \log\left(n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$. Después de pensarlo un poco te darás cuenta de que hay que aplicar un criterio de comparación. Tenemos que:

$$a_n = \log\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right).$$

Observa que $a_n < 0$ porque para $x > 0$ es $\operatorname{sen} x < x$. Esto lleva a considerar la función:

$$f(x) = \log\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Para $x \to 0$ tenemos las siguientes equivalencias asintóticas:

$$f(x) \sim \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} \sim \frac{-1}{6}x^2.$$

Deducimos que:

$$-a_n = -f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}.$$

Por el criterio límite de comparación se sigue que la serie $\sum(-a_n) = -\sum a_n$ es convergente y, por tanto, $\sum a_n$ es convergente. ☺

Ejercicio resuelto 231 Estudia la convergencia de las siguientes series donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1}(n^{1/n^2} - 1); \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$c)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right)^{\alpha} \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 1} n^{\alpha}\exp\left(-\beta\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

Solución. $a)$ Pongamos $a_n = n^{1/n^2} - 1$. Tenemos que:

$$a_n = \mathrm{e}^{\frac{\log n}{n^2}} - 1 \sim \frac{\log n}{n^2}.$$

Por el criterio límite de comparación, la serie es convergente.

$b)$ Pongamos $a_n = (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Tenemos que:

$$a_n = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

Por el criterio límite de comparación, la serie es convergente.

$c)$ Pongamos $a_n = \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right)^{\alpha}$. Aplicaremos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)(2n+5)}\right)^{\alpha}\left(\frac{5\cdot 7\cdots(2n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^{\alpha} = \left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)^{\alpha}$$

Este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Apliquemos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n} = \left(\frac{2n+5}{2n+2}\right)^{\alpha n} \to \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\alpha}.$$

Por tanto, si $\frac{3}{2}\alpha > 1$, o sea, $\alpha > \frac{2}{3}$ la serie converge, y si $\frac{3}{2}\alpha < 1$, o sea, $\alpha < \frac{2}{3}$ la serie no converge. Para $\alpha = \frac{2}{3}$ la serie no converge, pero este caso requiere un estudio específico que no vamos a hacer.

Vamos a hacer este ejercicio con otro tipo de técnica que resulta muy conveniente para series cuyo término general es parecido al de la serie que nos ocupa.

9.38 Estrategia. Consideremos una serie del tipo $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(c_n)^\alpha$ donde $c_n = \dfrac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}$ y p_j, q_j son números enteros positivos. Además q_n es de la forma $q_n = p_n + k$ donde k es un entero positivo fijo. En el ejemplo que nos ocupa es $p_n = 2n$ y $q_n = 2n + 3 = p_n + 3$. Observa que para que $\{c_n\} \to 0$ es necesario que $\alpha > 0$. Una estrategia bastante buena para estudiar estas series consiste en acotar directamente c_n usando la desigualdad (válida por ser $p_n < q_n$):

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_n + k}{q_n + k} = \frac{q_n}{q_n + k}.$$

Para que esta estrategia pueda aplicarse se necesita también que podamos relacionar con facilidad $q_n + k$ con p_n. Lo usual es que se tenga una relación del tipo $q_n + k = p_{n+k}$. En nuestro ejemplo es $q_n + 3 = 2n + 6 = 2(n + 3) = p_{n+3}$. Supuesto que esto es así, tenemos que:

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{q_n}{p_{n+k}}.$$

En nuestro ejemplo es:

$$\frac{2n}{2n+3} < \frac{2n+3}{2n+6}. \tag{9.8}$$

Una vez dada la idea general, por comodidad, vamos a seguir con nuestro ejemplo.

Usando la desigualdad (9.8) para $n = 1, 2, \ldots$, tenemos que:

$$c_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)} = \frac{2}{5}\frac{4}{7}\cdots\frac{2n}{2n+3} < \frac{5}{8}\frac{7}{10}\cdots\frac{2n+3}{2n+6} =$$
$$= \frac{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)}{8 \cdot 10 \cdots (2n)(2n+2)(2n+4)(2n+6)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}\frac{1}{c_n}.$$

Observa que, aplicando la desigualdad (9.8) a los factores que forman c_n, obtenemos una desigualdad que relaciona c_n con $\dfrac{1}{c_n}$; ésta es la idea en la que se basa esta estrategia. De la desigualdad anterior deducimos que:

$$c_n^2 < \frac{48}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}$$

Supuesto que $\alpha > 0$ (condición necesaria para la convergencia) se sigue que:

$$c_n^\alpha < \left(\frac{48}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{48}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sim 6^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha}},$$

deducimos, por el criterio básico de comparación con la serie de Riemann de exponente $\frac{3}{2}\alpha$ que si $\frac{3}{2}\alpha > 1$, o sea, $\alpha > \frac{2}{3}$ la serie es convergente.

Esto ya lo sabíamos por el estudio hecho previamente. La novedad viene ahora. Se puede repetir el mismo proceso anterior para acotar c_n por abajo, o sea, para minorar c_n. La idea es la misma. Si has entendido lo anterior lo que sigue debe estar claro.

Usaremos ahora la desigualdad:

$$\frac{2n}{2n+3} > \frac{2n-3}{2n} \tag{9.9}$$

Usando esta desigualdad para $n = 2, 3, \ldots$, tenemos que:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n-2)(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdots(2n+1)(2n+3)} = \frac{2}{5}\frac{4}{7}\frac{6}{9}\frac{8}{11}\cdots\frac{2n-2}{2n+1}\frac{2n}{2n+3} > \\ &> \frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}\cdots\frac{2n-5}{2n-2}\frac{2n-3}{2n} = \\ &= \frac{6}{5}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\frac{5\cdot 7\cdots(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \\ &= \frac{12}{5}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\frac{1}{c_n}. \end{aligned}$$

De donde, al igual que antes, se sigue que:

$$c_n^\alpha > \left(\frac{12}{5}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sim \left(\frac{12}{5}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha}}.$$

Deducimos, por el criterio básico de comparación con la serie de Riemann de exponente $\frac{3}{2}\alpha$ que si $\frac{3}{2}\alpha \geqslant 1$, o sea, $\alpha \geqslant \frac{2}{3}$ (en particular para $\alpha = \frac{2}{3}$) la serie no es convergente. ☺

$d)$ Pongamos $a_n = n^\alpha \exp\left(-\beta\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{n+1}} \to 1.$$

Aplicaremos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\alpha} \mathrm{e}^{\beta\frac{n}{n+1}} \to \mathrm{e}^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{\beta} = \mathrm{e}^{\beta-\alpha}.$$

Por tanto, si $\beta-\alpha > 1$ la serie converge y si $\beta-\alpha < 1$ la serie no converge. El caso en que $\beta-\alpha = 1$ no queda resuelto con este criterio.

Otra forma de proceder es aplicando la estrategia 7.33. Tenemos que:

$$a_n = n^\alpha \exp\left(-\beta\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = n^\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta\log n-\beta\gamma_n} = n^\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta\log n}\,\mathrm{e}^{-\beta\gamma_n} \sim \mathrm{e}^{\beta\gamma}\,n^\alpha n^{-\beta} = \mathrm{e}^{\beta\gamma}\,\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}.$$

Por el criterio límite de comparación, la serie converge si, y sólo si, $\beta-\alpha > 1$. ☺

Ejercicio resuelto 232 Estudia la convergencia de las series.

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(a-\sqrt{a})(a-\sqrt[3]{a})\cdots(a-\sqrt[n]{a})\ \ (a>0)$

Solución. a) Pongamos $a_n=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{\sqrt[3]{n+1}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)(5+3(n+1))}\,\frac{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}{3^n n!}=$$
$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{3n+3}{3n+8}\to 1.$$

El criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Aplicaremos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\left(\frac{3n+8}{3n+3}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\left(1+\frac{5}{3n+3}\right)^n\to \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}=\mathrm{e}^2\,.$$

La serie converge.

b) Pongamos $a_n=(a-\sqrt{a})(a-\sqrt[3]{a})\cdots(a-\sqrt[n]{a})$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a-\sqrt[n+1]{a}\to a-1.$$

Por tanto, si $a-1<1$, o sea, $0<a<2$, la serie converge; y si $a-1<1$ o sea $a>2$ la serie no converge. Para el caso en que $a=2$ el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Aplicaremos el criterio de Raabe.

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=n\big(\sqrt[n+1]{2}-1\big)\to\log 2<1.$$

La serie no converge. ☺

Ejercicio resuelto 233 Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente de números positivos. Dar condiciones que garanticen que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ es convergente.

Solución. Pongamos $x_n=\dfrac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}$. Si $\{a_n\}$ no está mayorada, como es creciente se tiene que $\{a_n\}\to+\infty$. Por tanto, hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant k$ se verifica que $a_n\geqslant 2$. Deducimos que para $n\geqslant k$ se verifica que:

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_{k+1}\cdots a_n}=\frac{2^k}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}\frac{1}{2^k}\frac{1}{a_ka_{k+1}\cdots a_n}\leqslant M\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}}=M\frac{1}{2^n}.$$

Donde hemos puesto $M=\dfrac{2^k}{a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}}$ que es una constante independiente de n. Concluimos que la serie es convergente por comparación con la serie geométrica de razón $1/2$.

Si $\{a_n\}$ está mayorada, como es creciente se tiene que $\{a_n\} \to L$ donde $L > 0$. Si $L > 1$, podemos tomar un número λ tal que $1 < \lambda < L$, con lo que podemos asegurar que hay algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geqslant \lambda$ para $n \geqslant k$. Podemos ahora repetir el razonamiento anterior con 2 sustituido por λ y concluimos que la serie converge por comparación con la serie geométrica de razón $1/\lambda$. Si $0 < L \leqslant 1$, entonces como $0 < a_n \leqslant L$, se tiene que $0 < a_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $x_n \geqslant 1$ por tanto $\{x_n\}$ no converge a 0, lo que implica que la serie no converge.

También puede aplicarse el criterio del cociente.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \to \frac{1}{L}$$

donde $\{a_n\} \to L \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Por lo que si $L > 1$ o si $L = +\infty$, se tiene que $\frac{1}{L} < 1$ y la serie converge. Si $L < 1$ la serie no converge, y si $L = 1$ tampoco converge porque entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1$. ☺

Ejercicio resuelto **234** Dar ejemplos de sucesiones $\{a_n\} \to 1$ y decrecientes tales que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$ sea en un caso convergente y en otro caso divergente.

Solución. La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ decrece y converge a 1. Tenemos que:

$$a_1 a_2 \dots a_n = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = n + 1.$$

La correspondiente serie es divergente.

La sucesión $a_n = 3^{1/n}$ es decreciente y converge a 1. Tenemos que:

$$x_n = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}}.$$

Esta serie es convergente porque aplicando el criterio de Raabe obtenemos:

$$n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = n\left(1 - \sqrt[n+1]{\frac{1}{3}}\right) \to -\log\frac{1}{3} = \log 3 > 1.$$

Ejercicio resuelto **235** Sea $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{1+a_n}$ ambas convergen o ambas divergen.

Solución. Pongamos $b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$. Como $1+a_n \geqslant 1$, la desigualdad $b_n \leqslant a_n$ prueba que si la serie $\sum a_n$ es convergente también es convergente la serie $\sum b_n$. Recíprocamente, si la serie $\sum b_n$ es convergente entonces debe ser $\{b_n\} \to 0$, por lo que hay algún $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $b_n < \frac{1}{2}$, esto es, $2a_n < 1 + a_n$ por lo que $a_n < 1$. Lo que implica que $a_n^2 < a_n$, y obtenemos que $a_n^2 + a_n < 2a_n$ de donde $a_n < \dfrac{2a_n}{1+a_n} = 2b_n$. De esta desigualdad se sigue, por el criterio de comparación, que la serie $\sum a_n$ también es convergente. ☺

Ejercicio resuelto 236 Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos convergente. ¿Qué puede decirse de las series $\sum a_n^2$ y $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$?

Solución. Como $\{a_n\} \to 0$, hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $0 < a_n < 1$, lo que implica que $0 < a_n^2 < a_n$ y deducimos, por el criterio de comparación, que la serie $\sum a_n^2$ es convergente. Como

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n^2 + a_{n+1}^2),$$

se sigue, también por el criterio de comparación, que la serie $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ es convergente. ☺

Ejercicio resuelto 237 Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos. Prueba que la serie $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1/2$. Da un ejemplo de una serie $\sum a_n$ convergente tal que la serie $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$ sea divergente.

Solución. Recuerda la desigualdad $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Sustituye a por $\sqrt{a_n}$ y b por $\frac{1}{n^\alpha}$ y resulta que:

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Como $2\alpha > 1$ la serie $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ es convergente. Como $\sum a_n$ es convergente por hipótesis, de la desigualdad anterior se sigue, por el criterio de comparación, que $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ es convergente.

La serie $\sum \frac{1}{n(\log n)^2}$ es convergente pero $\sum \frac{1}{n(\log n)}$ es divergente. ☺

Ejercicio resuelto 238 Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, \qquad b)\ y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} - \frac{(\log n)^2}{2}.$$

Sugerencia. Estudia la convergencia de las respectivas series de diferencias consecutivas.

Solución. a) Tenemos que:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2}.$$

Puesto que $\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2}$ es convergente. Por tanto, la sucesión:

$$x_1 + \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1}$$

es convergente.

b) Usando que $\log(n+1) = \log\left(n(1+\frac{1}{n})\right) = \log n + \log(1+\frac{1}{n})$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
y_n - y_{n+1} &= -\frac{\log(n+1)}{n+1} + \frac{(\log(n+1))^2}{2} - \frac{(\log n)^2}{2} = \\
&= -\frac{\log(n+1)}{n+1} + \frac{\left(\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2}{2} - \frac{(\log n)^2}{2} = \\
&= -\frac{\log(n+1)}{n+1} + \log n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \\
&= -\frac{\log n}{n+1} - \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \\
&= \log n\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} \sim \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}$ es convergente. También es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2$ porque $\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}$. Usando la desigualdad que ya debes saber de memoria:

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

se sigue que:

$$0 < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n(n+1)},$$

de donde se deduce que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\log n\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$ es convergente. Concluimos que la serie $\sum(y_n - y_{n+1})$ es convergente por ser suma de tres series convergentes. Por tanto, la sucesión:

$$y_1 - \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k+1}) = y_{n+1}$$

es convergente. ☺

9.3. Criterios de convergencia no absoluta

Los criterios de convergencia para series de términos positivos se aplican, obvio es decirlo, para estudiar la convergencia absoluta de cualquier serie. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? Naturalmente, podemos intentar comprobar si la serie verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es difícil. Pues bien, los criterios que vamos a estudiar a continuación proporcionan información sobre la convergencia no absoluta. Probaremos, en primer lugar, una igualdad de la que se deducen con facilidad dichos criterios.

9.39 Proposición (Suma por partes (Abel, 1826)). *Dadas dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$*, pongamos* $A_p = \sum_{j=1}^{p} a_j$*. Se verifica entonces, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, que:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} \tag{9.10}$$

Demostración. Pongamos, por comodidad de notación, $A_0 = 0$, con lo que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $a_k = A_k - A_{k-1}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} b_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}\,. \qquad \square\end{aligned}$$

9.40 Teorema (Criterio general de Dirichlet). *Sean* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dos sucesiones, y pongamos* $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$*. Supongamos que:*

i) Existe un número $M > 0$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es* $|A_n| \leqslant M$*.*

ii) La serie $\sum_{n\geqslant 1} |b_n - b_{n+1}|$ *es convergente.*

iii) $\{b_n\} \to 0$*.*

Se verifica entonces que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ *es convergente.*

Demostración. Puesto que $|A_n||b_n - b_{n+1}| \leqslant M|b_n - b_{n+1}|$, deducimos, por el criterio de comparación que la serie $\sum_{n\geqslant 1} A_n(b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente y, por tanto, es convergente, es decir, la sucesión $\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente. Como, además, la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$ converge a cero por ser producto de una sucesión acotada por otra convergente a cero, deducimos, en virtud de la igualdad (9.10), que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ es convergente. $\square$

9.41 Teorema (Criterio general de Abel). *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones y supongamos que:*

i) La serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

ii) La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}|b_n - b_{n+1}|$ *es convergente.*

Se verifica entonces que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b_n$ *es convergente.*

Demostración. La hipótesis i) nos dice que la sucesión $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ es convergente; en particular está acotada, por lo que, al igual que antes, se deduce que la sucesión $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente. Además, ii) implica que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}(b_n - b_{n+1})$ es convergente,y como dicha serie es la sucesión $\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}(b_j - b_{j+1})\right\} = \{b_1 - b_{n+1}\}$, obtenemos que $\{b_n\}$ es convergente. Resulta así que la sucesión $\left\{A_n b_{n+1}\right\}$ converge por ser producto de sucesiones convergentes y, en virtud de la igualdad (9.10), deducimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b_n$ es convergente. □

9.42 Proposición. *Si la sucesión* $\{b_n\}$ *es monótona y acotada, entonces se verifica que es convergente la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1}|b_n - b_{n+1}|$.

Demostración. En efecto, basta tener en cuenta que

$$\sum_{j=1}^{n}|b_j - b_{j+1}| = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}(b_j - b_{j+1}) = b_1 - b_{n+1}, & \text{si } \{b_n\} \text{ es decreciente;} \\ \sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j+1} - b_j) = b_{n+1} - b_1, & \text{si } \{b_n\} \text{ es creciente.} \end{cases}$$

□

La proposición anterior permite particularizar los criterios de Dirichlet y de Abel de la forma que sigue.

9.43 Corolario (Criterio particular de Dirichlet). *Sean* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dos sucesiones, y pongamos* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. *Supongamos que:*

i) Existe un número $M > 0$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es* $\left|A_n\right| \leqslant M$.

ii) $\{b_n\}$ *es monótona y* $\{b_n\} \to 0$.

Se verifica entonces que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b_n$ *es convergente.*

9.44 Corolario (Criterio particular de Abel). *Sean* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dos sucesiones y supongamos que:*

i) La serie $\sum a_n$ *es convergente.*

ii) $\{b_n\}$ *es monótona y acotada.*

Se verifica entonces que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b_n$ *es convergente.*

Hay un caso todavía más particular del criterio de Dirichlet que se aplica a *series alternadas*, es decir, a series del tipo $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}x_n$ donde $x_n \geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Este criterio es debido a Leibniz, y aunque puede deducirse fácilmente del corolario 9.43, merece la pena dar una prueba directa del mismo porque así obtenemos una fácil acotación del error que se comete al aproximar la suma de una serie alternada por una suma parcial de la serie.

9.45 Proposición (Criterio de Leibniz para series alternadas). *Supongamos que la sucesión* $\{a_n\}$ *es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada* $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ *es convergente. Además, si* $A_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ *y* $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$*, entonces para todo* $n\in\mathbb{N}$ *se verifica que* $|S - A_n| \leqslant a_{n+1}$.

Demostración. Es inmediato comprobar que la sucesión $\{A_{2n-1}\}$ es decreciente y $\{A_{2n}\}$ es creciente. Como $A_2 \leqslant A_{2n} \leqslant A_{2n-1} \leqslant A_1$, deducimos que ambas sucesiones convergen. Además, como $A_{2n-1} - A_{2n} = a_{2n} \to 0$, concluimos que A_n converge.

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \lim\{A_n\}$. Puesto que

$$S = \lim\{A_{2n-1}\} = \inf\{A_{2n-1} : n\in\mathbb{N}\} = \lim\{A_{2n}\} = \sup\{A_{2n} : n\in\mathbb{N}\},$$

se verifica que $A_{2n} \leqslant S \leqslant A_{2n+1}$, de donde:

$$0 \leqslant S - A_{2n} \leqslant a_{2n+1}, \quad \text{y} \quad -a_{2n} \leqslant S - A_{2n-1} \leqslant 0. \tag{9.11}$$

En consecuencia $|S - A_n| \leqslant a_{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. □

Teniendo en cuenta la proposición 9.8, el criterio de Leibniz prueba que las series de la forma $\sum(-1)^{n+1}a_n$ donde $\{a_n\} \to 0$ y la sucesión $\{a_n\}$ *es monótona a partir de un cierto término en adelante*, son convergentes (aunque la acotación del error antes obtenida ya no tiene por qué ser válida).

Observa que los criterios de Dirichlet y de Abel pueden, en principio, ser aplicados a una serie cualquiera, $\sum x_n$, pues sólo tenemos que expresar x_n de la forma $x_n = a_n b_n$, lo que, evidentemente, puede hacerse de muchas maneras; pero es imprescindible elegir apropiadamente a_n y b_n para que pueda aplicarse con éxito alguno de dichos criterios.

9.46 Estrategia (Estrategia para estudiar la convergencia de una serie). Para estudiar la convergencia de una serie $\sum z_n$ numérica lo primero que debes hacer es estudiar la convergencia absoluta, es decir la convergencia de la serie de términos positivos $\sum|z_n|$, para lo que se aplican los criterios de convergencia para series de términos positivos. Si la serie $\sum|z_n|$ converge entonces, en virtud del teorema 9.14, sabemos que la serie $\sum z_n$ también converge (y todas sus reordenaciones). Cuando la serie $\sum|z_n|$ no converge se aplican los criterios de Dirichlet o de Abel para estudiar directamente la convergencia de la serie $\sum z_n$.

9.3.1. Ejercicios propuestos

461. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de las siguientes series.

$a)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\log(n+2)}{n+2}$ $\qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n}\frac{1}{n^{\alpha}+(-1)^{n}},\ (\alpha\in\mathbb{R})$

$c)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{2+(-1)^n}{n}$ $\qquad d)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$

$e)\ \sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ $\qquad f)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^{\alpha},\ (\alpha\in\mathbb{R})$

$g)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(1-n\log\frac{n+1}{n}\right)$ $\qquad h)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{(\log n)^r}{n^s},\ (r,s\in\mathbb{R}^+)$

462. Estudia, según los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de la serie

$$\sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n+1}n^{\alpha}\left(\frac{-1}{n}-\log\left(\frac{n-1}{n}\right)\right).$$

463. Estudia, según los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de la serie

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}n^{\alpha}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1).$$

Sugerencia. Prueba que la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ dada para todo $x>0$ por:

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x^{\alpha}}$$

es creciente siempre que $\alpha<1$.

9.3.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **239** Estudia la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de las siguientes series.

$a)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n}\frac{1}{n^{\alpha}+(-1)^{n}},\ (\alpha\in\mathbb{R})$ $\qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

$c)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^{\alpha},\ (\alpha\in\mathbb{R})$ $\qquad d)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(1-n\log\frac{n+1}{n}\right)$

Solución. a) Pongamos $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha + (-1)^n}$. Si $\alpha \leqslant 0$ entonces $\{a_n\}$ no converge a 0 y la serie no converge. Supondremos en lo que sigue que $\alpha > 0$. Tenemos que:

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

Deducimos que si $\alpha > 1$ la serie converge absolutamente. Consideremos que $0 < \alpha \leqslant 1$. Pongamos:

$$(-1)^n \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + b_n \longrightarrow b_n = \frac{1}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)}$$

Por el criterio de Leibniz, la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ es convergente ($\alpha > 0$). Como $0 < b_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$, por el criterio límite de comparación, la serie $\sum b_n$ es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1/2$. Concluimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha+(-1)^n}$ converge si $\alpha > 1/2$. En resumen, la serie converge absolutamente si $\alpha > 1$ y converge no absolutamente si $1/2 < \alpha \leqslant 1$. La serie no converge para $\alpha \leqslant 1/2$. ☺

b) Pongamos $a_n = \log\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$. Observa que $a_n = (-1)^n x_n$ donde $x_n = |a_n|$. Probemos que $x_{2n+1} \leqslant x_{2n} \leqslant x_{2n-1}$, de donde se sigue que $\{x_n\}$ decrece a 0. Usaremos la desigualdad (que tú debes comprobar), válida para $0 < x < 1$, $\log(1 - x) \leqslant -x$. Tenemos:

$$x_{2n-1} = \left|\log\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\right| = -\log\left(1-\frac{1}{2n-1}\right) \geqslant \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) = x_{2n}$$

Luego $x_{2n} < x_{2n-1}$ para $n \geqslant 2$. Por otra parte:

$$x_{2n+1} = -\log\left(1+\frac{-1}{2n+1}\right) = -\log\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \log\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) = x_{2n}$$

Concluimos, por el criterio de Leibniz, que la serie $\sum a_n$ es convergente. Puesto que:

$$|a_n| = \left|\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right| \sim \frac{1}{n}$$

la serie no es absolutamente convergente. ☺

c) Estudiaremos primero la convergencia absoluta. Sea $a_n = \left(\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right)^\alpha$. Si $\alpha \leqslant 0$ entonces $\{a_n\}$ no converge a 0 y la serie no es convergente. Supondremos en lo que sigue que $\alpha > 0$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^\alpha \to 1.$$

El criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia absoluta de la serie. Aplicaremos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{\alpha n} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{\alpha n} \to \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Por tanto, si $\frac{\alpha}{2} > 1$, o sea $\alpha > 2$ la serie converge absolutamente; si $\frac{\alpha}{2} < 1$, o sea $\alpha < 2$ la serie no converge absolutamente. El caso en que $\alpha = 2$ requiere un estudio particular (ver más adelante). Nos queda por estudiar lo que ocurre si $0 < \alpha \leqslant 2$. Observa que para $\alpha > 0$ es evidente que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. Lo que no es evidente es que converja a 0. Para aplicar el criterio de Leibniz a la serie $\sum(-1)^{n+1}a_n$ hay que probar que $\{a_n\} \to 0$. Esto puedes hacerlo comprobando que la sucesión $\log(a_n) \to -\infty$. Esto es fácil y te lo dejo para que lo hagas tú. Yo voy a seguir otro camino. Aplicando la estrategia 9.38 a la sucesión $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ se obtiene fácilmente que:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow \frac{1}{2n^{\alpha/2}} < a_n < \frac{1}{(2n+1)^{\alpha/2}}$$

Desigualdad que implica que $\{a_n\} \to 0$ para todo $\alpha > 0$. Además esta desigualdad nos dice que para $\alpha = 2$ es $a_n > \frac{1}{2n}$ lo que implica que la serie no converge absolutamente para $\alpha = 2$. En resumen: hay convergencia absoluta para $\alpha > 2$ y hay convergencia no absoluta para $0 < \alpha \leqslant 2$.

Ejercicio resuelto 240 Estudia, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de la serie

$$\sum_{n \geqslant 2} (-1)^{n+1} n^{\alpha} \left(\frac{-1}{n} - \log\left(\frac{n-1}{n}\right) \right).$$

Solución. Pongamos $z_n = (-1)^{n+1} n^{\alpha} \left(\frac{-1}{n} - \log\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$. Estudiaremos primero la convergencia absoluta. Tenemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x - \log(1-x)}{x^2} = \frac{1}{2} \longrightarrow f(x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

y por tanto $|z_n| = n^{\alpha} f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$. Por tanto, la serie $\sum z_n$ converge absolutamente si, y sólo si, $2-\alpha > 1$, o sea, $\alpha < 1$. Si $2-\alpha \leqslant 0$, o sea $\alpha \geqslant 2$, entonces $\{z_n\}$ no converge a 0 y por tanto la serie $\sum z_n$ no es convergente. Queda por ver lo que ocurre cuando $1 \leqslant \alpha < 2$. Para dichos valores de α se tiene que $\{z_n\} \to 0$. Probaremos que $\{z_n\}$ es decreciente. Pongamos $f(x) = x^{-\alpha}(-x - \log(1-x))$ donde $0 < x < 1$. Observa que $z_n = (-1)^{n+1} f(1/n)$. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{1-x} + \alpha x^{\alpha-1}(-x - \log(1-x)),$$

recordando que $-x - \log(1-x) > 0$ para $0 < x < 1$, se sigue que $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Por tanto f es estrictamente creciente en $]0,1]$ y, en particular, es $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right)$. El criterio de Leibniz nos dice que la serie $\sum z_n$ es convergente para $1 \leqslant \alpha < 2$. ☺

9.4. Algunas series cuya suma puede calcularse de forma exacta

Debes tener ya claro que una cosa es estudiar la convergencia de una serie y otra es calcular su suma. Son relativamente pocas las series convergentes cuya suma se puede calcular de forma exacta. Aquí vamos a ver algunas de ellas. No debes esforzarte por memorizar fórmulas para sumar series, sino en comprender y en aplicar los métodos que permiten calcularlas.

Series geométricas. Las series de la forma $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha x^n$ donde $\alpha\in\mathbb{R}$ y $|x|<1$, cuya suma viene dada por $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha x^n=\dfrac{\alpha}{1-x}$.

Series aritmético - geométricas. Son series de la forma $\sum\limits_{n\geqslant 0}p(n)x^n$ donde p es una función polinómica de grad0 $m\geqslant 1$. Aplicando el criterio del cociente se obtiene fácilmente que estas series convergen absolutamente si $|x|<1$. Es claro que no convergen si $|x|\geqslant 1$ pues entonces $\{p(n)x^n\}$ es una sucesión no acotada y, por tanto, no converge a 0. Supongamos que $|x|<1$ y pongamos:

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}p(k)x^k$$

Definamos las *diferencias de primer orden* de p, que notaremos, $\big(\Delta_1 p\big)$, como el polinomio dado para todo $k\in\mathbb{N}$ por $\big(\Delta_1 p\big)(k)=p(k+1)-p(k)$. Observa que $\Delta_1 p$ es un polinomio de grado $m-1$. Tenemos:

$$S-xS=(1-x)S=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p(k)x^k-\sum_{k=0}^{n}p(k)x^{k+1}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\big(p(k+1)-p(k)\big)x^{k+1}+p(0)-p(n)x^{n+1}\right)=p(0)+x\sum_{k=0}^{\infty}\big(\Delta_1 p\big)(k)x^k.$$

Pongamos $S_1=\sum_{k=0}^{\infty}\big(\Delta_1 p\big)(k)x^k$. La igualdad anterior nos dice que $(1-x)S=p(0)+xS_1$. Este procedimiento puede volver a aplicarse a la serie $\sum\limits_{k\geqslant 0}\big(\Delta_1 p)(k)x^k$. De la misma forma obtenemos ahora $(1-x)S_1=\big(\Delta_1 p\big)(0)+xS_2$, donde $S_2=\sum_{k=0}^{\infty}\big(\Delta_2 p\big)(k)x^k$ y $\big(\Delta_2 p\big)$ son las *diferencias de segundo orden* de p definidas para todo $k\in\mathbb{N}$ por:

$$\big(\Delta_2 p\big)(k)=\big(\Delta_1 p\big)(k+1)-\big(\Delta_1 p\big)(k).$$

Observa que $\big(\Delta_2 p\big)$ es un polinomio de grado $m-2$.

Repitiendo este proceso m veces llegaremos a obtener finalmente

$$S_m=\sum_{k=0}^{\infty}\big(\Delta_m p\big)(k)x^k=\frac{\alpha}{1-x}$$

porque las diferencias de orden m, $\big(\Delta_m p\big)$, de un polinomio de grado m son constantes, $\big(\Delta_m p\big)(k)=\alpha$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Conocido S_m calculamos S_{m-1} a partir de la igualdad

$(1-x)S_{m-1} = \big(\Delta_{m-1}p\big)(0) + xS_m$. A partir de S_{m-1} podemos calcular S_{m-2}, etcétera, hasta llegar a obtener finalmente el valor de S.

Series hipergeométricas. Consideremos una serie $\sum a_n$ de términos positivos tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}, \qquad (\alpha > 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}).$$

Escribiendo esta igualdad para $n = k$ en la forma:

$$\alpha k a_{k+1} + \gamma a_{k+1} = \alpha k a_k + \beta a_k$$

y sumando desde $k = 1$ hasta $k = n$ se obtiene:

$$\alpha n a_{n+1} + \gamma(a_{n+1} + S_n - a_1) = \alpha S_n + \beta S_n. \tag{9.12}$$

Donde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Supuesto que la serie sea convergente y que su suma es $S = \lim\{S_n\}$, se deduce de la igualdad anterior que la sucesión $\{n a_{n+1}\}$ también converge y necesariamente su límite debe ser cero (si fuera $n a_{n+1} \to \lambda > 0$ se tendría que $a_n \sim \frac{\lambda}{n}$ lo que implicaría que la serie diverge).

Aplicando el criterio de Raabe se obtiene fácilmente que la serie converge si $\gamma > \alpha + \beta$ y diverge si $\gamma < \alpha + \beta$. También diverge si $\gamma = \alpha + \beta$ porque en tal caso se deduce de la igualdad 9.12 que:

$$\alpha n a_{n+1} + \gamma a_{n+1} - \gamma a_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{\gamma a_1}{\alpha n + \gamma}$$

y, por comparación con la serie armónica, se sigue que la serie diverge.

Supuesto que, $\gamma > \alpha + \beta$, y tomando límites en la igualdad 9.12 deducimos que:

$$\gamma S - \gamma a_1 = \alpha S + \beta S \quad \longrightarrow \quad S = \frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

Series cuyo término general es una función racional. Se trata de series de la forma $\sum \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son funciones polinómicas. A partir de un cierto término en adelante, dichas series tienen todos sus términos positivos o todos negativos (según que $\lim_{x\to+\infty} P(x)Q(x) = +\infty$ o que $\lim_{x\to+\infty} P(x)Q(x) = -\infty$). Estas series convergen absolutamente cuando el grado del denominador es al menos dos unidades mayor que el grado del numerador. Cuando esta condición se cumple y, además, las raíces del polinomio Q son todas reales y simples es posible calcular la suma de la serie descomponiendo la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples, Se tendrá una descomposición de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_m}{x-\alpha_m}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son las raíces de Q. Sustituyendo en la igualdad anterior $x = k$ y sumando desde $k = 1$ hasta $k = n$ resulta:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P(k)}{Q(k)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A_1}{k-\alpha_1} + \frac{A_2}{k-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_m}{k-\alpha_m} \right)$$

Ahora hay que hacer todas las simplificaciones posibles hasta que finalmente nos quede una sucesión que sea convergente. Observa que las series de la forma $\sum \dfrac{A}{n-\alpha}$ son divergentes (por comparación con la serie armónica) pero la suma de todas las que hay en el paréntesis anterior tiene que ser, en las hipótesis hechas, una serie convergente. Lo usual es que los coeficientes A_k sean unos positivos y otros negativos y que las raíces α_k sean números enteros, de manera que se produzcan cancelaciones que finalmente permitan calcular la suma de la serie. Es frecuente que en los cálculos aparezca la serie armónica alternada. La estrategia 7.33 es muy útil para los cálculos en este tipo de ejercicio.

Series de diferencias o telescópicas. Se llaman así las series $\sum a_n$ cuyo término general puede escribirse en la forma $a_n = b_{n+1} - b_n$. Puesto que, en tal caso, se verifica la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1,$$

la serie converge si, y sólo si, la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \text{lím}\{b_n\} - b_1$.

Series relacionadas con la exponencial. Sea $x \in R$ un número real distinto de 0, fijo en lo que sigue y sea $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el teorema de Taylor 6.41 a la función exponencial con $a = 0$, tenemos que hay algún punto c comprendido entre 0 y x tal que:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}x^k + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente porque, poniendo $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$, tenemos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0.$$

En particular, se verifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{|x|^n}{n!}\right\} = 0$. Como $0 < |c| < |x|$, tenemos que:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

de donde deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \right| = 0 \iff e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Como $x \neq 0$ es un número real cualquiera y la igualdad anterior es trivialmente cierta para $x = 0$, hemos probado que para todo número real x se verifica la igualdad:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right\} \tag{9.13}$$

En particular, para $x=1$, resulta que:

$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}. \tag{9.14}$$

Con ayuda de esta serie podemos calcular la suma de series de la forma $\sum_{n\geqslant 0}\frac{p(n)}{n!}$ donde p es una función polinómica de grado $m\geqslant 1$. Dichas series son (absolutamente) convergentes como se comprueba fácilmente con el criterio del cociente. Para calcular su suma expresamos el polinomio $p(x)$ en la forma:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)+\cdots+a_mx(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1).$$

Los números a_k pueden calcularse fácilmente:

$$a_0=p(0),\ a_1=p(1)-a_0,\ 2a_2=p(2)-a_0-2a_1,\ldots$$

Con ello tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(n)}{n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_0}{n!}+\sum_{j=1}^{m}\frac{a_jn(n-1)\cdots(n-j+1)}{n!}\right)=\\&=a_0\,\mathrm{e}+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_jn(n-1)\cdots(n-j+1)}{n!}\right)=\\&=a_0\,\mathrm{e}+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{n=j}^{\infty}\frac{a_jn(n-1)\cdots(n-j+1)}{n!}\right)=\\&=a_0\,\mathrm{e}+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{n=j}^{\infty}\frac{a_j}{(n-j)!}\right)=a_0\,\mathrm{e}+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_j}{n!}\right)=\\&=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_m)\,\mathrm{e}\,.\end{aligned}$$

Naturalmente, si la serie no empieza a sumar desde $n=0$ hay que hacer los ajustes necesarios.

El mismo procedimiento puede aplicarse para series del tipo $\sum_{n\geqslant 0}\frac{p(n)}{n!}x^n$.

De la igualdad (9.14) se deduce fácilmente que el número e es irracional. En efecto, para todo $n\in\mathbb{N}$ tenemos que:

$$0<\mathrm{e}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}<\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k=\frac{1}{n!}\frac{1}{n}$$

Si e fuera racional, $\mathrm{e}=\frac{p}{q}$ con $p,q\in\mathbb{N}$, multiplicando por $q!$ la desigualdad:

$$0<\mathrm{e}-\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}<\frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

se tiene que:

$$0 < (q-1)!p - q!\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!} < \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Pero el número $(q-1)!p - q!\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}$ es un número entero y por tanto es imposible que sea mayor que 0 y menor que 1. Esta contradicción muestra que e es irracional.

9.4.1. Ejercicios propuestos

464. Calcula la suma de las siguientes series.

$a)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{4n^3-n}$ $\quad b)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ $\quad c)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}\frac{n+2}{n(n+1)}$

$d)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1-2^n}{3^n}$ $\quad e)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$ $\quad f)\ \sum_{n\geqslant 1}\operatorname{sen}\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$

$g)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{3^n}$ $\quad h)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2+5n+7}{(n+2)!}$ $\quad i)\ \sum_{n\geqslant 1}2^{n-1}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n-1}}$

$j)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+3n+2}$ $\quad k)\ \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{n^3-n+1}{3^n n!}$ $\quad l)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$m)\ \sum_{n\geqslant 2}(-1)^n\frac{n^2-n}{3^n}$ $\quad n)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\quad o)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$

Sugerencias. f) $\cos x\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)\big)$. i) $\operatorname{tg} x\big(1-\operatorname{tg}^2(x/2)\big) = 2\operatorname{tg}(x/2)$.

9.4.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **241** Calcula la suma de las siguientes series.

$a)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{4n^3-n}$ $\quad b)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ $\quad c)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}\frac{n+2}{n(n+1)}$

$d)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$ $\quad e)\ \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{n^3-n+1}{3^n n!}$ $\quad f)\ \sum_{n\geqslant 2}(-1)^n\frac{n^2-n}{3^n}$

Solución. a) Haremos la descomposición en fracciones simples de la función racional $\frac{1}{4x^3-x}$. Tenemos que $4x^3-x = x(4x^2-1) = x(2x+1)(2x-1)$. El denominador tiene tres raíces reales simples. Escribamos:

$$\frac{1}{4x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}.$$

Fácilmente se obtiene $A=-1$, $B=C=1$. Por tanto:

$$\frac{1}{4k^3-k}=-\frac{1}{k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-1}.$$

Observa que cuando sumemos nos van a quedar expresiones que podremos relacionar con la serie armónica alternada por lo que conviene sumar desde $k=1$ hasta $k=2n$. Como ya es usual ponemos $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ y usaremos la estrategia 7.33 que ya debes conocer.

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{4k^3-k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2k-1}=$$

$$=-1+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+2\left(H_{4n+1}-\frac{1}{2}H_{2n}-H_{2n+1}+\frac{1}{2}H_n\right)+\frac{1}{2n+1}=$$

$$=-1+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+2\Big(\log(4n+1)+\gamma_{4n+1}-\frac{1}{2}(\log(2n)+\gamma_{2n})-$$

$$-\log(2n+1)-\gamma_{2n+1}+\frac{1}{2}(\log(n)+\gamma_n)\Big)+\frac{1}{2n+1}\to$$

$$\to -1+\log 2+\log 2=2\log 2-1.$$

Luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^3-n}=2\log 2-1.$ ☺

b) Basta observar que:

$$\big((n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\big)\big((n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}\big)=n(n+1).$$

De donde se obtiene fácilmente que:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1.$$

c) Pongamos $a_n=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{n+2}{n(n+1)}$. Tenemos que:

$$a_k=\frac{1}{2^k}\frac{k+2}{k(k+1)}=\frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2^{k-1}k}-\frac{1}{2^k(k+1)}.$$

Deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=1-\frac{1}{2^n(n+1)}\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{n+2}{n(n+1)}=1.$$

d) Tenemos que:

$$\frac{2^{k-1}}{(1+2^k)(1+2^{k-1})}=\frac{1+2^k-1-2^{k-1}}{(1+2^k)(1+2^{k-1})}=\frac{1}{1+2^{k-1}}-\frac{1}{1+2^k}.$$

Deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{(1+2^k)(1+2^{k-1})}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^n}\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}=\frac{1}{2}.$$

e) Es una serie de la forma $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{p(n)}{n!}x^n$ donde $p(n)=n^3-n+1$ y $x=-\frac{1}{3}$. Pongamos:

$$n^3-n+1=a_0+a_1n+a_2n(n-1)+a_3n(n-1)(n-2).$$

Haciendo $n=0$ se obtiene $a_0=1$; haciendo $n=1$ se obtiene $a_1=0$; haciendo $n=2$ se obtiene $a_2=3$ y haciendo $n=2$ se obtiene $a_3=1$. Por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3-n+1}{3^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{n!}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2}-\frac{1}{27}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-3}=$$
$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right)=\frac{35}{27}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}.$$

f) Es una serie de la forma $\sum p(n)x^n$ donde $p(n)=n^2-n$ y $x=\frac{-1}{3}$. Se trata, pues, de una serie aritmético-geométrica. Pongamos $S=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\left(\frac{-1}{3}\right)^n$. Tenemos que:

$$S-\frac{-1}{3}S=\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\left(\frac{-1}{3}\right)^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)^2-(n+1)\big)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}=$$
$$=\frac{2}{9}+\sum_{n=2}^{\infty}\big((n+1)^2-(n+1)-(n^2-n)\big)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}=$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{-1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}2n\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Pongamos $S_1=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}2n\left(\frac{-1}{3}\right)^n$. Hemos probado que:

$$S-\frac{-1}{3}S=\frac{2}{9}+\frac{-1}{3}S_1\longrightarrow S=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}S_1.$$

Calcularemos ahora S_1. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
S_1 - \frac{-1}{3}S_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} 2n\left(\frac{-1}{3}\right)^n - \sum_{n=2}^{\infty} 2n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} 2n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} = \\
&= \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\big(2(n+1)-2n\big)\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \\
&= \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\frac{1}{12} = \frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Deducimos que $S_1 = \frac{7}{24}$ y, por tanto, $S = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}S_1 = \frac{3}{32}$. ☺

9.5. Expresión de un número real en base b

El primer ejemplo de sucesión que vimos en el capítulo 7 fue la expresión decimal de $2/3$ que ahora podemos expresar con la notación que usamos para series:

$$\frac{2}{3} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^n}.$$

Seguramente sabes que los números racionales pueden expresarse en forma decimal y que dicha expresión decimal o bien es finita o hay un grupo de cifras, el período, que se repite indefinidamente. También sabes que los números irracionales tienen una expresión decimal infinita no periódica. En lo que sigue vamos a precisar el significado de estas afirmaciones y a justificarlas.

Para ayudarte a entender lo que sigue, vamos a empezar recordando el algoritmo de la división de números enteros. Para ello vamos a usar la función "parte entera". Recuerda que si x es un número real, representamos por $E(x)$ el único número entero tal que $E(x) \leqslant x < E(x)+1$. El número $E(x)$ se llama parte entera de x. Una consecuencia directa de la definición de $E(x)$, que usaremos en lo que sigue, es la siguiente:

$$x = \beta + r \quad \text{donde} \quad \beta \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leqslant r < 1 \longrightarrow \beta = E(x). \tag{9.15}$$

Además, es claro que si p es un número entero se tiene que $E(x+p) = E(x) + p$.

Con ayuda de la función "parte entera" podemos expresar el algoritmo de la división de enteros como sigue. Sean p, q números enteros con $q > 0$. Pongamos $c = E(p/q)$. Entonces tenemos que:

$$c \leqslant \frac{p}{q} < c+1 \iff 0 \leqslant p - cq < q.$$

Poniendo ahora $r = p - cq$, tenemos que $p = cq + r$ donde c y r son números enteros y $0 \leqslant r \leqslant q-1$. Este es el algoritmo de la división de enteros conocido como "algoritmo de Euclides".

Sean p, q números enteros positivos con $p < q$ y consideremos el número racional $x = \frac{p}{q} \in [0, 1[$. Veamos el proceso que se sigue para obtener la expresión decimal de $x = \frac{p}{q}$.

Dividimos $10p$ entre q y obtenemos un cociente $c_1 = E(\frac{10p}{q})$ y un resto r_1. Como $0 \leqslant \frac{10p}{q} < 10$, se verifica que $0 \leqslant c_1 \leqslant 9$ y, claro está, $0 \leqslant r_1 \leqslant q-1$. En resumen:

$$10p = c_1 q + r_1, \qquad c_1 = E\left(\frac{10p}{q}\right), \; 0 \leqslant c_1 \leqslant 9, \;\; 0 \leqslant r_1 \leqslant q-1.$$

Que podemos escribir equivalentemente:

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + \frac{r_1}{10q}, \qquad 0 \leqslant c_1 \leqslant 9, \;\; 0 \leqslant r_1 \leqslant q-1. \tag{9.16}$$

Ahora dividimos $10r_1$ entre q y obtenemos un cociente $c_2 = E(\frac{10r_1}{q})$ y un resto r_2. Como $0 \leqslant \frac{10r_1}{q} < 10$, se verifica que $0 \leqslant c_2 \leqslant 9$ y, claro está, $0 \leqslant r_2 \leqslant q-1$. En resumen:

$$10r_1 = c_2 q + r_2, \qquad 0 \leqslant c_2 \leqslant 9, \;\; 0 \leqslant r_2 \leqslant q-1.$$

Igualdad que podemos escribir equivalentemente:

$$\frac{r_1}{10q} = \frac{c_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 q}.$$

Sustituyendo esta igualdad en (9.16), tenemos:

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 q}. \tag{9.17}$$

Conviene expresar c_2 de una forma diferente. De la igualdad anterior se sigue que $100\frac{p}{q} = 10c_1 + c_2 + \frac{r_2}{q}$. Poniendo $x = \frac{p}{q}$ y teniendo en cuenta 9.15, deducimos que:

$$c_2 = E(100x) - 10c_1 = 10^2\left(\frac{E(10^2 x)}{10^2} - \frac{E(10x)}{10}\right). \tag{9.18}$$

El tercer paso sería como sigue. Dividimos $10r_2$ entre q y obtenemos un cociente $c_3 = E(\frac{10r_2}{q})$ y un resto r_3. Como $0 \leqslant \frac{10r_2}{q} < 10$, se verifica que $0 \leqslant c_3 \leqslant 9$ y, claro está, $0 \leqslant r_3 \leqslant q-1$. En resumen:

$$10r_2 = c_3 q + r_3, \qquad 0 \leqslant c_3 \leqslant 9, \;\; 0 \leqslant r_3 \leqslant q-1.$$

Igualdad que podemos escribir equivalentemente:

$$\frac{r_2}{10^2 q} = \frac{c_3}{10^3} + \frac{r_3}{10^3 q}.$$

Sustituyendo esta igualdad en (9.17), tenemos:

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \frac{r_3}{10^3 q}.$$

Conviene expresar c_3 de una forma diferente. De la igualdad anterior se sigue que $10^3\frac{p}{q} = 10^2 c_1 + 10c_2 + c_3 + \frac{r_3}{q}$. Poniendo $x = \frac{p}{q}$, teniendo en cuenta en cuenta 9.15 y que $10c_1 + c_2 = E(100x)$, deducimos que:

$$c_3 = E(10^3 x) - 10^2 c_1 - 10c_2 = 10^3\left(\frac{E(10^3 x)}{10^3} - \frac{10c_1 + c_2}{10^2}\right) = 10^3\left(\frac{E(10^3 x)}{10^3} - \frac{E(10^2 x)}{10^2}\right).$$

Este proceso puede proseguirse obteniendo los sucesivos dígitos $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ de la expresión decimal de $x = \frac{p}{q}$ los cuales viene dados por:

$$c_1 = E(10x), \quad c_{n+1} = 10^{n+1}\left(\frac{E(10^{n+1}x)}{10^{n+1}} - \frac{E(10^n x)}{10^n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Y se verifica que:

$$x = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{r_n}{10^n q}, \qquad 0 \leqslant c_k \leqslant 9, \quad 0 \leqslant r_n \leqslant q-1$$

donde r_n es el resto de la n-ésima división por q. De la igualdad anterior, se deduce que:

$$\left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{10^k} \right| = \frac{r_n}{10^n q} < \frac{1}{10^n} \longrightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}.$$

Observemos que en este proceso los restos que se van obteniendo en las sucesivas divisiones son números enteros que están comprendidos entre 0 y $q-1$ por lo que caben dos posibilidades:

- Si uno de estos restos es igual a 0, digamos $r_m = 0$ $(1 < m \leqslant q-1)$, el proceso termina aquí porque todos los cocientes c_k que le siguen son 0 y se obtiene una *expresión decimal finita* que se escribe en la forma:

$$x = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{10^k} = 0, c_1 c_2 \dots c_m$$

Observa que para que esto ocurra es condición necesaria y suficiente que haya algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $10^m x$ sea un entero, lo que sucede si, y sólo si, x puede escribirse de la forma $x = \frac{p}{10^m}$.

Una expresión decimal finita puede escribirse también como una expresión decimal con infinitos 9, pues:

$$x = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{c_k}{10^k} + \frac{c_m - 1}{10^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{9}{10^n}.$$

- Si ninguno de ellos es cero, entonces como máximo en un total de q divisiones deben repetirse. Si el primer resto que se repite es r_j, digamos $r_j = r_{j+k}$ $(1 \leqslant j < j+k \leqslant q-1)$, entonces $c_j = c_{j+k}$ y el grupo de cocientes $c_j, c_{j+1}, c_{j+2}, \dots, c_{j+k-1}$ se repite indefinidamente dando lugar a una expresión decimal periódica que se escribe en la forma:

$$x = 0, c_1 c_2 \dots c_{j-1} c_j c_{j+1} \widehat{c_{j+2} c}_{j+k-1}.$$

Finalmente, si $x = \frac{m}{n}$ es cualquier número racional, podemos escribir $x = E(x) + (x - E(x))$ donde $z = x - E(x)$ es un número racional que está en $[0, 1[$. La expresión decimal de x se obtiene escribiendo el entero $E(x)$ seguido de una coma y de la expresión decimal de z.

El proceso anterior puede hacerse de la misma forma para números reales y sustituyendo el número 10 por cualquier entero positivo $b > 1$.

9.47 Teorema. *Sea $b > 1$ un número entero y sea $x \in [0, 1[$ un número real. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:*

$$\alpha_n = \frac{E(b^n x)}{b^n}, \quad c_1 = E(bx), \quad c_{n+1} = b^{n+1}\big(\alpha_{n+1} - \alpha_n\big).$$

Se verifica que:

a) $\{c_n\}$ *es una sucesión de números enteros tales que* $0 \leqslant c_n \leqslant b-1$.

b) El conjunto $\{n\in\mathbb{N} : c_n \neq b-1\}$ *es infinito.*

c) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}$.

Además, si $\{a_n\}$ *es otra sucesión de números enteros tales que* $0 \leqslant a_n \leqslant b-1$ *y* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$, *entonces existe un* $m\in\mathbb{N}$ *tal que:*

i) $c_j = a_j$ *para* $1 \leqslant j < m$.

ii) $c_m - 1 = a_m$.

iii) $c_n = 0$ *y* $a_n = b-1$ *para todo* $n \geqslant m+1$.

Demostración. Tenemos que:

$$b^n\alpha_n = E(b^n x) \leqslant b^n x < E(b^n x) + 1 = b^n\alpha_n + 1 \longrightarrow \alpha_n \leqslant x < \alpha_n + \frac{1}{b^n},$$

de donde se sigue que $\{\alpha_n\} \to x$. Por otra parte $bE(b^n x) \leqslant b^{n+1}x$, por lo que $bE(b^n x) \leqslant E(b^{n+1}x)$. Y deducimos que $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ y, en consecuencia, $0 \leqslant c_{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Es claro, por su definición, que c_n es un número entero y que, al ser $0 \leqslant x < 1$ es $0 \leqslant c_1 = E(bx) \leqslant p-1$. Además:

$$c_{n+1} = E(b^{n+1}x) - bE(b^n x) < b^{n+1}x - b(b^n x - 1) = b.$$

Por tanto $0 \leqslant c_{n+1} \leqslant b-1$. Sumando las igualdades $\frac{c_{k+1}}{b^{k+1}} = \alpha_{k+1} - \alpha_k$ desde $k=1$ hasta $k = n-1$ y teniendo en cuenta que $\alpha_1 = \frac{c_1}{b}$, obtenemos:

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{b^k} \longrightarrow x = \lim\{r_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}.$$

Hemos probado *a)* y *c)*. Para probar lo afirmado en el punto *b)*, observemos que para todo $k\in\mathbb{N}$ se verifica que:

$$\alpha_k + \frac{1}{b^k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{b^j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^j}.$$

Puesto que $x < \alpha_k + \frac{1}{b^k}$, deducimos que no puede ocurrir que $c_j = b-1$ para todo $j \geqslant k+1$, lo que implica que el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : c_n \neq b-1\}$ es infinito.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión en las condiciones del enunciado. Definamos $m = \min\{j\in\mathbb{N} : a_j \neq c_j\}$. Por la definición de m es claro que se verifica *i)*. Para probar *ii)* pongamos:

$$\frac{a_m}{b^m} \leqslant \sum_{j=m}^{\infty} \frac{a_j}{b^j} = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{c_j}{b^j} = \frac{c_m}{b^m} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{c_j}{b^j} < \frac{c_m}{b^m} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^j} = \frac{c_m}{b^m} + \frac{1}{b^m}.$$

Luego $a_m < c_m + 1$ y, al ser números enteros, deberá ser $a_m \leqslant c_m$; pero como son distintos tenemos que $a_m < c_m$ y, por ser enteros, $a_m + 1 \leqslant c_m$. Por otra parte:

$$\frac{c_m}{b^m} \leqslant \sum_{j=m}^{\infty} \frac{c_j}{b^j} = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{a_j}{b^j} \leqslant \frac{a_m}{b^m} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^j} = \frac{a_m}{b^m} + \frac{1}{b^m}. \tag{9.19}$$

Luego $c_m \leqslant a_m + 1$. Resulta así que $a_m = c_m - 1$. Finalmente, el punto *iii)* se deduce como consecuencia de que en (9.19) todo son igualdades. □

9.48 Definición. Sea b un número entero mayor que 1, $b > 1$, y sea $x \in \mathbb{R}$ con $0 \leqslant x < 1$. Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números enteros tales que $0 \leqslant c_n \leqslant b-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}$.

En estas condiciones convenimos en escribir la igualdad $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}$ simbólicamente en la forma

$$x = 0, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \dots_{(b}$$

Dicha igualdad se llama desarrollo de x en base b o expresión b-ádica del número x. Cuando $b = 2$ tenemos la expresión binaria de x, si $b = 3$ dicha expresión se llama ternaria, y se llama expresión decimal cuando $b = 10$.

9.49 Observaciones. Del teorema 9.47 se deducen las siguientes afirmaciones.

- Todo número $x \in \mathbb{R}$ con $0 \leqslant x < 1$ tiene al menos una expresión b-ádica y, como mucho, dos expresiones b-ádicas distintas.

- Un número $x \in [0,1[$ tiene dos expresiones b-ádicas distintas si, y sólo si, x es un número racional de la forma $x = \frac{q}{b^n}$.

Cuando un número $x \in [0,1[$ tiene dos expresiones b-ádicas distintas entonces en una de ellas todos los términos, a partir de uno en adelante, son iguales a 0, es decir, es de la forma:

$$x = 0, c_1 c_2 \dots c_k 00 \dots 0 \dots_{(b} .$$

Que suele escribirse omitiendo los ceros consecutivos en la forma:

$$x = 0, c_1 c_2 \dots c_{k(b},$$

y se dice que x tiene una expresión b-ádica finita. La otra expresión b-ádica de x es:

$$x = 0, c_1 c_2 \dots c_{k-1}(c_k - 1)(b-1)(b-1)\dots(b-1)\dots_{(b} .$$

- La expresión b-ádica de un número $x \in [0,1[$ queda determinada de forma única si se exige alguna de las condiciones:

  a) Hay infinitas cifras en la expresión b-ádica que son distintas de $b-1$.

  b) Hay infinitas cifras en la expresión b-ádica que son distintas de 0.

- Finalmente, si x es cualquier número real, podemos escribir $x = E(x) + (x - E(x))$ donde $z = x - E(x)$ es un número real que está en $[0,1[$. La expresión de x en base b se obtiene escribiendo el entero $E(x)$ en base b seguido de una coma y de la expresión de z en base b.

9.6. Series de números complejos

Una serie de números complejos es una sucesión $\sum z_n = \{z_1 + z_2 + \cdots + z_n\}$ obtenida sumando consecutivamente los términos de una sucesión de números complejos $\{z_n\}$. Para series de números complejos se emplean las mismas terminología y notaciones que para series de números reales. El límite de una serie de números complejos se llama "suma" de la serie y es un número complejo que se representa por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \right\}$$

Naturalmente, todo lo visto para sucesiones de números complejos permanece válido con el mismo significado para series de números complejos. En particular, poniendo $z_n = x_n + iy_n$ donde $x_n = \operatorname{Re}(z_n)$, $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sum_{k=1}^{n} y_k,$$

y la serie $\sum z_n$ converge si, y sólo si, convergen las series de números reales $\sum x_n$ y $\sum y_n$, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Por tanto, estudiar una serie de números complejos equivale a estudiar dos series de números reales. Aunque esta estrategia no siempre es factible porque a veces no es fácil calcular $\operatorname{Re}(z_n)$ e $\operatorname{Im}(z_n)$.

Se dice que una serie de números complejos $\sum z_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie de los módulos $\sum |z_n|$ es convergente. Teniendo en cuenta las desigualdades:

$$\max\{|x_n|, |y_n|\} \leqslant |z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|,$$

se deduce enseguida que la serie $\sum z_n$ es absolutamente convergente si, y sólo si, las series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ son absolutamente convergentes.

Naturalmente, para estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos lo que hacemos es aplicar a la serie de los módulos $\sum |z_n|$ los criterios de convergencia para series de términos positivos.

Los criterios generales de Dirichlet y de Abel (teoremas 9.40 y 9.41) permanecen válidos sin cambio alguno para series de números complejos. Los criterios particulares de Dirichlet y de Abel (teorema 9.43 y 9.44) pueden aplicarse igualmente a series de la forma $\sum a_n b_n$, donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos y $\{b_n\}$ es una sucesión de números reales que satisfacen las hipótesis de dichos criterios.

Los resultados obtenidos para la serie geométrica permanecen igualmente válidos para series geométricas de números complejos.

9.6.1. Ejercicios propuestos

465. Estudia la convergencia de las series:

$$\text{i)} \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+i)^n} \qquad \text{ii)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\ \operatorname{sen} n}{n}$$

$$\text{iii)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\ \operatorname{sen} n}{n^2} \qquad \text{iv)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos \frac{\pi}{n} + i\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{n}$$

$$\text{v)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n} \qquad \text{vi)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\text{vii)} \sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\frac{\pi}{n^2} + i\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{n^2}\right) \qquad \text{viii)} \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n+7}$$

466. Sea $\rho\in\mathbb{R}$ con $|\rho|<1$ y $\vartheta\in\mathbb{R}$. Calcula los límites: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos(n\,\vartheta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\operatorname{sen}(n\,\vartheta)$.

Sugerencia. Llama A a la primera suma y B a la segunda. Calcula $A+iB$.

467. Prueba que si la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}z_n$ converge y hay un número $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|\arg(z_n)|<\alpha$, entonces dicha serie converge absolutamente.

468. Supón que las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}z_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}z_n^2$ son convergentes y que $\operatorname{Re}(z_n)\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^2$ es convergente.

9.6.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **242** Estudia la convergencia de las series:

$$\text{i)} \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+i)^n} \qquad \text{ii)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\ \operatorname{sen} n}{n} \qquad \text{iii)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\ \operatorname{sen} n}{n^2}$$

$$\text{iv)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos \frac{\pi}{n} + i\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{n} \qquad \text{v)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n} \qquad \text{vi)} \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n+7}$$

Solución. i) $\left|\dfrac{1}{(1+i)^n}\right| = \left|\dfrac{1}{1+i}\right|^n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. La serie es absolutamente convergente. Observa que se trata de una serie geométrica de razón $z=\dfrac{1}{1+i}$. ☺

ii) $\left|\dfrac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$. La serie no es absolutamente convergente. Para estudiar la convergencia no absoluta aplicaremos el criterio particular de Dirichlet (corolario 9.43). Pongamos $b_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = \cos n + i \operatorname{sen} n = \mathrm{e}^{in}$. Tenemos que $\{b_n\}$ es monótona y converge a 0. Además:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{i}\right)^k\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)} - \mathrm{e}^{i}}{\mathrm{e}^{i} - 1}\right| =$$
$$= \frac{\left|\mathrm{e}^{i(n+1)} - \mathrm{e}^{i}\right|}{\left|\mathrm{e}^{i} - 1\right|} \leqslant \frac{\left|\mathrm{e}^{i(n+1)}\right| + \left|\mathrm{e}^{i}\right|}{\left|\mathrm{e}^{i} - 1\right|} = \frac{2}{\left|\mathrm{e}^{i} - 1\right|}.$$

Puesto que $\dfrac{2}{|\mathrm{e}^{i} - 1|}$ es una constante independiente de n, el criterio particular de Dirichlet nos dice que la serie es convergente. ☺

iii) $\left|\dfrac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$. La serie es absolutamente convergente. ☺

iv) La serie de las partes reales, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ es una serie de términos positivos divergente porque $\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \sim \dfrac{1}{n}$. Luego la serie no converge. ☺

v) $\left|\dfrac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{|2+i|^n}{|1+2i|^n}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n}$. La serie no converge absolutamente.Para estudiar la convergencia no absoluta podemos aplicar el criterio particular de Dirichlet. Pongamos $b_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = \left(\frac{2+i}{1+2i}\right)^n$. Tenemos que $\{b_n\}$ es monótona y converge a 0. Además, poniendo $w = \frac{2+i}{1+2i}$, tenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} w^k\right| = \left|\frac{w^{n+1} - w}{w - 1}\right| = \frac{\left|w^{n+1} - w\right|}{|w-1|} \leqslant \frac{|w|^{n+1} + |w|}{|w-1|} = \frac{2}{|w-1|}.$$

Como $\dfrac{2}{|w-1|}$ es una constante independiente de n, el criterio particular de Dirichlet nos dice que la serie es convergente.

Observa que el criterio particular de Dirichlet implica que las serie de números complejos de la forma $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} z^n b_n$ donde $\{b_n\}$ es una sucesión de números reales monótona y convergente a 0 y z es un número complejo de módulo 1 y distinto de 1, ($z \neq 1$, $|z| = 1$), son convergentes. Naturalmente si $|z| < 1$ tales series convergen absolutamente. ☺

vi) Es fácil comprobar que el término general de la serie no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente. ☺

Ejercicio resuelto **243** Sea $\rho \in \mathbb{R}$ con $|\rho| < 1$ y $\vartheta \in \mathbb{R}$. Calcula los límites: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos(n\vartheta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \operatorname{sen}(n\vartheta)$.

Sugerencia. Llama A a la primera suma y B a la segunda. Calcula $A+iB$.

Solución. Observa que por ser $|\rho|<1$ las dos series son absolutamente convergentes. Tenemos que:

$$A+iB=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\big(\cos(n\vartheta)+i\operatorname{sen}(n\vartheta)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho\,\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^n=\frac{1}{1-\rho\,\mathrm{e}^{i\vartheta}}=$$
$$=\frac{1-\rho\,\mathrm{e}^{-i\vartheta}}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta}=\frac{1-\rho\cos\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta}+i\frac{\rho\operatorname{sen}\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta}.$$

Deducimos que:

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos(n\vartheta)=\frac{1-\rho\cos\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta},\qquad B=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\operatorname{sen}(n\vartheta)=\frac{\rho\operatorname{sen}\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta}.$$

9.7. Cálculo elemental de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x$ y de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Necesitaremos el siguiente resultado que es un caso muy particular del llamado *lema de Riemann – Lebesgue*. Probaremos que si f es una función con derivada continua en $[a,b]$ entonces se verifica que:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(tx)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)\,\mathrm{d}x=0 \tag{9.20}$$

En las hipótesis hechas, la prueba es inmediata porque basta integrar por partes:

$$\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(tx)\,\mathrm{d}x=[u(x)=f(x),v'(x)=\operatorname{sen}(tx)]=-\frac{1}{t}f(x)\cos(tx)\Big|_{x=a}^{x=b}+\frac{1}{t}\int_a^b f'(x)\cos(tx)\,\mathrm{d}x$$

Como $|\cos(u)|\leqslant 1$ cualquiera sea $u\in\mathbb{R}$ se sigue que:

$$\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(tx)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{t}\big(|f(a)|+|f(b)|\big)+\frac{1}{t}\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{K}{t}$$

donde $K=|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ es una constante. De esta desigualdad se sigue que $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(tx)\,\mathrm{d}x=0$. Análogamente se prueba que $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)\,\mathrm{d}x=0$.

Haciendo ahora en la igualdad $2\operatorname{sen}x\cos y=\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(y-x)$ $y=2kx$ se obtiene:

$$2\operatorname{sen}x\cos(2kx)=\operatorname{sen}\big((2k+1)x\big)-\operatorname{sen}\big((2k-1)x\big).$$

Sumando estas igualdades desde $k=1$ hasta $k=n$ resulta:

$$2\operatorname{sen}x\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)=\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)-\operatorname{sen}x$$

de donde, dividiendo por $\operatorname{sen} x \neq 0$, se sigue que:

$$\frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)}{\operatorname{sen} x} = 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)+1. \tag{9.21}$$

Deducimos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)}{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Como la función $f:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ para $x\neq 0$ y $f(0)=0$ tiene derivada continua en $[0,\pi/2]$, podemos usar el resultado probado al principio para deducir que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Y, teniendo en cuenta la igualdad antes obtenida, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Y, haciendo un sencillo cambio de variable obtenemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)}{x}\,\mathrm{d}x = [(2n+1)x=u] = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

Por otra parte la integral impropia $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x$ es convergente como hemos visto en el ejercicio resuelto 197, es decir, existe el límite $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x$. Por tanto, por la conocida caracterización de los límites funcionales, para toda sucesión $\{a_n\}\to+\infty$ se tiene que:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{a_n}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Haciendo $a_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ concluimos que:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

Calcularemos ahora la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$. Sustituyamos en la igualdad 9.21 x por $x/2$ para obtener:

$$\frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)\frac{x}{2}\big)}{\operatorname{sen}(x/2)} = 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)+1.$$

Multiplicando esta igualdad por $x(x-2\pi)$ y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^{\pi} x(x-2\pi)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{k^2}$$

como se comprueba fácilmente integrando por partes dos veces, obtenemos:

$$\int_0^{\pi} \frac{x(x-2\pi)}{\operatorname{sen}(x/2)} \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 4\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \int_0^{\pi} x(x-2\pi)\,\mathrm{d}x = 4\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{2\pi^3}{3}.$$

Como la función $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{x(x-2\pi)}{\operatorname{sen}(x/2)}$ para $x\neq 0$, $f(0)=-4\pi$ tiene derivada continua en $[0,\pi]$, podemos aplicar el resultado visto al principio de esta sección para deducir que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{x(x-2\pi)}{\operatorname{sen}(x/2)} \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Lo que, teniendo en cuenta la igualdad anterior, implica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Capítulo 10

Sucesiones y series de funciones

10.1. Introducción

La representación de funciones complicadas por medio de funciones sencillas es una de las ideas centrales del Análisis Matemático. En este capítulo vamos a precisar algunos de los posibles significados del término "representación". Intuitivamente, se trata de "aproximar" funciones que se suponen muy generales por otras de un tipo especialmente sencillo. Por ejemplo, podemos aproximar localmente, en las proximidades de un punto, una función derivable por sus polinomios de Taylor calculados en dicho punto. Ya hemos visto que esta aproximación es de gran utilidad para calcular límites. Ahora queremos dar un paso más y nos interesamos por representaciones que sean válidas no sólo localmente, en las proximidades de un cierto punto, sino en todo un intervalo.

Hay muchas maneras de representar funciones complejas por medio de otras más simples, una de las más útiles es la representación por medio de series. Podemos describir este proceso en términos muy generales como sigue.

- Se considera una clase $\mathfrak{S}$ de "funciones simples". Por ejemplo, $\mathfrak{S}$ puede ser la clase de las funciones polinómicas, o la clase de todos los polinomios trigonométricos que son las funciones de la forma $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\big(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx)\big)$ donde a_k, b_k son números reales.
- Para representar una función f por medio de funciones de la clase $\mathfrak{S}$ hay que asociar a dicha función una sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n\in\mathfrak{S}$. Las funciones f_n suelen interpretarse como las "componentes elementales" de la función f. La forma de obtener las funciones componentes f_n de f viene dada en cada caso por un algoritmo matemá-

tico que, conocida la función f, permite calcular, al menos en teoría, las f_n. Esta parte del proceso de representación se suele llamar "análisis" porque consiste en analizar f descomponiéndola en sus componentes más simples. Esto es algo que se hace constantemente en todos los procesos de tratamiento de señales auditivas o gráficas.

Si, por ejemplo, queremos representar la función exponencial $f(x) = \mathrm{e}^x$ por medio de funciones polinómicas, entonces las funciones elementales son los polinomios de Taylor que, para la función exponencial viene dados por $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

- El último paso consiste en "recomponer" la función f mediante sus componentes elementales f_n. Para que este proceso sea útil las funciones componentes f_n deben estar determinadas de manera única por f y debe ser posible, mediante algún algoritmo matemático – que suele ser una serie o una integral –, recobrar la función f mediante sus componentes f_n. Por ejemplo, para el caso de la función exponencial sabemos (ver (9.13)) que para todo $x \in \mathbb{R}$ es:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Con ello hemos representado una función trascendente, como es la exponencial, por medio de una serie de funciones polinómicas.

Volviendo a la situación general, lo que suele hacerse es tratar de recuperar la función f por "superposición" de sus componentes elementales f_n. El término "superponer" procede de la Física y en Matemáticas se traduce por "sumar". Por tanto, lo que queremos es expresar f como la suma de la serie definida por la sucesión de funciones $\{f_n\}$:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Lo primero que debemos hacer es dar un sentido a esta igualdad. El sentido que va a tener para nosotros en este capítulo es que para cada valor de x en un cierto intervalo I se verifica que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \tag{10.1}$$

Esta igualdad sí sabes lo que significa: quiere decir que la serie de números reales $\sum f_n(x)$ converge y tiene como suma el número $f(x)$.

Puede que te estés preguntando ¿para qué sirve todo esto? Respuesta: para traducir problemas relativos a f en otros más sencillos relativos a sus funciones componentes f_n. Por ejemplo, si queremos obtener la solución de una ecuación diferencial en la que interviene una función f, podemos sustituir dicha función por f_n y resolver la ecuación diferencial correspondiente, y a partir de las soluciones obtenidas construir por superposición una función que esperamos que sea la solución buscada.

Una representación como la dada por (10.1) lleva a preguntarse por aquellas propiedades de las funciones f_n que se conservan y se transmiten de forma automática a la función representada f. Por ejemplo, si las funciones f_n son continuas o derivables ¿es también f continua o derivable?.

Para terminar esta introducción vamos a ver un ejemplo de aproximación de funciones que, en cierto sentido, es paradójico. Sea f_1 la función identidad en el intervalo $[0,1]$ cuya gráfica es la diagonal del cuadrado unidad (ver figura 10.1). Sea f_2 la función definida en $[0,1]$ cuya gráfica es el triángulo de vértices $(0,0), (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (1,0)$. La longitud de las gráficas de f_1 y f_2 es evidentemente la misma e igual a $\sqrt{2}$.

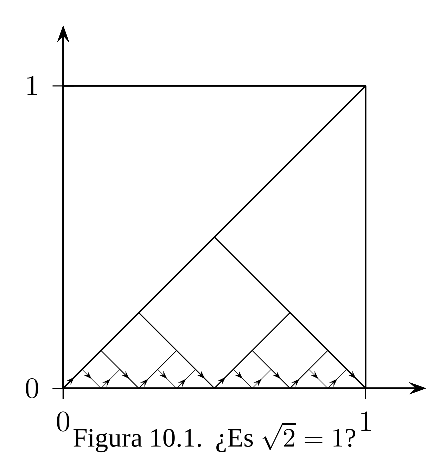


Figura 10.1. ¿Es $\sqrt{2}=1$?

Sea f_3 la función definida en $[0,1]$ cuya gráfica son los triángulos de vértices $(0,0), (\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2},0)$ y $(\frac{1}{2},0), (\frac{3}{4},\frac{1}{4}), (1,0)$. La longitud de las gráficas de f_2 y f_3 es evidentemente la misma e igual a $\sqrt{2}$. Este proceso de ir dividiendo por la mitad los lados de los triángulos puede proseguirse indefinidamente y obtenemos una sucesión de funciones f_n tales que para todo $x\in[0,1]$ es $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$, y la longitud de la gráfica de f_n es igual a $\sqrt{2}$. Es evidente que las funciones f_n convergen a la función $f(x)=0$ cuya gráfica es el segmento de extremos $(0,0), (1,0)$ de longitud 1; ¿luego $\sqrt{2}=1$?.

En esta introducción del capítulo ya han salido algunas ideas que seguidamente vamos a presentar de manera formal.

10.2. Conceptos básicos

10.1 Definición. Una **sucesión de funciones** *es una aplicación* que a cada número natural n hace corresponder una función f_n. Usaremos el símbolo $\{f_n\}$ para representar la sucesión de funciones dada por $n\mapsto f_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Supondremos en lo que sigue que las funciones f_n son funciones reales definidas en un intervalo I.

10.2 Ejemplos. Consideremos las sucesiones de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función definida en cada caso por:

$$a)\ f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}},\ b)\ f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}},\ c)\ f_n(x)=nx(1-x)^n,\ d)\ f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

10.2.1. Convergencia puntual

10.3 Definición. Dado $x \in I$ se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge puntualmente** en x, si *la sucesión de números reales* $\{f_n(x)\}$ es convergente.

El conjunto $\mathcal{C}$ de todos los puntos $x \in I$ en los que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente, se llama **campo de convergencia puntual**. Simbólicamente:

$$\mathcal{C} = \{x \in I : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}.$$

Supuesto que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, la función $f : C \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in \mathcal{C}$ por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$$

se llama **función límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}$.

10.4 Observación. Para entender la definición de convergencia puntual y en general en todo este capítulo, es ***muy importante*** no confundir la *sucesión de funciones* $\{f_n\}$ con la *sucesión de números reales* $\{f_n(x)\}$ obtenida *evaluando las funciones* de dicha sucesión en un número $x \in I$. Tampoco debes olvidar que en una sucesión la variable es siempre $n \in \mathbb{N}$ y nunca $x \in I$. Así, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es la aplicación que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ (la variable) le asigna el número real $f_n(x)$ ***donde*** x ***está fijo***.

10.5 Ejemplo. Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0,1]$ por:

$$f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

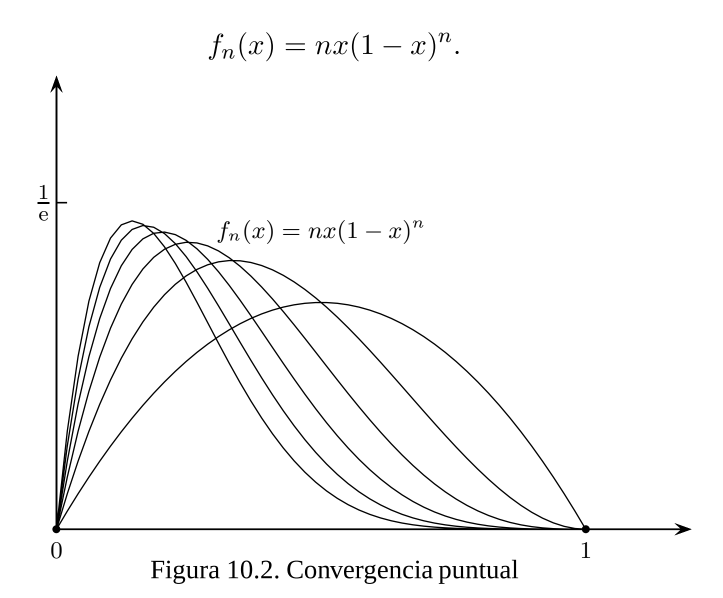
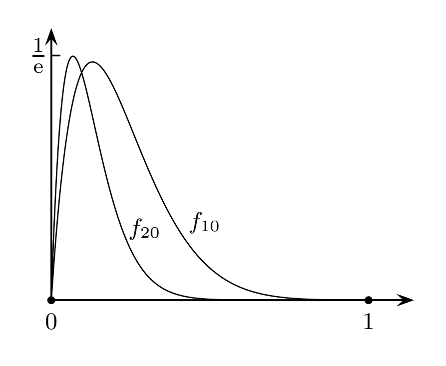


Figura 10.2. Convergencia puntual

Observa que si $x = 0$ o $x = 1$, la sucesión $\{f_n(0)\} = \{f_n(1)\} = \{0\}$ es, evidentemente, convergente a 0. Si $0 < x < 1$ entonces $0 < 1 - x < 1$ y se verifica que $\{f_n(x)\} \to 0$ porque es una sucesión de la forma $\{n^p\lambda^n\}$ donde $|\lambda| < 1$. Deducimos que el campo de convergencia puntual de esta sucesión es el conjunto $\mathcal{C} = [0,1]$ y la función límite puntual es la función idénticamente nula, $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Observa en la figura 10.2 las gráficas de las primeras seis funciones de esta sucesión.

Fíjate cómo por el extremo derecho del intervalo las gráficas se van pegando al eje de abscisas pero su comportamiento es muy diferente en el extremo izquierdo. Ello es así porque cuando $1-x$ es pequeño (es decir, x está cerca de 1) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge muy rápidamente a cero, pero cuando $1-x$ está próximo a 1 (es decir, x está cerca de 0) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge lentamente a cero.

Observa las gráficas de las funciones f_{10} y f_{20} en la figura de la derecha. ¿Te parece que estas funciones están *muy próximas* a la función límite puntual $f \equiv 0$? Observa que, aunque para cada $x \in [0,1]$ es $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$, la función f_n no se acerca mucho a la función límite puntual $f \equiv 0$.



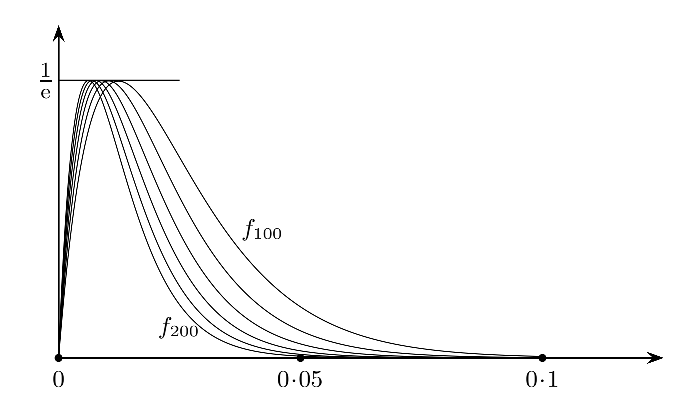
♦

Para evitar ambigüedades necesitamos precisar qué entendemos por *proximidad* entre dos funciones. Para ello, considera dos funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$. Dichas funciones son iguales cuando $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$ o, lo que es igual, cuando $\max\{|f(x) - g(x)| : x \in I\} = 0$. En general, el número $\max\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}$ proporciona una buena idea de la proximidad entre las funciones f y g pues dicho número es tanto más pequeño cuanto más cercanas estén las gráficas de las dos funciones.

Volviendo al ejemplo anterior, con $f_n(x) = nx(1-x)^n$ y $f \equiv 0$, podemos calcular fácilmente el número $\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \max\{f_n(x) : x \in [0,1]\}$. Basta derivar f_n para comprobar que la función f_n alcanza su máximo absoluto en el intervalo $[0,1]$ en el punto $x_n = \frac{1}{n+1}$. Luego

$$\max\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e}.$$

Fíjate en que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ pero $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = 1/e > 0$, es decir, las funciones f_n no se aproximan a la función nula. De hecho, como la sucesión $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right\}$ es creciente, cuanto mayor sea n mayor es la distancia entre la función f_n y la función nula. Observa cómo son las gráficas de las funciones f_n cerca de cero para $n = 100, 120, 140, 160, 180, 200$.



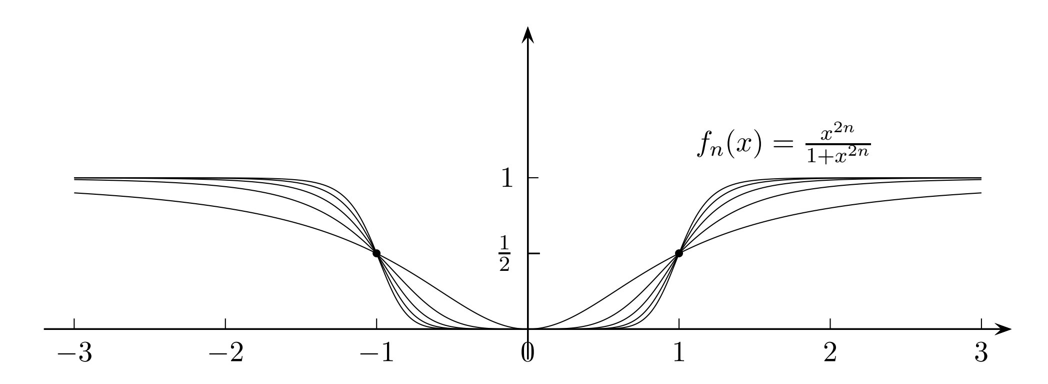
10.6 Ejemplo. Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde, para cada $n\in\mathbb{N}$, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función dada para todo $x\in\mathbb{R}$ por:

$$f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

Es claro que si $|x|<1$ se tiene que $\{f_n(x)\}\to 0$, y si $|x|>1$ se tiene que $\{f_n(x)\}\to 1$. Para $x=\pm 1$ es $\{f_n(\pm 1)\}=\{1/2\}$ que, evidentemente, converge a $1/2$. Por tanto, el campo de convergencia puntual de $\{f_n\}$ es $\mathcal{C}=\mathbb{R}$, y la función límite puntual está definida por:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=\begin{cases}1 \text{ si } |x|>1;\\ 1/2 \text{ si } |x|=1\\ 0 \text{ si } |x|<1.\end{cases}$$

Aquí ocurre que la función límite puntual es discontinua (tiene discontinuidades de salto en -1 y en 1) a pesar de que las funciones de la sucesión son continuas. Observa las gráficas de las primero cinco funciones de la sucesión.



Tenemos que:

$$\max\{|f(x)-f_n(x)|:x\in\mathbb{R}\}\geqslant f\big(1+\frac{1}{2n}\big)-f_n\big(1+\frac{1}{2n}\big)=1-\frac{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}{1+(1+\frac{1}{2n})^{2n}}\to 1-\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}}.$$

Por tanto, la distancia entre la función f_n y la función límite puntual, f, no converge a cero. ♦

Este ejemplo y el anterior ponen de manifiesto que la convergencia puntual de $\{f_n\}$ a f no proporciona una buena idea de la aproximación entre las funciones f_n y f. Además las propiedades de continuidad de las funciones f_n pueden no conservarse para la función límite puntual. Esto lleva a definir un tipo de convergencia mejor que la convergencia puntual.

10.2.2. Convergencia Uniforme

Sea J un intervalo no vacío contenido en el campo de convergencia puntual de la sucesión $\{f_n\}$. Y sea f la función límite puntual de $\{f_n\}$. Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en J si para todo $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ (que dependerá de ε) tal que para todo $n\geqslant n_0$ se verifica que $\sup\{|f_n(x)-f(x)|:x\in J\}\leqslant\varepsilon$.

Para comprender bien esta definición, analicemos la última desigualdad. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon &\Longleftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \;\; \forall x \in J \\ &\Longleftrightarrow -\varepsilon \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \varepsilon \;\; \forall x \in J \\ &\Longleftrightarrow f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \varepsilon \;\; \forall x \in J.\end{aligned}$$

Cuya interpretación gráfica es la siguiente (donde hemos considerado $J = [a, b]$).

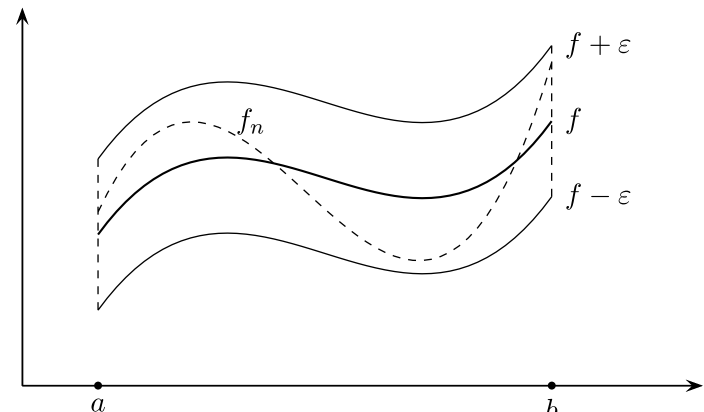


Figura 10.3. Interpretación gráfica de la convergencia uniforme

Esto nos dice que la gráfica de la función f_n se queda dentro de un *tubo* centrado en la gráfica de f de anchura 2ε (ver figura 10.3). Ahora debe estar claro que en el ejemplo 1 no hay convergencia uniforme en ningún intervalo del tipo $[0, a]$ con $0 < a < 1$ y en el ejemplo 2 no hay convergencia uniforme en ningún intervalo que contenga a -1 o a 1.

10.7 Observaciones. Observa que la diferencia entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme en J es la siguiente.

Decir que $\{f_n\}$ converge a f puntualmente en J significa que:

- Fijas un $x \in J$;

- La correspondiente sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, es decir: para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Naturalmente, el número n_0 dependerá del ε y, en general, **también de** x porque si cambias x por otro punto $z \in J$ la sucesión $\{f_n(z)\}$ es distinta de $\{f_n(x)\}$ y el n_0 que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.

Decir que $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en J significa que:

- Fijas un $\varepsilon > 0$;

- Existe un número natural n_0 (que dependerá de ε) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ **para todo** $x \in J$.

Es decir, en la convergencia uniforme, hay un mismo número n_0 que es válido simultáneamente para todos los $x \in J$.

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular *para cada x fijo* el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$, lo que suele ser muy sencillo. Mientras que para estudiar la convergencia

uniforme en un intervalo J, lo que se hace es calcular, con las técnicas usuales de derivación, el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J. La presencia del valor absoluto en $|f_n(x) - f(x)|$ es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse con facilidad. Supongamos que el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J se alcanza en un punto $c_n \in J$. Entonces, si $\lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(c_n) - f(c_n)\} = 0$ hay convergencia uniforme en J, y en otro caso no hay convergencia uniforme en J. En particular, si hay una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de J tal que $\{|f_n(z_n) - f(z_n)|\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en J.

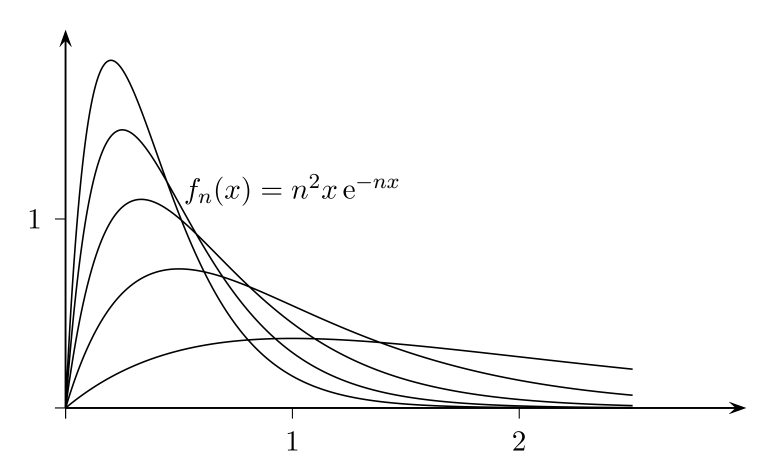
10.8 Ejemplo. Estudiemos la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$ y en intervalos de la forma $[a, +\infty[$, ($a > 0$), de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x) = n^2 x \,\mathrm{e}^{-nx}$.

Observa que $f_n(0) = 0$ y, si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim\limits_{n\to\infty} n^2(\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (porque es una sucesión de la forma $n^p\lambda^n$ donde $0 < |\lambda| < 1$). Por tanto, el campo de convergencia puntual es $\mathcal{C} = \mathbb{R}_o^+$, y la función límite puntal está dada por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Observa que $f_n(x) \geqslant 0$, por lo que $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Ahora, como, $f_n'(x) = n^2\,\mathrm{e}^{-nx}(1 - nx)$, se deduce que $f_n'(x) > 0$ para $0 \leqslant x < 1/n$, y $f_n'(x) < 0$ para $x > 1/n$. Luego $f_n(x) \leqslant f_n(1/n)$ para todo $x \geqslant 0$. Deducimos que $f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}_o^+\}$, y como $f_n(1/n) = n/\mathrm{e}$, sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma $[a, +\infty[$, con $a > 0$. Por lo antes visto, sabemos que la función f_n es decreciente en el intervalo $[1/n, +\infty[$. Sea n_0 un número natural tal que $\frac{1}{n_0} < a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_0$, tenemos que $[a, +\infty[\subset [1/n, +\infty[$, por lo que, $\max\{f_n(x) : x \in [a, +\infty[\} = f_n(a)$. Como $\lim\{f_n(a)\} = 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$.

Observa las gráficas de las primero cinco funciones de la sucesión.



Puedes comprobar fácilmente, integrando por partes, que $\int_0^1 n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,dx = 1 - (1+n)\,\mathrm{e}^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Es decir, en general, no se puede permutar la integración con el límite puntual. ♦

10.9 Observaciones. El concepto de convergencia uniforme requiere algunas precisiones importantes.

• *La convergencia uniforme se refiere siempre a un conjunto*. No tiene sentido decir que *"la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente"* si no se indica inmediatamente a continuación el conjunto en el que afirmamos que hay convergencia uniforme. Además, siempre hay convergencia uniforme en subconjuntos finitos del campo de convergencia puntual (si no sabes probarlo es que no has entendido la definición de convergencia uniforme). Por ello, sólo tiene interés estudiar la convergencia uniforme en conjuntos infinitos, por lo general en intervalos.

• No existe *"el campo de convergencia uniforme"*. Es decir, el concepto de *campo de convergencia puntual* no tiene un análogo para la convergencia uniforme. La razón es que no tiene por qué existir un *más grande* conjunto en el que haya convergencia uniforme. Así, en el ejemplo anterior, hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[a, +\infty[$ con $a > 0$. La unión de todos ellos es $\mathbb{R}^+$ y en $\mathbb{R}^+$ no hay convergencia uniforme.

10.10 Teorema (Condición de Cauchy para la convergencia uniforme). *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en J si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todos $n, m \geqslant n_0$ se verifica que:*

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función f en J. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que:

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $m \geqslant n_0$. Para todo $x \in J$ tenemos que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto para todos $n, m \geqslant n_0$ se verifica que $\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon$.

Recíprocamente, supuesto que la condición del enunciado se cumple, entonces para cada $x \in J$ se verifica que la sucesión $\{f_n(x)\}$ verifica la condición de Cauchy pues:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon.$$

Por el teorema de completitud de $\mathbb{R}$ dicha sucesión es convergente. Por tanto podemos definir la función límite puntual $f : J \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ para todo $x \in J$. Comprobemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en J. Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis hecha, hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geqslant n_0$ es:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall x \in J$$

Fijando $x \in J$ y $n \geqslant n_0$ en esta desigualdad y tomando límite para $m \to \infty$ obtenemos que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

desigualdad que es válida para todo $x \in J$. Deducimos que $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon$ siempre que $n \geqslant n_0$. Hemos probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en J. □

La utilidad de la condición de Cauchy para la convergencia uniforme es que es intrínseca a la sucesión, es decir, no involucra a la función límite.

10.2.3. Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, podemos formar otra, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando *consecutivamente* los de $\{f_n\}$. Es decir, $F_1 = f_1$, $F_2 = f_1 + f_2$, $F_3 = f_1 + f_2 + f_3$,... En general, $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. La sucesión $\{F_n\}$ así definida se llama *serie de término general* f_n y la representaremos por el símbolo $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Debe quedar claro que **una serie de funciones es una sucesión de funciones que se obtienen sumando consecutivamente las funciones de una sucesión dada**. Todo lo dicho para sucesiones de funciones se aplica exactamente igual para series de funciones. En particular, los conceptos de convergencia puntual y uniforme para sucesiones de funciones tienen igual significado para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ cuyas funciones f_n suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto:

$$\mathcal{C} = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \ \text{ es convergente}\}.$$

La función límite puntual, llamada *función suma* de la serie, es la función $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathcal{C}$ por:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

La única novedad es que ahora también podemos considerar el *campo de convergencia absoluta* de la serie, que es el conjunto

$$\mathcal{A} = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)| \ \text{ es convergente}\}.$$

El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.

10.11 Teorema (Criterio de Weierstrass). *Sea $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones y A un conjunto tal que para todo $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, donde la serie $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ es convergente. Entonces $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente y absolutamente en A.*

Demostración. De las hipótesis se deduce, en virtud del criterio de comparación para series de términos positivos, que la serie $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ converge para todo $x \in A$. Esto implica que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ (x) converge para todo $x \in A$. Veamos que la convergencia es uniforme. Utilizaremos el criterio de Cauchy.

Como $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ es convergente cumplirá la condición de Cauchy, esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m \geqslant n_0$ entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right| = \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k < \varepsilon.$$

Deducimos que para todo $x \in A$ se verifica que:

$$|F_n(x) - F_m(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k < \varepsilon.$$

Como esta desigualdad es válida para todo $x \in A$ se sigue que:

$$\sup\{|F_n(x) - F_m(x)| : x \in A\} \leqslant \varepsilon. \tag{10.2}$$

Es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A. □

Por otra parte, si en la condición de Cauchy (10.2) para una serie de funciones $\sum f_n$, hacemos $m = n+1$ deducimos la siguiente condición necesaria para la convergencia uniforme.

10.12 Corolario. *Una condición necesaria para que una serie de funciones $\sum f_n$ sea uniformemente convergente en un conjunto A es que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converja uniformemente a cero en A.*

Observa que los conceptos de convergencia absoluta y de convergencia uniforme son independientes: una serie puede ser uniformemente convergente en un conjunto A y no ser absolutamente convergente en A. En tales casos se aplican los siguientes criterios de convergencia no absoluta para series de funciones.

10.13 Proposición (Criterios de convergencia uniforme no absoluta). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto A.*

Criterio de Dirichlet. *Supongamos que:*

a) *$\{a_n\}$ es una sucesión de números reales monótona y convergente a cero.*

b) *La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A, es decir, hay un número $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant M$.*

Entonces la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. *Supongamos que:*

a) *La serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.*

b) *Para cada $x \in A$ $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de números reales monótona y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en A, es decir, hay un número $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|f_n(x)| \leqslant M$.*

Entonces la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ *converge uniformemente en* A.

Demostración. Probaremos primero el criterio de Dirichlet. Pongamos $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. De la fórmula (9.10) de suma por partes de Abel se deduce fácilmente que:

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}(x)(a_{n+k} - a_{n+k+1}) + F_{n+p}(x)a_{n+p+1} - F_n(x)a_{n+1}. \quad (10.3)$$

Igualdad que es válida para todos $p > n \geqslant 1$ y todo $x \in A$. Tomando valores absolutos en esta igualdad, teniendo en cuenta que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|F_n(x)| \leqslant M$ y suponiendo que $\{a_n\}$ es decreciente en cuyo caso será $a_n > 0$, obtenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x)\right| \leqslant M \sum_{k=1}^{p}(a_{n+k} - a_{n+k+1}) + Ma_{n+p+1} + Ma_{n+1} =$$
$$= M(a_{n+1} - a_{n+p+1}) + Ma_{n+p+1} + Ma_{n+1} = 2Ma_{n+1}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como suponemos que $\{a_n\} \to 0$, hay un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$. Deducimos que para todos $p > n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x)\right| \leqslant 2Ma_{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

Hemos probado así que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A.

Probaremos ahora el criterio de Abel. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Intercambiando los papeles de a_k y f_k en la igualdad (10.3) tenemos:

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p} S_{n+k}(f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + S_{n+p} f_{n+p+1}(x) - S_n f_{n+1}(x).$$

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.Teniendo en cuenta que:

$$\sum_{k=1}^{p}(f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + f_{n+p+1}(x) - f_{n+1}(x) = 0,$$

deducimos de la igualdad anterior:

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p}(S_{n+k} - S)(f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)) + (S_{n+p} - S) f_{n+p+1}(x) -$$
$$- (S_n - S) f_{n+1}(x).$$

Igualdad que es válida para todos $p > n \geqslant 1$ y todo $x \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S_q - S| \leqslant \varepsilon/4M$ siempre que $n \geqslant n_0$. Entonces $p > n \geqslant n_0$, tomando valores absolutos en la igualdad anterior y teniendo en cuenta que $|f_n(x)| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como para cada $x \in A$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es monótona, las diferencias $f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)$ son todas positivas o todas negativas y, por tanto:

$$\sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{p}(f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x))\right| = |f_{n+1}(x) - f_{n+p+1}(x)| \leqslant 2M.$$

Concluimos que para todos $p > n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado así que la serie de funciones $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n f_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A. □

10.14 Corolario (Criterio de Leibniz para la convergencia uniforme). *Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A$ la sucesión $\{g_n(x)\}$ es monótona y converge uniformemente a cero en A. Entonces la serie $\sum_{n \geqslant 1}(-1)^{n+1} g_n$ converge uniformemente en A.*

Demostración. Pongamos $f_n \equiv f_n(x) = (-1)^{n+1}$. Entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones constantes. Sea $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Se verifica que $|F_n| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant 1$ para todo $x \in A$. Pongamos también $a_k = g_k(x)$. Usando la igualdad (10.3), tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k+1} g_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}(g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)) + F_{n+p} g_{n+p+1}(x) - F_n g_{n+1}(x).$$

Tomando valores absolutos obtenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k+1} g_{n+k}(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)| + |g_{n+p+1}(x)| + |g_{n+1}(x)|.$$

Como, para cada $x \in A$, los números $g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)$ son todos positivos o todos negativos, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{p} |g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{p}(g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x))\right| = |g_{n+1}(x) - g_{n+p+1}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |g_{n+p+1}(x)| + |g_{n+1}(x)|.$$

Resulta así que para todo $x\in A$:

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k+1}g_{n+k}(x)\right| \leqslant 2\,|g_{n+p+1}(x)| + 2\,|g_{n+1}(x)|\,.$$

Como $\{g_n\}$ converge uniformemente a 0, dado $\varepsilon > 0$, hay un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que $|g_n(x)| \leqslant \varepsilon/4$. De la desigualdad anterior, se sigue que para $n \geqslant n_0$ y para todo $x\in A$ se verifica que:

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k+1}g_{n+k}(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Hemos probado así que la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}g_n$ verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A. □

Los resultados siguientes, relativos a la convergencia uniforme, se aplican, claro está, tanto a sucesiones como a series de funciones.

10.15 Teorema (Conservación de la continuidad). *Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un intervalo J. Sea $a\in J$ y supongamos que las funciones f_n son todas ellas continuas en a. Se verifica entonces que la función f es continua en a. En particular, si las funciones f_n son todas ellas continuas en J. Se verifica entonces que la función f es continua en J.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, la hipótesis de convergencia uniforme implica que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(u) - f(u)| \leqslant \varepsilon/3$ para todo $u\in J$. Tenemos:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)|$$

Pero por la forma en que hemos tomado n_0 se sigue que:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \tag{10.4}$$

Además, como por hipótesis f_{n_0} es continua en a , se verifica que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in J$ con $|x - a| < \delta$ es $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leqslant \varepsilon/3$, lo que, en virtud de (10.4) implica que:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Resumiendo, hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si tomamos $|x - a| < \delta$ y $x\in J$ entonces $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, que es, precisamente, la continuidad de f en a. □

Como la continuidad de f en $a\in J$ se expresa por $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)$ y, por otra parte, por ser f_n continua en a, $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\big)$; el resultado anterior nos dice que:

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to a} f_n(x)\big).$$

Es decir, la convergencia uniforme permite permutar los límites. El ejemplo 10.6 con $a = 1$ o $a = -1$ muestra que esta igualdad puede ser falsa si no hay convergencia uniforme.

10.16 Teorema (Permutación de la integración con el límite uniforme). *Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un intervalo $[a,b]$ y que las funciones f_n son todas ellas continuas en $[a,b]$. Se verifica entonces que:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x\,. \tag{10.5}$$

En particular, si una serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10.6}$$

Demostración. Sea $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$. La hipótesis de convergencia uniforme nos dice que dado $\varepsilon>0$ existe un n_0 tal que para todo $n\geqslant n_0$ se cumple:

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{para todo } x \text{ en } [a,b]$$

Así pues, si $n\geqslant n_0$ tenemos:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}x = \varepsilon(b-a).$$

Al cumplirse esto para todo $\varepsilon>0$ se sigue que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Este resultado es válido también si solamente se supone que las funciones f_n son integrables en $[a,b]$, aunque en ese caso su demostración es un poco más larga porque hay que probar en primer lugar que la función límite uniforme f también es integrable en $[a,b]$. Suponiendo que las funciones f_n son continuas la función límite uniforme f también es continua y, por tanto, es integrable en $[a,b]$.

Cuando no hay convergencia uniforme la igualdad (10.5) no tiene por qué ser cierta como se pone de manifiesto en el ejemplo 10.8.

10.17 Ejemplo. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x)=x^n(\log x)^2$, y $f_n(0)=0$. Veamos que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$.

Observa que f_n es continua y positiva en $[0,1]$ y se anula en los extremos del intervalo. Como $f_n'(x)=(n\,\log x+2)x^{n-1}\log x$, se sigue que en el punto $c_n=\exp(-2/n)$ la función f_n alcanza un máximo absoluto en $[0,1]$. Luego

$$|f_n(x)|=f_n(x)\leqslant f_n(c_n)=\frac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n^2},$$

y, puesto que la serie $\sum \dfrac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$. En consecuencia, se verificará que:

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x(\log x)^2}{1-x} \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = 2\frac{1}{(n+1)^3}$$

como fácilmente puedes comprobar integrando por partes, se deduce que:

$$\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x} dx = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

♦

La convergencia uniforme no conserva la derivabilidad. Esto es fácil de entender si consideras que puedes sacar pequeños dientes de sierra a la gráfica de una función derivable con lo que resulta una nueva función no derivable y arbitrariamente próxima a la primera. Por ello, el siguiente resultado tiene hipótesis más exigentes que los anteriores.

10.18 Teorema (Derivabilidad y convergencia uniforme). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I, y supongamos que:*

i) *f_n es derivable en I para todo $n \in \mathbb{N}$.*

ii) *$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en I.*

iii) *$\{f'_n\}$ converge uniformemente a g en I*

Entonces f es derivable en I y $g(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$.

Demostración. Demostraremos este resultado en el caso particular de que las funciones f_n tengan derivada primera continua en I. En tal caso, fijemos un punto $a \in I$. Ahora, para $x \in I$, en virtud del teorema fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Tomando límites y haciendo uso del teorema anterior, deducimos que:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Una nueva aplicación del teorema fundamental del Cálculo nos dice ahora que f es derivable en I y que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. □

Observa que este teorema nos dice que, en las hipótesis hechas, podemos permutar la derivabilidad con la convergencia uniforme:

$$f = \lim f_n \longrightarrow f' = \lim\{f_n'\}.$$

Esta igualdad es una permutación de límites pues afirma que para $a \in I$ se verifica que:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} \frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a}\right) = \lim_{n\to\infty}\{f_n'(a)\}$$

El teorema anterior suele enunciarse de una forma más general en apariencia. Tú mismo puedes deducirla a partir del siguiente resultado que se prueba haciendo uso del teorema del valor medio.

10.19 Proposición. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables en un intervalo I. Supongamos que la sucesión $\{f_n'\}$ converge uniformemente en I y que hay un punto $a \in I$ tal que $\{f_n(a)\}$ es convergente. Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en todo intervalo acotado contenido en I.*

Demostración. Sea J un intervalo acotado contenido en I y sea L la longitud de J. Podemos suponer que $a \in J$ (si es necesario ampliamos J para que así sea). Como $\{f_n'\}$ converge uniformemente en I también converge uniformemente en $J \subset I$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geqslant n_0$ se verifica que:

$$\left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \forall x \in J \tag{10.7}$$

Como $\{f_n(a)\}$ es convergente, podemos tomar también n_0 de forma que para $n, m \geqslant n_0$ se verifica que:

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.8}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(t) = f_n(t) - f_m(t) - (f_n(a) - f_m(a))$ en un intervalo de extremos x y a donde $x \in J$, se tiene que hay algún c comprendido entre x y a, por lo que $c \in J$, tal que $h(x) - h(a) = h'(c)(x-a)$, es decir:

$$f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a)) = \big(f_n'(c) - f_m'(c)\big)(x-a).$$

Tomando valores absolutos en esta igualdad y teniendo en cuenta (10.7), resulta que para $n, m \geqslant n_0$ es:

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| = \left|\big(f_n'(c) - f_m'(c)\big)\right| |x-a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L} L = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in J.$$

Deducimos que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| + |f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

desigualdad que es válida siempre que $n, m \geqslant n_0$ y *para todo* $x \in J$. Hemos probado así que la sucesión $\{f_n\}$ verifica en J la condición de Cauchy para la convergencia uniforme. □

10.3. Series de potencias

Dados un número real, $a \in \mathbb{R}$, y una sucesión de números reales, $\{c_n\}_{n \geqslant 0}$, sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f_n(x) = c_n(x-a)^n$ y, por convenio, $f_0(x) = c_0$. La serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ se llama *serie de potencias centrada en* a. La sucesión $\{c_n\}_{n \geqslant 0}$ se llama *sucesión de coeficientes de la serie*. El coeficiente c_0 se llama *término independiente* de la serie. Suele usarse, y nosotros también seguiremos la costumbre, la notación $\sum_{n \geqslant 0} c_n(x-a)^n$ para representar la serie de potencias centrada en a con coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Un tipo particular de series de potencias son las **series de Taylor**. Dada una función f que tiene derivadas de todo orden en un punto a, la serie de potencias

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama serie de Taylor de f en a. Recuerda que, por convenio, la derivada de orden 0 de una función, $f^{(0)}$, es la propia función $f^{(0)} = f$ y que $0! = 1$.

Observa que la serie de Taylor de f en a *es* la sucesión de los polinomios de Taylor de f en a. Recuerda que el polinomio de Taylor de orden n de f en a es la función polinómica dada por:

$$T_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

El resultado básico para estudiar la convergencia de una serie de potencias es el siguiente.

10.20 Lema (Lema de Abel). *Sea $\rho > 0$ y supongamos que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ está mayorada. Entonces se verifica que la serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge absolutamente en el intervalo $]a-\rho, a+\rho[$ y converge uniformemente en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $]a-\rho, a+\rho[$.*

Demostración. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $0 < r < \rho$. Será suficiente probar que la serie converge absolutamente y uniformemente en el intervalo $[a-r, a+r]$. Aplicaremos para ello el criterio de Weierstrass. Para todo $x \in [a-r, a+r]$, tenemos que:

$$|c_n(x-a)^n| = |c_n|\rho^n \frac{|x-a|^n}{\rho^n} \leqslant M \leqslant M\frac{r^n}{\rho^n} = M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Basta ahora tener en cuenta que la serie $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ es convergente por ser una serie geométrica de razón $0 < \dfrac{r}{\rho} < 1$. □

El resultado anterior nos lleva, de forma natural, a considerar el más grande $\rho > 0$ tal que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ esté mayorada.

10.3.1. Radio de convergencia de una serie de potencias

Consideremos el conjunto

$$A = \{\rho \geqslant 0 : \text{ la sucesión } \ \{|c_n|\rho^n\} \ \text{ está acotada}\}.$$

Observa que $A \neq \emptyset$ ya que el $0 \in A$. Además, A es un intervalo porque si $\rho \in A$ entonces $[0, \rho] \subset A$. Si A está mayorado definimos $R = \sup(A)$, si no lo está definimos $R = +\infty$. Se dice que R es el *radio de convergencia* de la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$. El intervalo $I =]a-R, a+R[$, con el convenio de que cuando $R = +\infty$ es $I = \mathbb{R}$, se llama *intervalo de convergencia* de la serie. La razón de esta terminología queda clara en el siguiente resultado, fácil consecuencia del lema de Abel.

10.21 Teorema. *Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo y sea I el intervalo de convergencia de la serie. Se verifica que la serie converge absolutamente en todo punto de I y converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I. Además la serie no converge para valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x-a| > R$.*

10.22 Definición. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo y sea I el intervalo de convergencia de la serie. La función $f : I \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

se llama *función suma de la serie*.

Como consecuencia del teorema anterior, del carácter local de la continuidad y del teorema 10.15, se sigue que la función suma de una serie de potencias es continua. Enseguida veremos que es mucho más que continua.

El teorema 10.21 nos dice que el estudio de la convergencia de una serie de potencias se reduce a calcular el radio de convergencia. La única duda corresponde a los extremos del intervalo de convergencia, los puntos $a - R$ y $a + R$, en los cuales puede darse cualquier comportamiento como veremos enseguida con ejemplos.

Fíjate en que el radio de convergencia sólo depende de la sucesión de coeficientes de la serie y que el punto a en que la serie está centrada no interviene para nada en la definición del radio de convergencia.

Todo esto está muy bien, dirás, pero ¿cómo se calcula el radio de convergencia? Desde luego, la definición que hemos dado de radio de convergencia tiene utilidad teórica pero no sirve para calcularlo. Hay una fórmula general para calcular el radio de convergencia que no vamos considerar aquí porque, a efectos de cálculo, los siguientes casos particulares son los más interesantes.

10.3.1.1. Cálculo del radio de convergencia

Podemos aplicar los criterios del cociente y de la raíz para estudiar la convergencia absoluta de una serie de potencias. Ello permite deducir con facilidad los siguientes dos resultados.

10.23 Proposición. *Sea* $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias y supongamos que* $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \to L$ *donde* $0 \leqslant L \leqslant +\infty$. *Entonces si* $L = 0$ *el radio de convergencia de la serie es* $R = +\infty$, *si* $L = +\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R = 0$ *y si* $0 < L < +\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R = 1/L$.

Demostración. Apliquemos el criterio del cociente para estudiar la convergencia absoluta de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$. Pongamos $a_n = |c_n(x-a)^n|$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|x-a| \to L|x-a|.$$

Si $0 < L < 1$, el criterio del cociente nos dice que la serie converge absolutamente si $L|x-a| < 1$, es decir, si $|x-a| < 1/L$, y que si $L|x-a| > 1$ entonces la serie no converge porque su término general $\{c_n(x-a)^n\}$ no converge a 0. Deducimos que el radio de convergencia es $R = 1/L$.

Si $L = 0$ la condición $L|x-a| < 1$ se cumple para todo $x\in\mathbb{R}$ y el radio de convergencia es $R = +\infty$. Si $L = +\infty$ entonces para todo $x \neq a$ se tiene que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|x-a| \to +\infty.$$

lo que, por el criterio del cociente, nos dice que la serie no converge porque su término general no converge a 0. Luego en este caso es $R = 0$. □

De forma totalmente análoga, haciendo uso del criterio de la raíz, se prueba el siguiente resultado.

10.24 Proposición. *Sea* $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias y supongamos que* $\sqrt[n]{|c_n|} \to L$ *donde* $0 \leqslant L \leqslant +\infty$. *Entonces si* $L = 0$ *el radio de convergencia de la serie es* $R = +\infty$, *si* $L = +\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R = 0$ *y si* $0 < L < +\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R = 1/L$.

Observa que los criterios anteriores son bastante restrictivos pues, por ejemplo, a la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^{2n}$ no puedes aplicarle ninguno de ellos. En particular, el criterio del cociente no puede aplicarse cuando hay infinitos coeficientes nulos. En casos parecidos a este el siguiente artificio es de bastante utilidad práctica.

10.25 Observaciones.

- Consideremos una serie de potencias de la forma $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{qn}$ donde q es un número natural fijo. Para calcular su radio de convergencia hacemos $z = (x-a)^q$ y calculamos el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$. Si éste es $R\in\mathbb{R}^+$, entonces la $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{qn}$ converge para $|x-a|^q < R$, es decir, para $|x-a| < \sqrt[q]{R}$, luego su radio de convergencia es $\sqrt[q]{R}$.

- Si $k \in \mathbb{N}$, las series $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$, $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{n+k}$ y $\sum_{n\geqslant k} c_n(x-a)^{n-k}$ tienen igual radio de convergencia puesto que todas ellas convergen para los mismos valores de x.
- Si las sucesiones $\{|c_n|\}$ y $\{|b_n|\}$ son asintóticamente equivalentes, entonces las series de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ y $\sum b_n(x-a)^n$ tienen igual radio de convergencia. Ello es consecuencia de que si $\rho > 0$ las sucesiones $\{|c_n|\rho^n\}$ y $\{|b_n|\rho^n\}$ son, evidentemente, asintóticamente equivalentes, por lo que ambas están mayoradas o ninguna lo está.

El siguiente importante teorema nos dice, entre otras cosas, que si una serie de potencias tiene radio de convergencia no nulo entonces dicha serie es la serie de Taylor de su función suma. Usaremos el siguiente resultado.

10.26 Lema. *Las series* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *y* $\sum_{n\geqslant 1} nc_n(x-a)^{n-1}$ *tienen igual radio de convergencia.*

Demostración. Pongamos:

$$A = \{\rho \geqslant 0 : \{|c_n|\rho^n\} \text{ está acotada}\}, \quad B = \{\rho \geqslant 0 : \{n|c_n|\rho^n\} \text{ está acotada}\}.$$

Los respectivos radios de convergencia viene dados por $R = \sup(A)$ y $R' = \sup(B)$ con los convenios usuales. Es evidente que $B \subset A$. Lo que implica que $R' \leqslant R$. En particular, si $R = 0$ entonces $R = R' = 0$. Consideremos que $0 < R < +\infty$ y sea $0 < \rho_0 < R$. Por definición de supremo, tiene que haber algún $\rho \in A$ tal que $\rho_0 < \rho$. La sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ está acotada, es decir, hay un $M > 0$ tal que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deducimos que:

$$n|c_n|\rho_0^n = n|c_n|\rho^n\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n \leqslant Mn\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n.$$

Como, por ser $0 < \rho_0 < \rho$, la sucesión $n\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n$ converge a cero, se sigue que dicha sucesión está acotada y, teniendo en cuenta la desigualdad anterior, se sigue que también está acotada la sucesión $\{n|c_n|\rho_0^n\}$. Hemos probado así que $\rho_0 \in B$ y, por tanto, $\rho_0 \leqslant R'$. Como esta desigualdad es válida para todo número $\rho_0 < R$ se sigue que necesariamente debe ser $R \leqslant R'$ y concluimos que $R = R'$. En el caso en que $R = +\infty$ puede repetirse el razonamiento anterior con cualquier número $\rho_0 > 0$ y concluimos que también es $R' = +\infty$. □

10.27 Teorema (Derivación de una serie de potencias). *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia no nulo* R. *Sea* I *el intervalo de convergencia de la serie y* $f : I \to \mathbb{R}$ *la función suma de la serie definida para todo* $x \in I$ *por:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

i) f *es indefinidamente derivable en* I.

ii) La derivada de orden k de f está dada para todo $x \in I$ por:

$$f^{(k))}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}. \tag{10.9}$$

En particular, se verifica que $f^{(k))}(a) = c_k \cdot k!$, es decir, $c_k = \dfrac{f^{(k))}(a)}{k!}$ y, por tanto, la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ coincide con la serie de Taylor en a de su función suma.

Demostración. Las series de potencias son series de funciones polinómicas las cuales son indefinidamente derivables. Pongamos $f_n(x) = c_n(x-a)^n$. Teniendo en cuenta el lema anterior, las series de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n \equiv \sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n' \equiv \sum\limits_{n\geqslant 0} nc_n(x-a)^{n-1}$ tienen igual radio de convergencia. Podemos aplicar ahora los teoremas 10.21 y 10.18 para obtener que la función suma f es derivable y su derivada viene dada para todo $x \in I$ por:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}.$$

Es decir, la derivada de la función suma es la función suma de la serie de las derivadas.

Podemos volver a aplicar este resultado a la serie de las derivadas $\sum\limits_{n\geqslant 0} nc_n(x-a)^{n-1}$, pues dicha serie sigue siendo una serie de potencias con el mismo radio de convergencia, y deducimos que la función suma de dicha serie, que es f' según acabamos de probar, es derivable y su derivada viene dada para todo $x \in I$ por:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}.$$

Este razonamiento puede repetirse tantas veces como queramos. Una simple y evidente inducción prueba que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad (10.9). □

Dijimos que las series de Taylor eran un tipo especial de series de potencias. El teorema anterior nos dice que no son tan especiales: toda serie de potencias con radio de convergencia no nulo es una serie de Taylor; es la serie de Taylor de su función suma.

El teorema anterior nos dice que las funciones suma de series de potencias son funciones con derivadas de todos órdenes (funciones de clase C^∞) y que podemos calcular sus derivadas sucesivas derivando término a término la serie que las define.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema de derivación y nos dice que siempre podemos calcular una primitiva de una serie de potencias expresándola por medio de otra serie de potencias.

10.28 Corolario (Primitiva de una serie de potencias). *Las series de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ tiene igual radio de convergencia. Supuesto que dicho radio de con-*

vergencia es positivo y llamando I al intervalo de convergencia, se verifica que la función

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}\qquad (x\in I)$$

es una primitiva en I de la función

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\qquad (x\in I).$$

En otros términos, este resultado afirma que para todo $x\in I$ se verifica la igualdad:

$$\int_a^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t-a)^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x c_n(t-a)^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}\tag{10.10}$$

10.29 Ejemplo.

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

♦

10.30 Estrategia. Acabamos de ver que si expresamos una función f como suma de una serie de potencias, derivando la serie término a término se obtiene la serie de potencias de la derivada de f, e integrando la serie término a término se obtiene una serie de potencias cuya suma es una primitiva de f. Estos procesos se determinan mutuamente. Por eso, para expresar una función f como suma de una serie de potencias, puede ser una estrategia válida, cuando la derivada de f sea más sencilla que f, expresar la derivada f' como suma de una serie de potencias, pues integrando dicha serie término a término se obtiene una serie de potencias que se diferencia de f en una contante que usualmente puede calcularse fácilmente.

10.31 Ejemplo. Sabemos que:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\qquad (1-<x<1)$$

Integrando término a término se obtiene que la función:

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad (1-<x<1)$$

es derivable en $]-1,1[$ con derivada $h'(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Por tanto, las funciones h y $f(x)=-\log(1-x)$ tienen la misma derivada en $]-1,1[$ y como $h(0)=f(0)=0$, concluimos que $h(x)=-\log(1-x)$. Luego:

$$\log(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad (1-<x<1).$$

♦

10.4. Desarrollos en serie de potencias de las funciones elementales

Dada una función f con derivadas de todos órdenes en un intervalo I y un punto $a\in I$, ¿se verifica que la serie de Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia no nulo? En caso de que así sea, ¿se verifica que la función suma de la serie de Taylor de f coincide con f?

Contrariamente a lo que en principio puede parecer, la respuesta a ambas preguntas es, en general, negativa. Un estudio en profundidad de este problema requiere el uso de técnicas de variable compleja que no son propias de este curso. A continuación consideraremos algunas de las funciones más usuales del Cálculo y probaremos que, en determinados intervalos, coinciden con la suma de sus respectivas series de Taylor. La herramienta básica para estudiar la convergencia de una serie de Taylor es, precisamente, el teorema de Taylor. Conviene recordarlo.

Teorema de Taylor

Sea f un función $n+1$ veces derivable en un intervalo I y sean $a, x\in I$ entonces existe un punto $c\in I$ con $|a-c|<|a-x|$ tal que:

$$f(x)=T_n(f,a)(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1}(c)(x-a)^{n+1}$$

Series de Taylor de la función exponencial

Ya sabemos que la función exponencial coincide con la suma de su serie de Taylor en 0:

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Recuerda que usamos el Teorema de Taylor para probar esta igualdad. Vamos a volver a obtener este resultado de forma diferente.

Los polinomios de Taylor de la función $\exp$ son particularmente fáciles de calcular. Puesto que $\exp^{(k)}(0)=\exp(0)=1$ para todo k, el polinomio de Taylor de orden n en 0 es:

$$T_n(\exp,0)(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

Consideremos la serie de potencias centrada en 0 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$. Llamando $c_n=\dfrac{1}{n!}$ tenemos que $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{1}{n+1}\to 0$, por tanto la serie tiene radio de convergencia $R=+\infty$. Llamemos h a la función suma de la serie:

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Vamos a probar que h es la función exponencial. Por el teorema de derivación tenemos que

$$h'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=h(x).$$

Acabamos de probar que h es una función que coincide con su derivada, esto es, $h(x) = h'(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Consideremos ahora la función $g(x) = h(x)\,\mathrm{e}^{-x}$,

$$g'(x) = h'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - h(x)\,\mathrm{e}^{-x} = h(x)\,\mathrm{e}^{-x} - h(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Como $g'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que la función g es constante. Como $g(0) = 1$, deducimos que $g(x) = g(0) = 1$. Concluimos, por tanto, que $h(x) = \mathrm{e}^x$.

La serie de Taylor centrada en un punto a se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que:

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^a}{n!}(x-a)^n \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Series de Taylor del seno y del coseno

Sabemos que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$
$$\operatorname{sen}^{(k)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

Por tanto

$$T_n(\operatorname{sen}, a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k$$

Como para todo $z\in\mathbb{R}$ es $|\operatorname{sen} z| \leqslant 1$, el teorema de Taylor implica que:

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Pero sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

De donde deducimos

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}$$

Es decir, la serie de Taylor del seno converge a $\operatorname{sen} x$ cualquiera sea $x\in\mathbb{R}$.

Por el teorema de derivación para series de potencias obtenemos la serie del coseno, que también será convergente cualquiera sea $x\in\mathbb{R}$.

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Si hacemos $a = 0$ tenemos que para todo $x\in\mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Series de Taylor de la función logaritmo

Seguiremos la idea expuesta en la estrategia 10.30 y en el ejemplo 10.31.

Para calcular la serie de Taylor de $\log$, pongamos $f(x) = \log(1+x)$ definida para $x > -1$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (|x| < 1)$$

Integrando término a término esta serie, definamos para $|x| < 1$:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Tenemos, en virtud del teorema de derivación, que $h'(x) = f'(x)$ para todo $x \in]-1, 1[$, esto implica que $h(x) - f(x)$ es constante y, como $h(0) - f(0) = 0$, concluimos que $f(x) = h(x)$. Hemos probado así que:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1)$$

Observa que, efectivamente, $]-1, 1[$ es el intervalo de convergencia de la serie.

La serie de Taylor del logaritmo centrada en $a > 0$ se deduce de lo anterior:

$$\log(x) = \log(a + (x-a)) = \log a + \log\left(\frac{x-a}{a}\right) = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (x-a)^{n+1} \; (|x-a| < a).$$

Observa que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ cuya suma para $|x| < 1$ es igual a $\log(1+x)$ es también convergente para $x = 1$ puesto que se trata de la serie armónica alternada. En esta situación ¿cabe esperar que la igualdad $\displaystyle\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ válida, en principio, para $|x| < 1$ sea también válida para $x = 1$? En este caso particular, la respuesta es afirmativa porque sabemos que $\displaystyle\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. El siguiente resultado establece que esto es cierto en general.

10.32 Teorema (Teorema de Abel). *Sea* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* R*, siendo* $0 < R < +\infty$*. Sea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad x \in]a-R, a+R[$$

la función suma de la serie. Supongamos además que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n R^n$ *converge. Entonces se verifica que la serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$ *converge uniformemente en el intervalo* $[a, a+R]$*. En consecuencia:*

$$\lim_{\substack{x\to a+R \\ x<a+R}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \qquad y \qquad \int_a^{a+R} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{a+R} c_n (x-a)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} R^{n+1}.$$

Demostración. Escribamos:

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n R^n \left(\frac{x-a}{R}\right)^n .$$

Podemos aplicar a esta serie el criterio de Abel 10.13 con $a_n = c_n R^n$ y $f_n(x) = \left(\frac{x-a}{R}\right)^n$. Por hipótesis la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ es convergente y para $x \in [a, a+R]$ se verifica que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de números reales monótona (decreciente); además, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [a, a+R]$ se tiene que $|f_n(x)| \leqslant 1$. En estas condiciones el citado criterio de Abel nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $[a, a+R]$.

Las dos afirmaciones finales del teorema son consecuencia de que al ser la convergencia uniforme en $[a, a+R]$ se verifica que:

$$\lim_{\substack{x\to a+R\\ x<a+R}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a+R\\ x<a+R}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\substack{x\to a+R\\ x<a+R}} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n .$$

donde en la segunda igualdad podemos permutar el límite con la suma de la serie por ser la convergencia uniforme en $[a, a+R]$.

Igualmente, la convergencia uniforme de la serie en $[a, a+R]$ permite permutar la integral con la suma de la serie. □

Serie de Taylor del arcotangente en cero

Puesto que

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (x \in]-1, 1[)$$

se deduce fácilmente que

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in]-1, 1[)$$

Además, como esta serie converge también para $x = 1$, el teorema de Abel nos dice que:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Serie binomial de Newton

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, ya que para $\alpha \in \mathbb{Z}$ el desarrollo es conocido. Calculemos la serie de Taylor de f en 0. Tenemos que

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f^{(n}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

Los coeficientes de la serie serán:

$$\frac{f^{(n}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\binom{\alpha}{n}.$$

Por tanto la serie de Taylor de f es:

$$\sum_{n\geqslant 0}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Calculemos su radio de convergencia.

$$c_n=\binom{\alpha}{n}\Rightarrow\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{|\alpha-n|}{|n+1|}\to 1$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R=1$. Definamos para $|x|<1$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad (|x|<1)$$

Queremos probar ahora que la función suma de la serie, g, coincide con la función f en el intervalo $]-1,1[$. Para esto consideremos la función $h(x)=(1+x)^{-\alpha}g(x)$, definida para $|x|<1$. Calculemos h'.

$$h'(x)=-\alpha(1+x)^{-\alpha-1}g(x)+(1+x)^{-\alpha}g'(x)=(1+x)^{-\alpha-1}\big[-\alpha g(x)+(1+x)g'(x)\big]$$

Analicemos ahora la expresión entre corchetes,

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x)-\alpha g(x)&=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^n-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1}-\alpha\binom{\alpha}{n}+n\binom{\alpha}{n}\right]x^n=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1}+(n-\alpha)\binom{\alpha}{n}\right]x^n=0\end{aligned}$$

Hemos probado que $h'(x)=0$ para todo $x\in]-1,1[$, de donde deducimos que $h(x)$ es constante, y como $h(0)=1$, concluimos que $g(x)=(1+x)^{\alpha}$ para $|x|<1$. Hemos probado así que:

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad (|x|<1)$$

Para centrar esta serie en un punto $a>-1$ podemos proceder como sigue:

$$(1+x)^{\alpha}=(1+a+(x-a))^{\alpha}=(1+a)^{\alpha}\left[1+\frac{x-a}{1+a}\right]^{\alpha}=(1+a)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{x-a}{1+a}\right)^{\alpha}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{1}{(1+a)^{n-\alpha}}(x-a)^n\quad\text{siempre que}\quad |x-a|<1+a.$$

Donde hemos tenido en cuenta que $1+a>0$.

Serie de Taylor del arcoseno en cero

Sea $f(x)=\operatorname{arc\,sen} x$, su derivada viene dada como:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}$$

Haciendo las sustituciones $x\to -x^2$ y $\alpha\to -1/2$ en la serie binomial de Newton obtenemos:

$$f'(x)=(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n}\quad (|x|<1).$$

Integrando término a término la expresión anterior obtenemos la serie del arcoseno:

$$\operatorname{arc\,sen} x=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad (|x|<1)$$

Como

$$\binom{-1/2}{n}=\frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{1}{2^n}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}=$$
$$=(-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}$$

Resulta finalmente:

$$\operatorname{arc\,sen} x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}\,\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\quad (|x|<1)$$

Además, como la serie también converge para $x=1$, por el teorema de Abel tenemos que:

$$\operatorname{arc\,sen} 1=\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}\frac{1}{2n+1}$$

Ya dijimos que las series de Taylor de una función no siempre convergen a dicha función. Veamos un ejemplo de esto.

10.33 Ejemplo. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$$

La función es de clase infinito, y puede probarse sin dificultad que $f^{(n)}(0)=0$ para todo $n=0,1,2,\ldots$, por lo que su serie de Taylor en $a=0$ es la serie idénticamente nula que, evidentemente, no converge a f en ningún intervalo *abierto* que contenga a 0. ♦

Por esta razón se define una clase de funciones que son precisamente aquellas que pueden representarse localmente por sus series de Taylor.

10.34 Definición. Se dice que f es una **función analítica** en un intervalo abierto I si para cada punto $a \in I$ hay una serie de potencias centrada en a que converge en un intervalo abierto no vacío J_a, y su suma es igual a f en el intervalo $J_a \cap I$.

Dicho de forma más concisa: las funciones analíticas son las funciones que se representan localmente por medio de series de potencias. Teniendo en cuenta el teorema de derivación y el carácter local de la derivabilidad, es inmediato que una función f es analítica en un intervalo abierto I si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $f \in C^{\infty}(I)$.
2. Para todo punto $a \in I$ la serie de Taylor de f en a converge en un intervalo abierto no vacío J_a, y su suma es igual a f en el intervalo $J_a \cap I$.

10.35 Ejemplos. Hemos visto antes que para todo $a > 0$ se verifica que:

$$\log x = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1} \qquad (|x-a|<a). \tag{10.11}$$

Esto nos dice que la función logaritmo es analítica en el intervalo $I =]0, +\infty[$. Observa que en cada punto $a > 0$ la serie de Taylor del logaritmo converge en el intervalo $J_a =]0, 2a[$ y es en ese intervalo en donde representa a la función. El intervalo es tanto más pequeño cuanto más próximo esté a de 0.

También hemos visto que para todo $a > -1$ se verifica que:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{1}{(1+a)^{n-\alpha}}(x-a)^n \qquad |x-a| < 1+a.$$

Esto nos dice que la función $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ es analítica en el intervalo $I =]-1, +\infty[$. Observa que en cada punto $a > -1$ la serie de Taylor f converge en el intervalo abierto no vacío $J_a =]-1, 2a+1[$ y es en ese intervalo en donde representa a la función. El intervalo es tanto más pequeño cuanto más próximo esté a de -1.

De la misma forma, los resultados vistos para las funciones exponencial, seno y coseno, muestran que dichas funciones son analíticas en $\mathbb{R}$ y sus series de Taylor en cualquier punto convergen en todo $\mathbb{R}$.

La función del ejemplo 10.33 no es analítica en ningún intervalo abierto que contenga a 0, pero sí es analítica en intervalos abiertos que no contengan a 0.

10.4.1. Las funciones trascendentes elementales definidas por series

Las series de potencias son objetos matemáticos muy simples, en ellas solamente intervienen las operaciones algebraicas de adición y de multiplicación y la operación analítica de paso al límite. De hecho, las series de potencias son sucesiones de funciones polinómicas. Por eso dichas series suelen usarse para definir nuevas funciones. Recuerda que usamos el Teorema Fundamental del Cálculo para definir el logaritmo natural y, a partir de él, la función exponencial. Ahora vamos a hacer lo mismo con series de potencias y ¡por fin! podremos definir de forma analítica las funciones trigonométricas.

10.4.1.1. La función exponencial

Olvidemos de momento lo que sabemos de la función exponencial. Sabemos que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ tiene radio de convergencia $R=+\infty$ y, por tanto, su función suma está definida en todo $\mathbb{R}$.

10.36 Definición. La función $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada para todo $x\in\mathbb{R}$ por:

$$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Se llama *función exponencial*.

Como consecuencia del teorema de derivación para series de potencias, la función exponencial es derivable en todo punto $x\in\mathbb{R}$ y su derivada viene dada por:

$$\exp{}'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\exp(x).$$

Por tanto, la exponencial es una función que coincide con su derivada. Consideremos un número fijo $a\in\mathbb{R}$ y definamos para todo $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\exp(x+a)\exp(-x)$. Tenemos que:

$$f'(x)=\exp(x+a)\exp(-x)-\exp(x+a)\exp(-x)=0:$$

Por tanto f es constante en $\mathbb{R}$. Como $\exp(0)=1$, deducimos que $f(x)=f(0)=\exp(a)$. Hemos probado que $\exp(x+a)\exp(-x)=\exp(a)$. En particular, para $a=0$ será $\exp(x)\exp(-x)=1$ lo que implica que la función exponencial no se anula nunca y que $\exp(-x)=1/\exp(x)$. Por tanto, podemos escribir la igualdad antes obtenida en la forma $\exp(a+x)=\exp(a)\exp(x)$. Igualdad que es válida para todos $a,x\in\mathbb{R}$. Hemos probado así la propiedad aditiva de la exponencial.

Tenemos también que $\exp(x)=(\exp(x/2))^2>0$, por lo que la función exponencial es siempre positiva. Como coindide con su derivada, deducimos que es una función estrictamente creciente. Como $\exp(1)>\exp(0)=1$ se tiene que $\exp(n)=(\exp(1))^n\to+\infty$ y $\exp(-n)=1/\exp(n)\to 0$. Deducimos que $\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0$ y $\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty$ y que la exponencial es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$.

Se define el número $\mathrm{e}=\exp(1)$. Es fácil probar, usando la propiedad aditiva de la exponencial, que $\exp(r)=(\exp(1))^r$ para todo número racional r, es decir $\exp(r)=\mathrm{e}^r$, por lo que se usa la notación $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.

Observa de qué forma tan elegante y cómoda hemos obtenido las propiedades principales de la función exponencial. Se define ahora la función logaritmo natural como la inversa de la función exponencial.

10.4.1.2. Las funciones trigonométricas

Olvidemos de momento lo que sabemos de las funciones trigonométricas. La serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ tiene radio de convergencia $R=+\infty$ y, por tanto, su función suma está definida en todo $\mathbb{R}$.

10.37 Definición. La función $\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Se llama *función seno.*

Como consecuencia del teorema de derivación para series de potencias, la función seno es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{sen}'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

La función derivada de la función seno se llama *función coseno* y es la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

El teorema de derivación permite probar enseguida que $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$. Además $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$.

Derivando ahora la función $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$ se obtiene que:

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Luego f es constante. Como $f(0) = 1$, concluimos que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo y definamos la función:

$$h(x) = \big(\cos(x+a) - (\cos x \cos a - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} a)\big)^2 + \big(\operatorname{sen}(x+a) - (\operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a)\big)^2.$$

Puedes comprobar en dos líneas que $h'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $h(0) = 0$, se sigue que $h(x) = 0$ lo que implica que:

$$\cos(x+a) = \cos x \cos a - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} a, \qquad \operatorname{sen}(x+a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a.$$

Igualdades que son válidas para todos $x, a \in \mathbb{R}$. Acabamos de probar los teoremas de adición para el seno y el coseno.

Este estudio puede proseguirse y no está exento de algunas dificultades. Por ejemplo, hay que definir el número π y probar que las funciones seno y coseno son periódicas con período 2π. Esto puede hacerse como sigue. Tenemos que:

$$1 - \cos 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}}{(2n)!}.$$

Esta serie es una serie alternada cuyo término general es decreciente y, por tanto, por la acotación (9.11), se verifica que la suma de la serie es mayor que las sumas parciales pares, en particular:

$$1 - \cos 2 > \frac{4}{2!} - \frac{16}{4!} \quad \longrightarrow \quad \cos 2 < -\frac{1}{3}.$$

Como $\cos(0) = 1$ por el teorema de Bolzano hay un mínimo número $0 < s_0 < 2$ tal que $\cos(s_0) = 0$. Por tanto $0 < \cos x$ para $0 \leqslant x < s_0$. Definimos:

$$\pi = 2s_0.$$

Como $\cos(\pi/2) = 0$ deducimos que $\operatorname{sen}(s_0) = \pm 1$, pero como $\operatorname{sen}'(x) = \cos x$, se sigue que la función seno es creciente en $[0, s_0]$ y, como $\operatorname{sen}(0) = 0$, resulta que debe ser $\operatorname{sen}(s_0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Usando ahora los teoremas de adición se obtiene fácilmente que:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\pi) = 2\operatorname{sen}(\pi/2)\cos(\pi/2) = 0, & \cos(\pi) = \cos^2(\pi/2) - \operatorname{sen}^2(\pi/2) = -1 \\ \operatorname{sen}(2\pi) = 2\cos(\pi)\operatorname{sen}(\pi) = 0, & \cos(2\pi) = \cos^2(\pi) - \operatorname{sen}^2(\pi) = 1. \end{array}$$

Deducimos que:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \cos(2\pi) + \cos x \operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen} x,$$

lo que prueba que la función seno es periódica con período 2π. Lo que implica que su derivada, la función coseno, también es periódica con igual período.

A partir de las funciones seno y coseno ya podemos definir todas las demás funciones trigonométricas como lo hicimos en el capítulo 2. Tú mismo puedes completar este estudio.

La definición de las funciones exponencial y trigonométricas por medio de series de potencias tiene, desde un punto de vista matemático, todas las ventajas posibles pues las definiciones dadas prueban la existencia de dichas funciones y permiten obtener con comodidad sus propiedades principales. Además, y esto es fundamental, dichas definiciones se extienden exactamente igual al campo complejo porque las series de potencias reales y complejas tienen las mismas propiedades de convergencia. Esto no quiere decir, ni mucho menos, que debas olvidar el significado de las funciones seno y coseno de la trigonometría elemental. Simplemente, debes saber que las funciones seno y coseno analíticas tal como las acabamos de definir, y las funciones seno y coseno de la trigonometría elemental tal como se definen para ángulos de un triángulo rectángulo, son funciones que se relacionan a través del concepto de “medida de un ángulo”, y en cada situación concreta debes adoptar el punto de vista más adecuado a la misma.

10.5. Teorema de aproximación de Weierstrass

Muchas funciones continuas no son derivables, es claro que dichas funciones no pueden representarse por medio de series de potencias. Por otra parte, dado un conjunto finito de puntos en el plano, $\{(x_k, y_k) : 1 \leqslant k \leqslant n\}$, es fácil construir una función polinómica P que interpole dichos puntos, es decir, cuya gráfica pase por todos ellos, $P(x_k) = y_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$. Dada una función continua en un intervalo $[a, b]$, parece intuitivo que si tomamos una partición de $[a, b]$ con un número suficientemente grande de puntos, $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$, y es P una función polinómica que interpola los correspondientes puntos en la gráfica de f, esto es los puntos del conjunto $\{(x_k, f(x_k)) : 1 \leqslant k \leqslant n\}$, entonces dicha función polinómica P coincide con f en todos los puntos x_k y debería ser una buena aproximación de la función f en todo el intervalo $[a, b]$.

Aunque las cosas no son exactamente así, un notable resultado debido a Weierstrass afirma que, efectivamente, es posible aproximar uniformemente en un intervalo cerrado y acotado

una función continua por una función polinómica. Pero no debes hacerte una idea falsa de la situación. Las cosas no son tan simples como pudieran parecer a primera vista. Ello se debe a que una función continua puede oscilar demasiado, de hecho puede oscilar tanto que no sea derivable en ningún punto. El primer ejemplo de una función continua que no es derivable en ningún punto (¿puedes imaginar la gráfica de una función así?) fue dado por Weierstrass en 1872. Su función era:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n\pi x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

donde a es un número impar, $0<b<1$ y $ab>1+3\pi/2$. Observa que f está definida como la suma de una serie de funciones continuas (¡de clase C^∞!) que converge absolutamente y uniformemente en $\mathbb{R}$ (porque para todo $x\in\mathbb{R}$ es $|b^n\cos(a^n\pi x)|\leqslant b^n$ y la serie $\sum b^n$ converge por ser $0<b<1$). Por tanto, f es una función continua en $\mathbb{R}$. Weierstrass demostró que f no es derivable en ningún punto. Te digo esto para que aprecies que el problema de aproximar una función continua por una función polinómica en todos los puntos de un intervalo no es un fácil problema de interpolación.

De las variadas demostraciones que hay del citado resultado de Weierstrass, vamos a exponer la basada en los polinomios de Bernstein porque, además de ser la más elemental, proporciona unos polinomios concretos para realizar la deseada aproximación.

10.38 Definición. Dada una función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ el polinomio de Bernstein de orden n de f es la función polinómica:

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Necesitaremos usar algunas identidades que se deducen fácilmente de la igualdad siguiente.

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

Derivando esta igualdad una vez respecto a x y multiplicando después por x obtenemos:

$$xn(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k y^{n-k}.$$

Derivando la primera igualdad dos veces respecto a x y multiplicando después por x^2 obtenemos:

$$x^2n(n-1)(x+y)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^k y^{n-k}.$$

Haciendo en las anteriores igualdades $y=1-x$ y definiendo, por comodidad de notación,

$b_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, obtenemos las siguientes igualdades:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} b_k^n(x) \tag{10.12}$$

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k b_k^n(x) \tag{10.13}$$

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) b_k^n(x) \tag{10.14}$$

Usando estas igualdades deducimos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 b_n^k(x) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 b_n^k(x) - 2nx\sum_{k=0}^{n} k b_n^k(x) + n^2x^2\sum_{k=0}^{n} b_n^k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k) b_n^k(x) - 2n^2x^2 + n^2x^2 = \\ &= n(n-1)x^2 + nx - n^2x^2 = nx(1-x).\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 b_n^k(x) = nx(1-x). \tag{10.15}$$

10.39 Teorema (Weierstrass (1868)). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Dado $\varepsilon > 0$, hay una función polinómica P_ε que verifica que*

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demostración. Haremos primero la demostración en el caso de que el intervalo $[a,b]$ es el intervalo $[0,1]$. Como f es continua y $[0,1]$ es un intervalo cerrado y acotado, sabemos que f está acotada en $[0,1]$ y es uniformemente continua en $[0,1]$. Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todos } x, y \in [0,1] \text{ tales que } |x-y| < \delta. \tag{10.16}$$

Acotaremos ahora el error que se comete al aproximar f por su polinomio de Bernstein de orden n. Tenemos que:

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_n^k(x)\right| \overset{(10.12)}{=} \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) b_n^k(x)\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| b_n^k(x).\end{aligned} \tag{10.17}$$

Donde hemos usado que $b_n^k(x) \geqslant 0$. Acotaremos ahora la diferencia $f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)$ según que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta$ o $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \delta$. Tenemos que:

$$\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta \overset{(10.16)}{\longrightarrow} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \delta \longrightarrow \frac{|nx-k|}{n\delta} \geqslant 1 \longrightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant 2M \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2}(nx-k)^2$$

Podemos resumir las dos acotaciones obtenidas en una sola de la forma:

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2}(nx-k)^2. \tag{10.18}$$

Esta desigualdad es válida para todo $x \in [0,1]$ y para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Usando ahora (10.17),deducimos que:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2}(nx-k)^2\right) b_n^k(x) \overset{(10.12)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 b_n^k(x) =$$

$$\overset{(10.15)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2} nx(1-x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2}.$$

Donde hemos tenido en cuenta que para $x \in [0,1]$ es $x(1-x) \leqslant 1$. Hemos probado así que para todo $x \in [0,1]$ se verifica que:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2}.$$

Tomando ahora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ se verifique que $\frac{2M}{n\delta^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, concluimos que para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in [0,1]$ se verifica que:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podemos tomar como polinomio P_ε del enunciado cualquier polinomio $B_n(f)$ con $n \geqslant n_0$.

Observa que hemos probado que la sucesión de polinomios de Bernstein de f converge uniformemente a f en $[0,1]$.

En el caso general de un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, podemos proceder como sigue. Consideremos la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(a + t(b-a))$ para todo $t \in [0,1]$. La función g es continua en $[0,1]$ por ser f continua en $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, por la ya probado, hay un polinomio de Bernstein de g, $B_n(g)$, tal que para todo $t \in [0,1]$ es:

$$|g(t) - B_n(g)(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Teniendo ahora en cuenta que para $x \in [a,b]$ se tiene que $\frac{x-a}{b-a} \in [0,1]$, deducimos que para todo $x \in [a,b]$ se verifica que:

$$\left| g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Puesto que $f(x) = g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$, y $P_\varepsilon(x) = B_n(g)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ es un polinomio por ser composición de dos polinomios, obtenemos que para todo $x \in [a,b]$ es $|f(x) - P_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$. □

El polinomio

$$B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}$$

es, por definición, el polinomio de Bernstein de orden n de f en $[a,b]$. Hemos probado que la sucesión de dichos polinomios converge uniformemente a f en $[a,b]$.

10.40 Corolario. *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es límite uniforme en dicho intervalo de una sucesión de funciones polinómicas.*

10.5.1. Ejercicios propuestos

---

469. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,+\infty[$ donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \geqslant 0$ por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}.$$

470. Estudia la convergencia uniforme en $[0,1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para $x \in]0,1]$ por $f_n(x) = x^n \log(1/x)$, y $f_n(0) = 0$.

471. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0,1]$ por:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n.$$

¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0,1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho,1]$, donde $0 < \rho < 1$?

472. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0,a]$ y $[a,\pi/2]$ donde $0 < a < \pi/2$.

473. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x} \qquad 0 < x < \pi.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

474. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

475. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$ donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por $f_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

476. Estudia la convergencia uniforme en $\mathbb{R}^+_o$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}^+_o$ por:

$$f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right).$$

477. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(x) = \frac{x}{n^a(1 + nx^2)} \qquad (x \geqslant 0).$$

Prueba que la serie $\sum f_n$:

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}^+_o$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}^+_o$ si $a > 1/2$.

478. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sea $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, la función suma de la serie. Calcula $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F(x)$ y $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x)$.

Sugerencia. Para $x > 0$ se tiene que

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{1 + t^2x^2}\, dt \leqslant f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{x}{1 + k^2x^2}\, dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{x}{1 + t^2x^2}\, dt.$$

479. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n \, e^{-nx} \quad (x \geqslant 0).$$

480. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar la convergencia puntual en Ω de la sucesión de funciones, $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los conjuntos $A \subset \Omega$ que se indican en cada caso.

a) $\Omega =]0, \frac{\pi}{2}[,\ \ f_n(x) = n^2(\operatorname{tg} x)^n(1 + \cos 4x),\ A = [0, a],\ A = [a, \frac{\pi}{4}],\ 0 < a < \frac{\pi}{4}.$

b) $\Omega = \mathbb{R}^+,\ \ f_n(x) = n\big(\sqrt[n]{x} - 1\big),\ A = [a, b],\ A =]0, a],\ A = [b, +\infty[,\ 0 < a < b.$

c) $\Omega = \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n,\ A = [a, b],\ a < b.$

d) $\Omega =] - 1, +\infty[,\ \ f_n(x) = n\log\left(1 + \dfrac{x}{n}\right),\ A =] - 1, a],\ A = [a, +\infty[,\ a > -1.$

e) $\Omega = \mathbb{R}^+_o,\ f_n(x) = n^\alpha x\,\mathrm{e}^{-nx}$ (donde $\alpha > 0$ es un número fijo), $A = [a, +\infty[,\ a > 0.$ ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}^+_o$?

481. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Supongamos que $f_n(A) \subset [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$; y sea φ una función continua en $[a, b]$. Prueba que la sucesión $\{\varphi \circ f_n\}$ converge uniformemente a $\varphi \circ f$ en A.

482. Sean $\alpha > 0$ y $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida por:

$$f_n : \mathbb{R}^+_o \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(x) = \left(\frac{1 + nx}{n + x^2}\right)^\alpha.$$

Estudia la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}^+_o$ y en intervalos del tipo $[0, a]$ donde $a > 0$.

Sugerencia. Puede usarse el ejercicio anterior con $\varphi(x) = x^\alpha$.

483. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en intervalos cerrados y acotados.

484. Sea $f : \mathbb{R}^+_o \to \mathbb{R}$ una función continua, no idénticamente nula con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ las sucesiones de funciones definidas por $f_n(x) = f(nx)$, $g_n(x) = f(x/n)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+_o$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que:

a) $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente a cero en $\mathbb{R}^+_o$ pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}^+_o$.

b) La sucesión $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}^+_o$.

485. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 e $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado.

a) Prueba que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cualesquiera sean $x, y \in I$ con $0 < |x - y| < \delta$ se verifica que $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(y)\right| \leqslant \varepsilon$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Justifica que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' en I.

486. Sea $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ una función no constante y continua en $x = 0$. Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = g(x^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in]-1,1[$. Prueba que dicha sucesión converge uniformemente en intervalos cerrados y acotados contenidos en $]-1,1[$, y no converge uniformemente en $]-1,1[$.

487. Supongamos que una sucesión de funciones polinómicas converge uniformemente en $\mathbb{R}$. ¿Qué puede decirse de dicha sucesión?

Sugerencia: La condición de Cauchy puede ser útil.

488. Prueba que la función límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones uniformemente continuas también es una función uniformemente continua.

489. Prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^3 \dfrac{n + \operatorname{sen} x}{3n + \cos^2 x}\, dx = 1$.

490. Supongamos que f es una función continua en $[a,b]$ y que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que:

$$\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0.$$

Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Sugerencia: Usa el teorema de aproximación de Weierstrass.

490. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0,1 \to \mathbb{R}$ la función definida para todo $x \in [0,1]$ por:

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{n} e^{-x} \cos x \log(x+n)$.
2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} e^{-x^2}$.
3. $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \cos x^2$.
4. $f_n(x) = \begin{cases} n \operatorname{sen}(nx) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

Estudia, en cada caso, la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ y compara $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} \{f_n\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$.

491. Da un ejemplo de una sucesión de funciones que converge uniformemente en $\mathbb{R}$ tal que la sucesión de las derivadas no converge puntualmente en ningún punto de $\mathbb{R}$.

492. Da un ejemplo de una sucesión de funciones que no converge en ningún punto de $\mathbb{R}$ y cuya sucesión de derivadas converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

493. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}(x/n)$. Prueba que:

a) $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}$ pero la convergencia no es uniforme.

b) $\{f_n'\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$.

494. Sea $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$. Prueba que la serie $\sum f_n$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^+$. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función suma de la serie: $f(x) = \sum\limits_{n}^{\infty} f_n(x)$.

495. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en un intervalo $[a, +\infty[$. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$. Prueba que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y que f tiene límite en $+\infty$, siendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\}$.

Sugerencia. La condición de Cauchy permite probar la convergencia de $\{a_n\}$.

496. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función f en un intervalo $[a, b[$, $(a < b \leqslant +\infty)$, siendo la convergencia uniforme en todo subintervalo cerrado y acotado contenido en $[a, b[$. Supongamos, además, que hay una función positiva g cuya integral es convergente en $[a, b[$ y tal que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b[$. Prueba que las integrales de f_n y f son convergentes en $[a, b[$ y que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

497. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - x^2/n\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x \geqslant \sqrt{n} \end{cases}$$

a) Demuestra, haciendo uso del ejercicio anterior, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Pruébese que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} t)^{2n+1} \mathrm{d}t$, y deduce que:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

498. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función f en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A que converge a un punto $x \in A$. Prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

499. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en Ω de la serie de funciones, $\sum f_n$, y la continuidad de la función suma $F = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

a) $\Omega = \mathbb{R},\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$.

b) $\Omega = \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x^2+n}$.

c) $\Omega = \mathbb{R},\ f_n(x) = (-1)^n \dfrac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n(\log(n+1))^2}$.

d) $\Omega = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 - x^2}$.

e) $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ f_n(x) = \dfrac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}$.

f) $\Omega = \mathbb{R}_o^+,\ f_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)(1+nx+x)}$.

500. Estudia la derivabilidad de la función de Riemann $\varsigma :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida para todo $x > 1$ por:

$$\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Justifica también que $\lim\limits_{x\to 1} \varsigma(x) = +\infty$.

501. Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}_o^+).$$

Estudia la derivabilidad de f y justifica que para todo $x > 0$ es:

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}}.$$

Prueba que f es continua en $\mathbb{R}_o^+$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, y $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$. Deduce que f no es derivable en 0.

502. Sea $\sum f_n$ una serie de funciones que converge uniformemente en un conjunto A. Sea $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Prueba que para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A se verifica que la sucesión $\{F_{2n}(x_n) - F_n(x_n)\}$ converge a cero.

503. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar, haciendo uso de los criterios de Dirichlet o de Abel, la convergencia puntual y uniforme en Ω de la serie de funciones $\sum f_n$.

a) $\Omega = \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$.

b) $\Omega = [2, +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

c) $\Omega = [0, \pi],\ f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$.

d) $\Omega = \mathbb{R}, \;\; f_n(x) = \big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\big)\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$.

e) $\Omega = [-2\pi, 2\pi], \;\; f_n(x) = \dfrac{x \operatorname{sen}(nx)}{2\sqrt{n} + \cos x}$.

f) $\Omega = [0,1], \;\; f_n(x) = \dfrac{(1-x)x^n}{\log(n+1)}$. Sea $a_n = \sup f_n([0,1])$. Pruébese que la serie $\sum a_n$ no converge.

g) $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \;\; f_n(x) = a_n \dfrac{x^n}{1+x^n}$, donde la serie $\sum a_n$ converge.

504. Prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{x}{n}$ converge uniformemente en subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Sugerencia. La condición uniforme de Cauchy no se satisface en $\mathbb{R}$. Téngase en cuenta que $\operatorname{sen} x \geqslant \sqrt{2}/2$ para $\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$. También puede hacerse uso del ejercicio 502 con $x_n = n\pi/2$.

505. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente y no mayorada de números reales positivos. Prueba que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \mathrm{e}^{-a_n x}$$

es continua y:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}.$$

Aplica lo anterior a los casos particulares $a_n = n+1$, y $a_n = 2n+1$ para obtener las igualdades:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

506. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(x) = \dfrac{x}{n^a(1+nx^2)}$ $(x \in \mathbb{R})$. Prueba que la serie $\sum f_n$:

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si $a > 1/2$.

c) No converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si $0 < a \leqslant 1/2$.

Sugerencia. Estudia el comportamiento de f_n. Para el apartado c) puede usarse el ejercicio 502.

507. Prueba que si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos y $\sum a_n \operatorname{sen}(nx)$ converge uniformemente en $[0, 2\pi]$, entonces la sucesión $\{na_n\}$ converge a cero.

Sugerencia. Usar el ejercicio 502, tomando $x_n = \dfrac{\pi}{4n}$.

508. Prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y calcula su suma. Calcula también $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\,.$

509. Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias $\sum a_n x^n$, y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll}
c_n=\dfrac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1}, & c_n=(n+1)^{\log(n+1)}, & c_n=\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \\
c_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}, & c_n=a^{\sqrt{n}}\ (a>0), & c_n=\dfrac{n!}{(n+1)^n} \\
c_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, & c_n=\dfrac{1}{2^n(n+1)}, & c_n=\dfrac{1}{\log(n+2)} \\
c_n=\dfrac{3\cdot 5\cdots(3n+1)}{5\cdot 10\cdots(5n)}, & c_n=n^{\alpha},\ \ (\alpha\in\mathbb{R}), & c_n=\dfrac{1}{1+1/2+\cdots+1/n}
\end{array}$$

510. Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}.$

511. Calcula la función suma de las series de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n}$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n(x+3)^n}{2^n}.$

512. Dado un número natural $q\in\mathbb{N}$, prueba la igualdad

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}.$$

Calcula el valor de la suma de las series correspondientes a los valores de $q=1,2,3$.

513. Expresa la función suma de las series de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}nx^{n-1}$, y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}.$

514. Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n;\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}x^n;\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n.$$

515. Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(2n+1)}$ y deduce el valor de las sumas de las series:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n+1)}\quad\text{y}\quad\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}.$$

516. Prueba que las funciones definidas por:

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\; g(0)=1, \qquad f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x},\; f(0)=1$$
$$h(x)=\frac{\cos x-1}{x^2},\; h(0)=-1/2, \quad \varphi(x)=\frac{\log(1+x)}{x},\; \varphi(0)=1$$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

517. Prueba que la función $f:]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\frac{x}{\operatorname{sen} x-x}\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \qquad f(0)=1,$$

es de clase C^∞. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1-\frac{1}{12}x^2}{x^4}$.

518. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en un punto a de la función:

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2+2x-7}{x^4-x^3-3x^2+x+2}.$$

519. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en cero de las funciones:

$$\frac{1}{x^2+5x+6}, \qquad \frac{1+x}{(1+x^2)(1-x)^2}.$$

520. Representa la función $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$, como suma de una serie de potencias centrada en 0. Utiliza dicha serie para calcular $\log 2$ con ocho cifras decimales exactas.

521. Prueba que:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\frac{(-1)^n}{2n}+\cdots=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

Sugerencia. Considera la serie de potencias:

$$x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}+\frac{(-1)^n}{2n}x^{2n}+\cdots$$

522. Justifica que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$, donde para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ es:

$$a_{3n+1}=\frac{1}{3n+1},\; a_{3n+2}=0,\; a_{3n+3}=\frac{-1}{3n+3},$$

converge en $]-1,1[$. Sea f la función suma de dicha serie. Calcula la derivada de f, y deduce que para todo $x\in]-1,1[$ es:

$$f(x)=\frac{1}{2}\log(1+x+x^2)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Como aplicación calcula el valor de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(3n+1)(3n+3)}$.

523. Expresa como suma de una serie de potencias centrada en cero la función:

$$f(x)=\frac{1}{3}\log\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$.

Sugerencia. Deriva la función dada.

524. Calcula explícitamente el valor de a_n, n= 0,1,2,... sabiendo que se verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n,\quad a_0=1,\ a_1=-3.$$

10.41 Estrategia. Las relaciones de recurrencia como la anterior, también llamadas "ecuaciones en diferencias finitas", se pueden resolver a veces por el método de la *función generatriz*. Se llama así a la función $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. El proceso a seguir es el siguiente:

1. Haciendo uso de la relación de recurrencia dada se puede calcular la función generatriz *sin conocer el valor de* a_n.
2. Una vez conocida la función generatriz se obtiene su desarrollo en serie de potencias centrado en cero.

525. Resolver por el método de la función generatriz las siguientes ecuaciones en diferencias finitas:

1. $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n,\ \ n=0,1,2,\dots\quad a_0=2,\ a_1=5.$
2. $b_{n+2}=b_{n+1}+b_n,\ \ n=1,2,\dots\quad b_1=1,\ b_2=1.$

526. ¿Para qué números reales α se verifica que $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\leqslant \mathrm{e}^{\alpha x^2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$?

Sugerencia. Expresa dicha desigualdad usando series de potencias.

527. Justifica que para $-1\leqslant x<1$ se verifica que:

$$\int_0^x\log\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Prueba también, ya sea por cálculo directo o por razones de continuidad, que dicha igualdad es válida para $x=1$.

528. Justifica que para $-1<x<1$ se verifica la igualdad:

$$\int_0^x\frac{1}{t}\log\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

¿Es dicha igualdad válida para $x=1$?

529. Definamos $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt\,.$$

Prueba que:

a) $f(0)=\pi/4$, y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b) Usando un desarrollo en serie para f, prueba que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y:

$$f'(x)=-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt\,.$$

c) Justifica que para todo $x\geqslant 0$ se verifica que:

$$f(x)+\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2=\frac{\pi}{4}.$$

d) Deduce de lo anterior que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

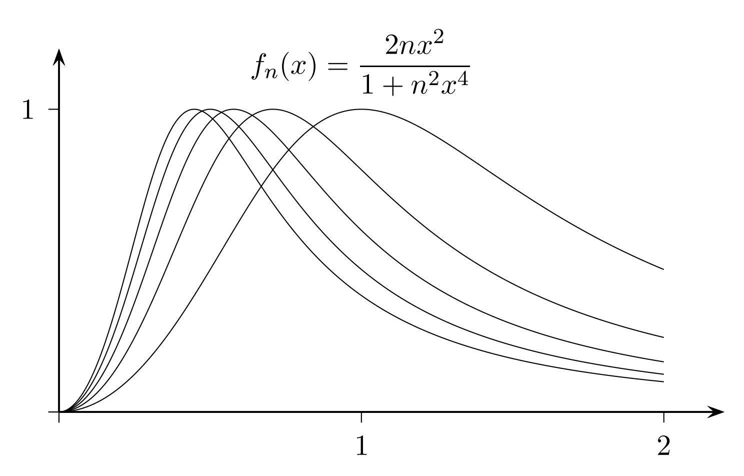
10.5.2. Ejercicios resueltos

¡Antes de ver la solución de un ejercicio debes intentar resolverlo!

Ejercicio resuelto **244** Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,+\infty[$ donde $a>0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x\geqslant 0$ por:

$$f_n(x)=\frac{2nx^2}{1+n^2x^4}.$$

Solución. Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Como $f_n'(x)=4nx\dfrac{1-n^2x^4}{(1+n^2x^4)^2}$, tenemos que $f_n'(1/\sqrt{n})=0$, $f_n'(x)>0$ para $0<x<1/\sqrt{n}$ y $f_n'(x)<0$ para $x>1/\sqrt{n}$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0,1/\sqrt{n}]$ y estrictamente decreciente en $[1/\sqrt{n},+\infty[$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $\mathbb{R}_o^+$ en el punto $x_n=1/\sqrt{n}$.



Dado un número $a > 0$ sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < a$, y por tanto:

$$\text{máx}\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} = f_n(x_n) = 1, \quad \text{máx}\{f_n(x) : x \geqslant a\} = f_n(a)$$

Como $\text{lím}\{f_n(a)\} = 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, +\infty[$ pero, evidentemente, no converge uniformemente en $[0, a]$. ☺

Ejercicio resuelto **245** Estudia la convergencia uniforme en $[0, 1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para $x \in]0, 1]$ por $f_n(x) = x^n \log(1/x)$, y $f_n(0) = 0$.

Solución. Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$. Como $f_n'(x) = -\big(n \log x + 1\big)x^{n-1}$ tenemos que $f_n'(x) = 0$ si, y sólo si, $\log x = -1/n$, es decir, $x = \mathrm{e}^{-1/n}$. Además $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < \mathrm{e}^{-1/n}$ y $f_n'(x) < 0$ para $\mathrm{e}^{-1/n} < x \leqslant 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $]0, \mathrm{e}^{-1/n}]$ y estrictamente decreciente en $[\mathrm{e}^{-1/n}, 1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0, 1]$ en el punto $x_n = \mathrm{e}^{-1/n}$. Por tanto:

$$\text{máx}\{f_n(x) : x \in]0, 1]\} = f_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{n}$$

y, deducimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$. ☺

Ejercicio resuelto **246** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0, 1]$ por:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n.$$

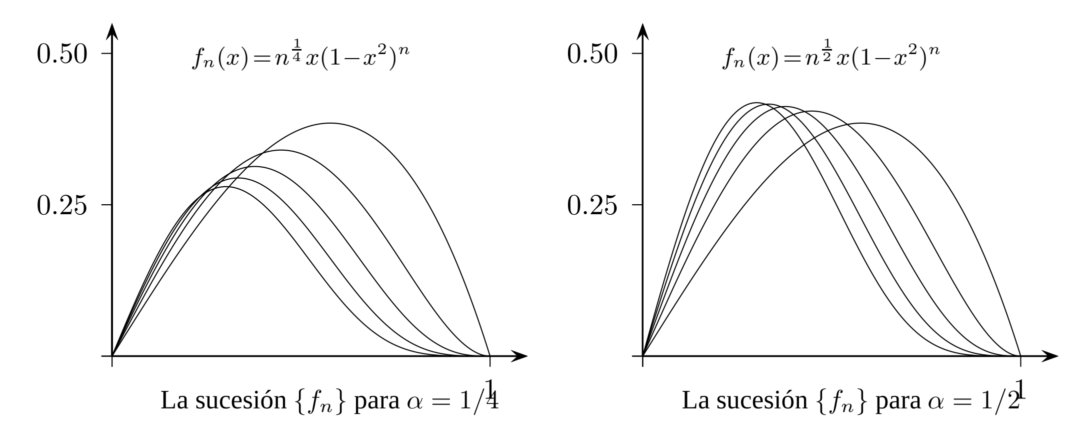
¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0, 1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $0 < \rho < 1$?

Solución. Observa que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ y, si $0 < x < 1$, la sucesión $\{n^\alpha(1 - x^2)^n\}$ es de la forma $\{n^\alpha \lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$. Por tanto, en el intervalo $[0, 1]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero.

Tenemos que

$$f_n'(x) = n^\alpha(1 - x^2)^{n-1}(1 - (1 + 2n)x^2)$$

Pongamos $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$. Entonces $f_n'(x_n) = 0$, $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < x_n$ y $f_n'(x) < 0$ para $x_n < x < 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0, x_n]$ y estrictamente decreciente en $[x_n, 1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0,1]$ en el punto x_n.



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/4$ La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/2$

Como

$$f_n(x_n) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

se deduce que $\lim\{f_n(x_n)\} = 0$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$. Pot tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$.

Dado $0 < \rho < 1$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < \rho$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < \rho$ y por tanto $\max\{f_n(x) : \rho \leqslant x \leqslant 1\} = f_n(\rho) \to 0$ por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, 1]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio resuelto **247** Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0, a]$ y $[a, \pi/2]$ donde $0 < a < \pi/2$.

Solución. Es claro que $f_n(0) = f_n(\pi/2) = 0$ y para $0 < x < \pi/2$ la sucesión $\{n(\cos x)^n\}$ es de la forma $\{n\lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$. Por tanto, en el intervalo $[0, \pi/2]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [0, \pi/2]$.

Intentemos calcular el máximo absoluto de $f_n(x)$ en $[0, \pi/2]$. Tenemos que:

$$f_n'(x) = n(\cos x)^{n-1}(\cos^2(x) - n\operatorname{sen}^2(x)).$$

Sea $x_n \in]0, \pi/2[$ tal que $\cos^2(x_n) - n\operatorname{sen}^2(x_n) = 0$. Como f_n es positiva y se anula en los extremos del intervalo, es evidente que f_n alcanza su mayor valor en $[0, \pi/2]$ en el punto x_n. Observa que $x_n = \sqrt{\operatorname{arc\,tg}(1/n)} \to 0$.

Tenemos que:

$$f_n(x_n) = n(\cos(x_n))^n \operatorname{sen}(x_n).$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión no es del todo inmediato. Pongamos $f_n(x_n) = y_n z_n$ donde $y_n = n\,\mathrm{sen}(x_n)$, $z_n = (\cos(x_n))^n$. Entonces:

$$y_n = n x_n \frac{\mathrm{sen}(x_n)}{x_n} = \sqrt{n}\sqrt{n \operatorname{arc\,tg}(1/n)}\frac{\mathrm{sen}(x_n)}{x_n},$$

y como $\dfrac{\mathrm{sen}(x_n)}{x_n} \to 1$ y $n \operatorname{arc\,tg}(1/n) \to 1$, se sigue que $y_n \to +\infty$ (de hecho, se tiene que y_n es asintóticamente equivalente a $\sqrt{n}$, esto es, $y_n \sim \sqrt{n}$).

Por otra parte, tenemos que:

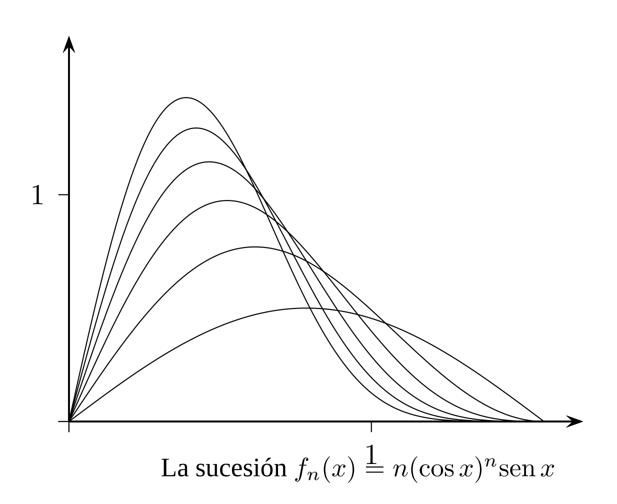
$$\log(z_n) = n\log(\cos x_n) \sim n(\cos(x_n) - 1) \sim n\frac{-1}{2}x_n^2 = \frac{-1}{2} n \operatorname{arc\,tg}(1/n) \to \frac{-1}{2}.$$

Por tanto $z_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$. Deducimos así que $f_n(x_n) = y_n z_n \to +\infty$.

Dado un número $0 < a < \pi/2$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < a$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es:

$$\max\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} = f_n(x_n) \quad \max\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant \pi/2\} = f_n(a).$$

Como $\{f_n(x_n)\}$ no converge a 0 se sigue que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, a]$. Como $\{f_n(a)\} \to 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, \pi/2]$.



La sucesión $f_n(x) = n(\cos x)^n \mathrm{sen}\, x$

Hagamos este mismo ejercicio sin calcular el valor máximo de f_n, acotando de forma conveniente.

Lo primero que nos damos cuenta es de que es muy fácil probar que hay convergencia uniforme en $[a, \pi/2]$, pues como la función coseno es decreciente en $[0, \pi/2]$ y $\mathrm{sen}\, x \leqslant 1$, se tiene que:

$$0 \leqslant f_n(x) = n(\cos x)^n \mathrm{sen}\, x \leqslant n(\cos a)^n$$

para todo $x \in [a, \pi/2]$. Puesto que la sucesión $\{n(\cos a)^n\} \to 0$ (es de la forma $n\lambda^n$ con $0 < \lambda < 1$) concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, \pi/2]$.

La situación es distinta en el intervalo $[0,a]$. Podemos sospechar que no hay convergencia uniforme en dicho intervalo. Para ello, tomemos $u_n = 1/n$. Tenemos que:

$$f_n(1/n) = n\operatorname{sen}(1/n)(\cos(1/n))^n,$$

y como $\{n\operatorname{sen}(1/n)\} \to 1$ y

$$\text{lím}\left\{(\cos(1/n))^n\right\} = \exp\left(\text{lím}\left\{n(\cos(1/n)-1)\right\}\right) = \exp(0) = 1,$$

obtenemos que $\{f_n(1/n)\} \to 1$. Como, para todo $n > 1/a$ se verifica que $0 < 1/n < a$, resulta que:

$$\text{máx}\left\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\right\} \geqslant f_n(1/n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[0,a]$. ☺

Ejercicio resuelto **248** Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n\operatorname{sen} x} \qquad 0 < x < \pi.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0,a]$, $[a,\pi[$ y $[a,b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

Solución. Evidentemente $\text{lím}\{f_n(x)\} = 0$. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]0,\pi[$. Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo de la forma $]0,a]$ tomemos $x_n = 1/n$. Como

$$f_n(1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(1)}{n\operatorname{sen}(1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $]0,a]$.

Análogamente, como

$$f_n(\pi - 1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi - 1)}{n\operatorname{sen}(\pi - 1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1),$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $[a,\pi[$.

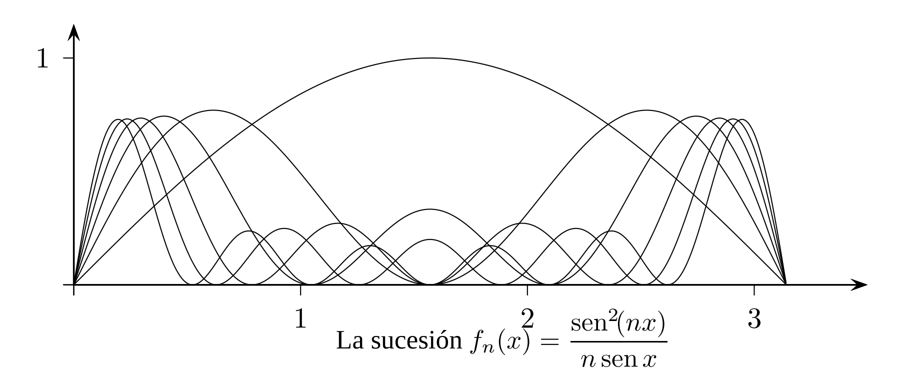
Finalmente, sea $0 < a < b < \pi$. Como $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in [a,b]$ y por el teorema de Weierstrass sabemos que tiene que haber un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que $\operatorname{sen} x_0 \leqslant \operatorname{sen} x$ para todo $x \in [a,b]$, deducimos que:

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n\operatorname{sen} x} \leqslant \frac{1}{n\operatorname{sen}(x_0)},$$

y por tanto:

$$\text{máx}\left\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant b\right\} \leqslant \frac{1}{n\operatorname{sen}(x_0)}.$$

Ya que, evidentemente, $\{1/n\operatorname{sen}(x_0)\} \to 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a,b]$.



La sucesión $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$

Ejercicio resuelto 249 Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Solución. Para calcular la función límite puntual hay que distinguir dos casos:

- Si $|x| < 1$, entonces $1 \leqslant \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \leqslant 1 + x^{2n}$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\} = 1$.
- Si $|x| \geqslant 1$, entonces $x^2 \leqslant \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \leqslant 2^{1/n}x^2$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\} = x^2$.

La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ x^2, & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

- Si $|x| < 1$ es:

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1 \leqslant 2^{1/n} - 1.$$

- Si $|x| \geqslant 1$ es:

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - x^2 = x^2\left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1\right). \tag{10.19}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(t) = \sqrt[n]{1+t}$ en el intervalo $[0, s]$ obtenemos que $\dfrac{h(s) - h(0)}{s} = h'(c)$ donde c es algún punto del intervalo $]0, s[$. Como:

$$h'(c) = \frac{1}{n}(1+c)^{1/n-1} \leqslant \frac{1}{n},$$

se sigue que $h(s) - h(0) = sh'(c) \leqslant \dfrac{s}{n}$. Tomando $s = \dfrac{1}{x^{2n}}$ resulta que

$$\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1 = h(1/x^{2n}) - h(0) \leqslant \frac{1}{nx^{2n}} \leqslant \frac{1}{nx^2}$$

Deducimos ahora de (10.19) que $0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Finalmente:

$$\max\{|f_n(x)-f(x)| : x\in\mathbb{R}\} \leqslant \max\left\{2^{1/n}-1, \frac{1}{n}\right\} \to 0$$

y concluimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Observa que, aunque la convergencia es uniforme y todas las funciones f_n son derivables en $\mathbb{R}$, la función límite, f, no es derivable en $x=1$. ☺

Ejercicio resuelto 250 Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty,-a]$, $[-a,a]$ y $[a,+\infty[$ donde $a>0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por $f_n(x)=n\,\operatorname{sen}(x/n)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Solución. Definamos la función

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \varphi(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad (t\neq 0), \quad \varphi(0)=1$$

Con ello, tenemos que $f_n(x)=x\varphi(x/n)$ y, como $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=1$, deducimos que la función límite puntual de la sucesión viene dada por:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=x \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Dado $a>0$, es fácil comprobar que no hay convergencia uniforme en $[a,+\infty[$, pues para todo $n\geqslant a$ se tiene que:

$$\max\{|f(x)-f_n(x)| : x\geqslant a\}\geqslant f(n)-f_n(n)=n(1-\operatorname{sen}(1))\to+\infty.$$

Análogamente se prueba que no hay convergencia uniforme en $]-\infty,-a]$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $[-a,a]$. Para todo $x\in[-a,a]$ tenemos que:

$$|f(x)-f_n(x)|=|x-x\varphi(x/n)|=|x||1-\varphi(x/n)|\leqslant a|1-\varphi(x/n)|.$$

Dado $\varepsilon>0$, sea $\delta>0$ tal que $|1-\varphi(t)|<\varepsilon/a$ siempre que $|t|<\delta$. Tomemos un número natural n_0 tal que $1/n_0<\delta/a$. Entonces, para todo $n\geqslant n_0$ y para todo $x\in[-a,a]$ se tiene que $|x/n|\leqslant a/n\leqslant a/n_0<\delta$, por lo que:

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant a|1-\varphi(x/n)|<\varepsilon,$$

y por tanto, para todo $n\geqslant n_0$ es $\max\{|f(x)-f_n(x)| : x\in[-a,a]\}<\varepsilon$. Hemos probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[-a,a]$. ☺

Ejercicio resuelto 251 Estudia la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x\in\mathbb{R}_o^+$ por:

$$f_n(x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n+x}{1+nx}\right).$$

Solución. Como $f_n(0)=\operatorname{arc\,tg} n$, y $\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} t=\pi/2$, la función límite viene dada por:

$$f(x)=\lim\{f_n(x)\}=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}(1/x), & \text{si } x>0\\ \pi/2, & \text{si } x=0\end{cases}$$

Observa que se trata de una función continua en $\mathbb{R}_o^+$. Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Para ello es conveniente conocer el signo de la función $f_n(x)-f(x)$. Teniendo en cuenta que la función arcotangente es inyectiva, se deduce que $f_n(x)-f(x)=0$ si, y sólo si, $(n+x)/(1+nx)=1/x$ lo que equivale a $x=1$ (la otra posibilidad $x=-1$ se descarta porque suponemos que $x>0$). En consecuencia, la función $f_n(x)-f(x)$ debe tener signo constante en cada intervalo $[0,1[$ y en $]1,+\infty[$. Como:

$$f_n(0)-f(0)=\operatorname{arc\,tg} n-\pi/2<0, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}(f_n(x)-f(x))=\operatorname{arc\,tg}(1/n)>0,$$

se sigue que $f_n(x)-f(x)<0$ para $x\in[0,1[$, y $f_n(x)-f(x)>0$ para $x>1$.

Estudiemos ahora la derivada de $f_n(x)-f(x)$. Un cálculo sencillo nos da:

$$f_n'(x)-f'(x)=2\frac{1+2nx+x^2}{(1+x^2)((1+n^2)x^2+4nx+1+n^2)}.$$

Por tanto $f_n'(x)-f'(x)>0$ para todo $x>0$. En consecuencia f_n-f es una función creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Como

$$|f_n(x)-f(x)|=\begin{cases} f(x)-f_n(x), & \text{si } x\in[0,1] \\ f_n(x)-f(x), & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

Resulta que la función $|f_n-f|$ es decreciente en $[0,1]$ y creciente en $[1,+\infty[$. Concluimos que

$$|f_n(x)-f(x)|=\begin{cases} f(x)-f_n(x)\leqslant f(0)-f_n(0)=\pi/2-\operatorname{arc\,tg} n, & \text{si } x\in[0,1] \\ f_n(x)-f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-f(x))=\operatorname{arc\,tg}(1/n), & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

Por tanto, *para todo* $x\geqslant 0$, es:

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\beta_n=\text{máx}\{\pi/2-\operatorname{arc\,tg} n,\operatorname{arc\,tg}(1/n)\},$$

y como $\{\beta_n\}\to 0$, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ☺

Ejercicio resuelto **252** Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea

$$f_n(x)=\frac{x}{n^a(1+nx^2)} \qquad (x\geqslant 0).$$

Prueba que la serie $\sum f_n$:

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a>0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a>1/2$.

Solución. a) Como se pide estudiar la convergencia en $\mathbb{R}_o^+$, consideraremos en lo que sigue que $x\geqslant 0$. La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n^a(1+nx^2)}$ es de términos positivos y, para $x>0$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+a}\frac{x}{n^a(1+nx^2)}=\frac{1}{x}.$$

Por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera), se sigue que la serie converge si, y sólo, si $1+a>1$, es decir $a>0$.

Estudiemos la convergencia uniforme en una semirrecta del tipo $[\rho,+\infty[$, $(\rho>0)$. Como:

$$f_n'(x)=\frac{1}{n^a}\frac{1-x^2n}{(1+nx^2)^2},$$

se deduce fácilmente que f_n es creciente en $[0,1/\sqrt{n}]$ y decreciente en $[1/\sqrt{n},+\infty[$. Sea $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $1/\sqrt{n_0}<\rho$. Para todo $n\geqslant n_0$ se tiene que $1/\sqrt{n}<\rho$ por lo que f_n es decreciente en $[\rho,+\infty[$ y, por tanto, $f_n(x)\leqslant f_n(\rho)$ para todo $x\geqslant\rho$. Puesto que, para $a>0$, la serie $\sum f_n(\rho)$ converge, se sigue, por el criterio de Weierstrass, que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho,+\infty[$.

b) Si $a>1/2$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(1/\sqrt{n})=\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{a+1/2}}$ es convergente (es una serie de Riemann con exponente $a+1/2>1$). Como para todo $x\geqslant 0$ se tiene que $f_n(x)\leqslant f_n(1/\sqrt{n})$, el criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ☺

Ejercicio resuelto **253** Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones $\sum f_n$ donde, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función dada por:

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}\qquad n=0,1,2,\dots$$

Sea $\displaystyle F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$, la función suma de la serie. Calcula $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}F(x)$ y $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)$.

Sugerencia. Para $x>0$ se tiene que

$$\int_k^{k+1}\frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t\leqslant f_k(x)=\int_k^{k+1}\frac{x}{1+k^2x^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t$$

Solución. Puesto que, para $x\neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}n^2\frac{|x|}{1+n^2x^2}=\frac{1}{|x|},$$

se sigue, por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera) que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{|x|}{1+n^2x^2}$ es convergente. También converge, evidentemente, para $x=0$.

Para estudiar la convergencia uniforme veamos qué información nos da el criterio de Weierstrass. Tenemos que:

$$f_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Deducimos que f_n es creciente en $[0,1/n]$ y decreciente en $[1/n,+\infty[$. Como $f_n(-x)=-f_n(x)$, deducimos que $|f_n(x)|\leqslant f_n(1/n)=1/2n$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Como la serie $\sum 1/2n$ no es convergente el criterio de Weierstrass *no nos dice nada* acerca de la

convergencia uniforme de la serie *en todo* $\mathbb{R}$ (observa que el criterio de Weierstrass da condiciones *suficientes* pero no *necesarias* para la convergencia uniforme). Sin embargo, dicho criterio sí nos proporciona información cuando consideramos un conjunto de la forma: $A_\rho = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant \rho\}$, donde $\rho > 0$. Pues, tomando n_0 tal que $1/n_0 < \rho$, para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $1/n < \rho$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, en consecuencia $|f_n(x)| \leqslant f_n(\rho)$ para todo $x \in A_\rho$. Puesto que la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, el criterio de Weierstrass nos dice que $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ.

La única duda que queda por resolver es si la serie converge uniformemente en algún intervalo de la forma $[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ (en cuyo caso sería uniformemente convergente en todo $\mathbb{R}$). Pronto saldremos de dudas.

Calculemos los límites laterales en $x = 0$ de la función suma de la serie. Usando la sugerencia del enunciado tenemos, supuesto $x > 0$, que

$$\begin{aligned}\int_0^{n+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{1+k^2x^2} \leqslant \\ &\leqslant x + \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t = x + \int_0^{n} \frac{x}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

deducimos que:

$$\operatorname{arc\,tg}((n+1)x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \leqslant x + \operatorname{arc\,tg}(nx).$$

Tomando límites para $n \to \infty$ en esta desigualdad obtenemos $\pi/2 \leqslant F(x) \leqslant \pi/2 + x$. Como esta desigualdad es válida para todo $x > 0$, se sigue que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \pi/2$. Como $F(-x) = -F(x)$, se deduce que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = -\pi/2$. Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

Como las funciones f_n son continuas en $\mathbb{R}$ deducimos que la serie $\sum f_n$ no puede ser uniformemente convergente en ningún intervalo de la forma $[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ pues, si así ocurriera, la función suma habría de ser continua en dicho intervalo y, por tanto sería continua en $x = 0$ lo que acabamos de probar que no es cierto.

Fíjate en que la función F sí es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pues cualquier número $a \neq 0$ podemos meterlo dentro de un conveniente conjunto A_ρ, sin más que tomar $\rho < |a|$, y como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ, la función suma, F, es continua en A_ρ y, por la propiedad local de la continuidad, se sigue que F es continua en a. ☺

Ejercicio resuelto **254** Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n \,\mathrm{e}^{-nx} \quad (x \geqslant 0).$$

Solución. Estudiemos la convergencia puntual. Para $x>0$ la serie $\sum f_n(x)$ es de términos positivos y podemos aplicar el criterio del cociente. Tenemos que:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^{n+1}}x\,\mathrm{e}^{-x}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}x\,\mathrm{e}^{-x}\to x\,\mathrm{e}^{1-x}\,.$$

Consideremos la función $\varphi(x)=x\,\mathrm{e}^{1-x}$. Se tiene que $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{1-x}(1-x)$ y, fácilmente, se deduce que φ es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$. Luego para $x\geqslant 0$, $x\neq 1$ se tiene que $\varphi(x)<\varphi(1)=1$. Por tanto, el criterio del cociente implica que la serie converge para todo número $x\geqslant 0$, $x\neq 1$.

En este caso el criterio del cociente también proporciona información para $x=1$, pues aunque

$$\lim\frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)}=\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{-1}=1,$$

como la sucesión $(1+1/n)^{n+1}$ es decreciente, se tiene que dicho límite se acerca a 1 *por valores mayores que* 1, es decir $\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)}\geqslant 1$, lo que claramente implica que $\{f_n(1)\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\sum f_n(1)$ no converge por no cumplir la condición necesaria básica de convergencia para series.

Estudiemos la convergencia uniforme. Tenemos que:

$$f_n'(x)=\frac{n^{n+1}}{n!}nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-nx}(1-x).$$

Y, al igual que antes, se sigue que f_n es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$. Dado $\rho>1$, para todo $x\geqslant\rho$ es $f_n(x)\leqslant f_n(\rho)$ y como la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho,+\infty[$. Análogamente se comprueba que hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,\rho]$ donde $0<\rho<1$. ☺

Ejercicio resuelto **255** En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega\subset\mathbb{R}$ y, para cada $n\in\mathbb{N}$, se define una función $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$. Se pide estudiar la convergencia puntual en Ω de la sucesión de funciones, $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los conjuntos $A\subset\Omega$ que se indican en cada caso.

a) $\Omega=]0,\frac{\pi}{2}[,\ \ f_n(x)=n^2(\operatorname{tg}x)^n(1+\cos 4x),\ A=[0,a],\ A=[a,\frac{\pi}{4}],\ 0<a<\frac{\pi}{4}.$

b) $\Omega=\mathbb{R},\ \ f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n,\ A=[a,b],\ a<b.$

c) $\Omega=]-1,+\infty[,\ \ f_n(x)=n\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right),\ A=]-1,a],\ A=[a,+\infty[,\ a>-1.$

Solución. a) Se tiene que $f_n(0)=0$ y $f_n(\pi/4)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Si $0<x<\pi/4$ entonces $\{f_n(x)\}\to 0$ porque es una sucesión de la forma $n^2\lambda^n$ donde $0<\lambda=\operatorname{tg}x<1$. Para $\pi/4<x<\pi/2$ la sucesión $\{f_n(x)\}\to+\infty$. El campo de convergencia puntual es $\mathcal{C}=[\prime,\pi/\triangle]$ y la función límite puntual es la función nula. Sea $0<a<\pi/4$. Como la tangente es creciente en $[0,\frac{\pi}{2}[$, tenemos que:

$$\sup\{|f_n(x)|:x\in[0,a]\}\leqslant 2n^2(\operatorname{tg}a)^n$$

y, como $\{2n^2(\operatorname{tg} a)^n\} \to 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[0, a]$. Hay que sospechar que no hay convergencia uniforme en $[a, \pi/4]$. Para ello sea $x_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}$ y pongamos $u_n = \operatorname{tg}(x_n)$, $v_n = n$. Tenemos que $\{u_n\} \to 1$ y $v_n \to +\infty$. Tenemos que:

$$v_n(u_n - 1) = n\big(\operatorname{tg}(x_n) - 1\big) = -\frac{\operatorname{tg}(x_n) - 1}{-\frac{1}{n}} = -\frac{\operatorname{tg}(x_n) - 1}{x_n - \frac{\pi}{4}} \to -2$$

Donde hemos usado que $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$ porque es la derivada de la tangente en $x = \pi/4$. Deducimos que $\big(\operatorname{tg}(x_n)\big)^n \to \mathrm{e}^{-2}$ lo que implica que $f_n(x_n) \to +\infty$. Como $\{x_n\} \to \pi/4$ y $0 < x - n < \pi/4$, dado a con $0 < a < \pi/4$ hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < x_n < \pi/4$ para todo $n \geqslant n_0$. Por tanto, para $n \geqslant n_0$ se tiene que:

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in [a, \pi/4]\} \geqslant f_n(x_n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[a, \frac{\pi}{4}]$.

b) La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x\,.$$

El campo de convergencia puntual es $\mathbb{R}$ y la función límite es la función exponencial. Probaremos que hay convergencia uniforme en todo intervalo de la forma $[-\alpha, \alpha]$ donde $\alpha > 0$. Dado $\alpha > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \alpha$. Para todo $x \in [-\alpha, \alpha]$ y para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $\frac{x}{n} \in [-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}] \subset]-1, 1[$, luego $1 + \frac{x}{n} > 0$. En lo que sigue supondremos que $x \in [-\alpha, \alpha]$ y $n \geqslant n_0$.

$$\left|\mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = \mathrm{e}^x\left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right| \leqslant \mathrm{e}^\alpha\left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right|.$$

Donde:

$$\varphi(t) = \frac{\log(1+t)}{t}, \quad t > -1,\ \varphi(0) = 1.$$

Se verifica que $\displaystyle\lim_{t\to 1} \varphi(t) = 1$ por lo que φ es una función continua. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de la exponencial en 0 hay un $\delta_1 > 0$ tal que para $|u| < \delta_1$ se verifica que $|1 - \mathrm{e}^u| < \varepsilon\,\mathrm{e}^{-\alpha}$. Por la continuidad de φ en 0 hay un número $\delta_2 > 0$ tal que para $|t| < \delta_2$ se verifica que $|\varphi(t) - 1| < \delta_1/\alpha$. Tomemos $n_1 \geqslant n_0$ tal que $\frac{\alpha}{n_1} < \delta_2$. Entonces para todo $x \in [-\alpha, \alpha]$ y para todo $n \geqslant n_1$ se tiene que:

$$\frac{|x|}{n} < \delta_2 \longrightarrow |1 - \varphi(x/n)| < \frac{\delta_1}{\alpha} \longrightarrow \left|x\big(\varphi(x/n) - 1\big)\right| < \delta_1 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right| < \varepsilon\,\mathrm{e}^{-\alpha} \longrightarrow \left|\mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| < \varepsilon.$$

Lo que prueba que para todo $\alpha > 0$ hay convergencia uniforme en $[-\alpha, \alpha]$ y, por tanto hay convergencia uniforme en todo intervalo acotado.

c) Tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

En el ejercicio se supone que $x > -1$ para que todas las funciones f_n estén definidas en el intervalo $]-1,+\infty[$. Por tanto, el campo de convergencia puntual es $]-1,+\infty[$ y la función límite puntual es la función identidad $f(x)=x$. Definamos $h_n(x)=x-f_n(x)$. Tenemos que:

$$h'(x)=1-n\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}=1-\frac{n}{n+x}=\frac{x}{n+x}$$

Deducimos que $h_n'(x)<0$ para $-1<x<0$ y $h_n'(x)>0$ para $x>0$. Por tanto h_n tiene en el intervalo $]-1,+\infty[$ un mínimo absoluto en $x=0$, por lo que $h_n(x)\geqslant h_n(0)=0$. Observa que, para $n\geqslant 2$, $h_n(-1)$ está definido y las funciones h_n son continuas en $[-1,+\infty[$. Como h_n decrece en $[-1,0]$ y crece en $[0,+\infty[$, para todo $n\geqslant 2$ y todo $a>-1$ se tiene que:

$$\text{máx}\,\{|h_n(x)|:-1\leqslant x\leqslant a\}=\text{máx}\,\{h_n(-1),h_n(a)\}\to 0.$$

Por tanto hay convergencia uniforme en $]-1,a]$. Por otra parte se tiene que:

$$h_n(n)=n-n\log 2=n(1-\log 2)\to+\infty.$$

Lo que implica que no hay convergencia uniforme en ningún intervalo de la forma $[a,+\infty[$. ☺

Ejercicio resuelto **256** Sea $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ una función continua, no idénticamente nula con $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $f(0)=0$. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ las sucesiones de funciones definidas por $f_n(x)=f(nx)$, $g_n(x)=f(x/n)$, para todo $x\in\mathbb{R}_o^+$ y todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que:

a) $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente a cero en $\mathbb{R}_o^+$ pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

b) La sucesión $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}_o^+$.

Solución. El apartado a) es inmediato. Haremos el apartado b). Observa que en las hipótesis hechas para f la función $|f|$ está acotada, de hecho alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}_o^+$. Sea $M>1$ tal que $|f(x)|\leqslant M$. Dado $\varepsilon>0$, por hipótesis hay números $0<a<b$ tales que para $0\leqslant x\leqslant a$ y para $x\geqslant b$ se verifica que $|f(x)|\leqslant\varepsilon/M$. Sea $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $b/n_0<a$. Para todo $n\geqslant n_0$ y para todo $x\in[a,b]$ se tiene que $x/n<a$ y por tanto $|g_n(x)|<\varepsilon/M$, lo que implica que $|f_n(x)g_n(x)|=|f_n(x)||g_n(x)|\leqslant M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$. Si $0\leqslant x\leqslant a$ entonces también $0\leqslant x/n\leqslant a$ y si $b\leqslant x$ también es $b\leqslant nx$, en cualquier caso, se sigue que $|f_n(x)g_n(x)|<\varepsilon$. Por tanto, para todo $n\geqslant n_0$ y para todo $x\in\mathbb{R}$ es $|f_n(x)g_n(x)|<\varepsilon$, lo que prueba que la convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$. ☺

10.42 Observación. El producto de dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes puede no ser uniformemente convergente. Considera el ejmplo trivial en que las sucesiones son $f_n(x)=1/n$ (una sucesión de funciones constantes que converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$) y $g_n(x)=x$ (una sucesión constante, formada por una sola función, que evidentemente converge uniformemente a dicha función en $\mathbb{R}$). El producto es la sucesión de funciones $f_n(x)g_n(x)=x/n$ que converge puntualmente a cero pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}$.

El ejercicio anterior proporciona un ejemplo de dos sucesiones de funciones que no convergen uniformemente y cuyo producto converge uniformemente.

Puedes probar como fácil ejercicio que si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un conjunto A, y g es una función *acotada* en A entonces la sucesión $\{gf_n\}$ converge uniformemente a gf en A.

Ejercicio resuelto **257** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1 e $I=[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado.

a) Prueba que para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que cualesquiera sean $x,y\in I$ con $0<|x-y|<\delta$ se verifica que $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(y)\right|\leqslant\varepsilon$.

b) Para cada $n\in\mathbb{N}$ definamos:

$$f_n(x)=\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Justifica que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' en I.

Solución. El apartado a) es consecuencia fácil de la continuidad uniforme de f' en $[a,b]$ y del teorema del valor medio. Haremos el apartado b)). Tenemos que:

$$f_n'(x)=2n\big(f\big(x+\frac{1}{n}\big)-f\big(x+\frac{1}{n}\big)\big)=\frac{f\big(x+\frac{1}{n}\big)-f\big(x-\frac{1}{n}\big)}{x-\frac{1}{n}-\big(x-\frac{1}{n}\big)}.$$

Ahora basta escribir:

$$\big|f_n'(x)-f'(x)\big|\leqslant\left|\frac{f\big(x+\frac{1}{n}\big)-f\big(x-\frac{1}{n}\big)}{x+\frac{1}{n}-\big(x-\frac{1}{n}\big)}-f'\left(x-\frac{1}{n}\right)\right|+\left|f'\left(x-\frac{1}{n}\right)-f'(x)\right|$$

y usando el apartado a) y la continuidad uniforme de f' en $[a,b]$ se sigue que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' en $[a,b]$.

Ejercicio resuelto **258** Supongamos que f es una función continua en $[a,b]$ y que para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ se verifica que:

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Prueba que $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$.

Sugerencia. Usa el teorema de aproximación de Weierstrass.

Solución. La hipótesis hecha implica que para toda función polinómica $p(x)$ se verifica que $\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass hay una sucesión $\{p_n\}$ de funciones polinómicas que converge uniformemente e f en $[a,b]$. Como f es continua, está acotada en $[a,b]$ por lo que la sucesión $\{p_nf\}$ converge uniformemente a f^2 en $[a,b]$. Por tanto:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty}p_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b p_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Como f^2 es continua y positiva, deducimos que para todo $x\in[a,b]$ debe ser $f^2(x)=0$, esto es, $f(x)=0$. ☺

Ejercicio resuelto **259** Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en un intervalo $[a,+\infty[$. Supongamos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=a_n\in\mathbb{R}$. Prueba que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y que f tiene límite en $+\infty$, siendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}$.

Sugerencia. La condición de Cauchy permite probar la convergencia de $\{a_n\}$.

Solución. Dado $\varepsilon>0$, por la condición de Cauchy para la convergencia uniforme, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todos $n,m\geqslant n_0$ y para todo $x\geqslant a$ se tiene que $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon$. Tomando límites en esta desigualdad para $x\to+\infty$ se deduce que $|a_n-a_m|\leqslant\varepsilon$. Por tanto la sucesión $\{a_n\}$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. Sea $a=\lim\{a_n\}$.

Dado $\varepsilon>0$, hay un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant n_0$ y para todo $x\geqslant a$ es $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3$ y también $|a_n-a|<\varepsilon/3$. Pongamos:

$$|f(x)-a|\leqslant|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-a_{n_0}|+|a_{n_0}-a|<\frac{2\varepsilon}{3}+|f_{n_0}(x)-a_{n_0}|\,.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{n_0}(x)=a_{n_0}$, existe $K>a$ tal que para todo $x\geqslant K$ se verifica que $|f_{n_0}(x)-a_{n_0}|<\varepsilon/3$. Concluimos, a la vista de la anterior desigualdad, que para todo $x\geqslant K$ se verifica que $|f(x)-a|<\varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$. ☺

Ejercicio resuelto **260** En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega\subset\mathbb{R}$ y, para cada $n\in\mathbb{N}$, se define una función $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$. Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en Ω de la serie de funciones, $\sum f_n$, y la continuidad de la función suma $F=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

a) $\Omega=\mathbb{R},\ f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}$.

b) $\Omega=\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x^2+n}$.

c) $\Omega=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ f_n(x)=\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

Solución. a) Se trata de una serie geométrica de razón e^{-x}, por tanto, dicha serie converge si, y sólo si, $\mathrm{e}^{-x}<1$, esto es, $x>0$. El campo de convergencia puntual es $\mathbb{R}^+$. En este caso podemos calcular la función suma de la serie:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\qquad x>0.$$

Es una función continua en $\mathbb{R}^+$. Este resultado también puede obtenerse sin necesidad de calcular la función suma. Para ello, observamos que la serie converge uniformemente en semirrectas de la forma $[a,+\infty[$ donde $a>0$, pues para todo $x\geqslant a$ se verifica que $\mathrm{e}^{-nx}\leqslant e^{-na}$ y, como la serie $\sum\mathrm{e}^{-na}$ es convergente, el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass nos dice que la serie converge uniformemente en toda semirrecta del tipo $[a,+\infty[$ con $a>0$ y, en consecuencia, como es una serie de funciones continuas, la función suma es continua en toda semirrecta del tipo indicado. Por el carácter local de la continuidad, concluimos que la función suma es continua en $\mathbb{R}^+$.

b) Sea $a > 0$. Para todo $x \in [-a, a]$ se tiene que:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x^2+n} = \frac{x^2}{n(x^2+n)} \leqslant \frac{x^2}{n^2} \leqslant \frac{a^2}{n^2}.$$

Como la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, deducimos por el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass, que la serie converge uniformemente en todo intervalo del tipo $[-a, a]$ y, por tanto, en todo intervalo acotado. Deducimos también que el campo de convergencia puntual es todo $\mathbb{R}$ y que la función suma es continua en $\mathbb{R}$.

Observa que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$. Esto nos dice que no hay convergencia uniforme en semirrectas de la forma $[a, +\infty[$, porque el resultado visto en el ejercicio resuelto 259 implica que, si hubiera convergencia uniforme, la serie $\sum \frac{1}{n}$ debería ser convergente, cosa que no es cierto.

c) Sea $0 < a < 1$. Para $-a \leqslant x < a$ se tiene que $0 \leqslant x^{2^{n+1}} \leqslant a^{2^{n+1}}$ lo que implica que:

$$0 \leqslant \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \leqslant \frac{a^{2^n}}{1 - a^{2^{n+1}}}.$$

Como la sucesión $\{a^{2^{n+1}}\}$ es decreciente, se tiene que $1 - a^{2^{n+1}} \geqslant 1 - a^4 > 0$ y deducimos que:

$$0 \leqslant \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \leqslant \frac{a^{2^n}}{1 - a^4}.$$

Como $a^{2^n} \leqslant a^{2n}$ y la serie $\sum a^{2n}$ es convergente por ser una serie geométrica de razón $0 < a^2 < 1$, se sigue, por el criterio de comparación, que la serie $\sum a^{2^n}$ es convergente. El criterio de convergencia uniforme de Weierstrass implica que la serie dada converge uniformemente en $[-a, a]$. Deducimos que la serie converge puntualmente en $]-1, 1[$ y que la función suma es continua en dicho intervalo.

Análogamente, usando que $f_n(1/x) = -f_n(x)$, se prueba que la serie converge uniformemente en conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant a\}$ donde $a > 1$. Por tanto el campo de convergencia puntual es todo Ω y la función suma es continua en Ω. ☺

Ejercicio resuelto 261 Sea $\sum f_n$ una serie de funciones que converge uniformemente en un conjunto A. Sea $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Prueba que para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A se verifica que la sucesión $\{F_{2n}(x_n) - F_n(x_n)\}$ converge a cero.

Solución. Dado $\varepsilon > 0$, por la condición da Cauchy para la convergencia uniforme, hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $q > n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$ se verifica que $|F_q(x) - F_n(x)| \leqslant \varepsilon$. Haciendo en esta desigualdad $q = 2n$ resulta que para todo $x \in A$ es $|F_{2n}(x) - F_n(x)| \leqslant \varepsilon$. En particular para $x = x_n \in A$ se tiene que $|F_{2n}(x_n) - F_n(x_n)| \leqslant \varepsilon$, desigualdad que es válida para todo $n \geqslant n_0$. ☺

Ejercicio resuelto 262 En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar, haciendo uso de los criterios de Dirichlet o de Abel, la convergencia puntual y uniforme en Ω de la serie de funciones $\sum f_n$.

a) $\Omega = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2 + n}$.

b) $\Omega = [2, +\infty[, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

c) $\Omega = [0, \pi], \quad f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$.

Solución. a) Pongamos $g_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es monótona decreciente. Además como para todo $x \in \mathbb{R}$ es $0 < g_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$, se verifica que $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$. El criterio de convergencia uniforme de Leibniz nos dice que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Observa que no hay convergencia absoluta en ningún punto. ☺

b) Pongamos:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n} = \frac{(-1)^n\big(nx - (-1)^n\big)}{n^2x^2 - 1} = (-1)^n \frac{nx}{n^2x^2 - 1} - \frac{1}{n^2x^2 - 1}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \geqslant 2$ se verifica que $0 < \dfrac{1}{n^2x^2 - 1} \leqslant \dfrac{1}{4n^2 - 1}$ y la serie $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ es convergente, se sigue, por el criterio de Weierstrass que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2x^2 - 1}_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Pongamos $g_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2 - 1}$. Se comprueba enseguida que $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$. Además:

$$g_n'(x) = -\frac{n + x^2n^3}{(n^2x^2 - 1)^2}$$

Por lo que g_n es decreciente. En consecuencia, para todo $x \geqslant 2$ se verifica que $0 < g_n(x) \leqslant g_n(2)$. Puesto que $\{g_n(2)\} \to 0$, deducimos que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[2, +\infty[$. El criterio de convergencia uniforme de Leibniz nos dice que la serie $\sum (-1)^n g_n$ converge uniformemente en $[2, +\infty[$.

Hemos probado así que $\sum f_n$ es la suma de dos series uniformemente convergentes en $[2, +\infty[$ y, por tanto, ella misma es uniformemente convergente en dicho intervalo. Observa que no hay convergencia absoluta en ningún punto del intervalo. ☺

c) Como la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ es decreciente y converge a 0, parece apropiado aplicar el criterio de Dirichlet. Hemos visto en el ejercicio resuelto 42 que:

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Por lo que, para cada $0 < x \leqslant \pi$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|G_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x/2)}$.

El criterio de Dirichlet 9.43 nos dice que la serie $\sum f_n(x)$ es convergente. Puesto que para $x = 0$ la serie es trivialmente convergente, concluimos que el campo de convergencia

puntual en $[0,\pi]$. Supongamos que $0<a<\pi$. Entonces como la función seno es positiva y creciente en $[0,\pi/2]$ se verificará que $0<\operatorname{sen}(a/2)\leqslant\operatorname{sen}(x/2)$ para todo $x\in[a,\pi]$. Resulta así que:

$$|G_n(x)|\leqslant\frac{1}{\operatorname{sen}(a/2)}.$$

Desigualdad que es válida para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in[a,\pi]$. Por tanto, la sucesión $\{G_n\}$ está uniformemente acotada en $[a,\pi]$. El criterio de Dirichlet 10.13 nos dice que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[a,\pi]$.

Queda por estudiar si hay convergencia uniforme en $[0,a]$ donde $0<a<\pi$. Observamos que:

$$G_n(2/n)=\operatorname{sen}(1)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}\sim n\operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)\to+\infty.$$

Esto nos indica que no va a haber convergencia uniforme en $[0,a]$. De hecho, podemos usar el resultado del ejercicio resuelto 261 con $x_n=2/n$. Observa que $x_n\in[0,a]$ para todo n suficientemente grande. Tenemos que:

$$G_{2n}(x_n)-G_n(x_n)\sim n\left(\operatorname{sen}(2)\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{n}\right)-\operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\to+\infty.$$

Lo que implica, por el citado ejercicio, que no hay convergencia uniforme en $[0,a]$. ☺

Ejercicio resuelto **263** Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias $\sum c_nx^n$, y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

$$a)\ c_n=\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1},\qquad b)\ c_n=(n+1)^{\log(n+1)},\qquad c)\ c_n=\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$d)\ c_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)},\qquad e)\ c_n=a^{\sqrt{n}}\ (a>0),\qquad f)\ c_n=\frac{n!}{(n+1)^n}$$

Solución. a) Aplicando el criterio del cociente o de la raíz es muy fácil probar que $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\to1$ o que $\sqrt[n]{c_n}\to1$. Por tanto el radio de convergencia es 1. Como $c_n>0$ y $c_n\sim\frac{1}{n}$ la serie $\sum c_nx^n$ no converge para $x=1$. Se comprueba fácilmente que para $n\geqslant5$ es $c_{n+1}<c_n$ y como, además, $\{c_n\}\to0$. el criterio de Leibniz implica que la serie $\sum c_nx^n$ converge para $x=-1$. ☺

b) El criterio de la raíz nos da:

$$\sqrt[n]{(n+1)^{\log n}}=\sqrt[n]{\exp\left(\log n\right)^2}=\exp\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right)\to\exp(0)=1.$$

Por tanto, el radio de convergencia es 1. No hay convergencia en 1 ni tampoco en -1 porque $\{c_n\}$ no converge a 0.

c) No es inmediato en este caso aplicar el criterio del cociente ni el de la raíz. Pero sabemos que:

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

Por tanto $\mathrm{e}-(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2}x_n$ siempre que $\{x_n\}\to 0$. En particular, tenemos que:

$$c_n = \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}.$$

Por tanto, recordando las observaciones 10.25, se sigue que la serie dada tiene el mismo radio de convergencia que la serie $\sum \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}x^n$. Pero esta serie tiene, evidentemente, radio de convergencia $R=1$. Para $x=1$ la serie dada no converge porque $0<c_n\sim\frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}$ y se aplica el criterio límite de comparación con la serie armónica. Para $x=-1$ la serie $\sum(-1)^n c_n$ es una serie alternada y $\{c_n\}$ es decreciente y convergente a 0, luego dicha serie converge en virtud del criterio de Leibniz. ☺

d) Se aplica el criterio del cociente.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = c_n = \frac{2n+3}{2n+4} \to 1.$$

El radio de convergencia es $R=1$. Para estudiar la convergencia para $x=1$ se aplica el criterio de Raabe y para $x=-1$ el criterio de Leibniz. ☺

f) Aplicamos el criterio del cociente.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\frac{(n+1)^n}{n!} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

El radio de convergencia es $R=\mathrm{e}$. La serie no converge para $x=\pm\,\mathrm{e}$ porque la sucesión $\{c_n\,\mathrm{e}_n^n\}$ no converge a cero. De hecho, usando la fórmula de Stirling (8.26) se tiene que:

$$c_n\,\mathrm{e}^n = \frac{n!}{(n+1)^n}\,\mathrm{e}^n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{(n+1)^n}\,\mathrm{e}^n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to +\infty.$$

☺

Ejercicio resuelto **264** Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Solución. Empezamos viendo para qué valores de x la serie dada converge absolutamente. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$. Pongamos $a_n = \dfrac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$. Puesto que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)}\frac{n(2n-1)}{|x|^{2n}} = |x|^2\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} \to |x|^2,$$

deducimos que la serie dada converge absolutamente si $|x|^2<1$, es decir, si $|x|<1$. Deducimos así que $]-1,1[$ es el intervalo de convergencia de la serie. Sea $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ la función suma de la serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)} \qquad -1<x<1.$$

Recuerda que las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia. Por tanto, para $-1 < x < 1$ tenemos que:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$
$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2}.$$

Puesto que $f(0) = f'(0) = 0$, deducimos que:

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}dt = \log(1+x) - \log(1-x).$$

Por tanto:

$$f(x) = \int_0^x (\log(1+t)-\log(1-t))\,\mathrm{d}t \ = (1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x) \qquad (x \in]-1,1[).$$

☺

Ejercicio resuelto 265 Calcula la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n}$ y $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n(x+3)^n}{2^n}$.

Solución. Sea

$$f(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad (-1 < t < 1).$$

Tenemos que:

$$tf'(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n \qquad (-1 < t < 1).$$

Haciendo en estas igualdades $t = x^3/2$, supuesto que $-1 < x^3/2 < 1$, deducimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^3}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x^3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-x^3/2} + \frac{x^3/2}{(1-x^3/2)^2} = \frac{4}{(x^3-2)^2}$$

Análogamente, haciendo $t = (x+3)/2$, supuesto que $-1 < (x+3)/2 < 1$, obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x+3}{2}\right)^n = \frac{x+3}{2(1+(x+3)/2)^2} = 2\frac{3+x}{(5+x)^2}.$$

☺

Ejercicio resuelto 266 Dado un número natural $q \in \mathbb{N}$, prueba la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x \ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}.$$

Calcula el valor de la suma de las series correspondientes a los valores de $q = 1, 2, 3$.

Solución. Podemos hacer este ejercicio directamente, con un sencillo cálculo. Como sigue a continuación.

En la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k = \frac{1-(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u},$$

hagamos $u = x^q$ para obtener:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{qk} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}.$$

Integrando esta igualdad en el intervalo $[0,1]$, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{qk+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tomando ahora límites para $n \to \infty$, y teniendo en cuenta que:

$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{qn+q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{qn+q+1},$$

obtenemos la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}.$$

Finalmente

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\log 2}{3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

También podemos hacer este ejercicio teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^q)^n \qquad (|x|<1).$$

Como las series de potencias pueden integrarse término a término en su intervalo de convergencia, se sigue que para todo $0 < t < 1$ es

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t x^{qn}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1}$$

Ahora, la serie $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1}$, es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $]-1,1[$ y que, en virtud del criterio de Leibniz para series alternadas, converge para $t=1$. En consecuencia, por el teorema de Abel, se verifica que dicha serie converge uniformemente en $[0,1]$ y por tanto

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{qn+1}.$$

Como, evidentemente, se verifica que

$$\lim_{t\to 1} \int_0^t \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$$

Deducimos que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{qn+1}.$$

☺

Ejercicio resuelto **267** Expresa la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$, y $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

Solución. Sea $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, donde $-1<x<1$. Entonces

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \qquad (-1<x<1).$$

También

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \qquad (-1<x<1).$$

Integrando esta igualdad obtenemos:

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}dt = \frac{x}{1-x}+\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1} \quad (-1<x<1).$$

Deducimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n = \frac{1}{1-x}+\frac{\log(1-x)}{x} \qquad (-1<x<1).$$

En particular, haciendo $x=\frac{1}{2}$ resulta que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)} = 2-2\log 2.$ ☺

Ejercicio resuelto **268** Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n;\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}x^n;\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n.$$

Solución. Cualquier serie de potencias del tipo $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n, es decir, $R(n)=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son funciones polinómicas, tiene radio de convergencia 1. Pues:

$$\frac{R(n+1)}{R(n)}=\frac{P(n+1)Q(n)}{P(n)Q(n+1)}$$

es cociente de dos funciones polinómicas en n que tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder, luego su límite para $n\to\infty$ es igual a 1.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum\dfrac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es una función polinómica, tiene radio de convergencia infinito. Pues:

$$\frac{P(n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{P(n)}=\frac{P(n+1)}{P(n)}\frac{1}{n+1},$$

y basta notar que, evidentemente, $\lim\limits_{n\to\infty}P(n+1)/P(n)=1$.

Teniendo en cuenta que $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$ se sigue que las series primera y tercera tienen radio de convergencia 1 y la segunda serie tiene radio de convergencia $+\infty$.

Para calcular la suma de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^3+n+3}{n+1}x^n$ lo más fácil es expresar n^3+n+3 en potencias de $n+1$. Para ello basta expresar el polinomio $P(x)=x^3+x+3$ por medio de su desarrollo de Taylor centrado en $x=-1$. Como $P(-x)=-P(x)$ la derivada segunda de P en $x=0$ es cero. Tenemos así que:

$$x^3+x+3=P(-1)+P'(-1)(x+1)+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3=1+4(x+1)+(x+1)^3.$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+4+(n+1)^2\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+5)x^n.$$

La serie $\sum x^n/(n+1)$ se obtiene integrando la serie geométrica $\sum x^n$ y dividiendo por x, de donde se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=-\frac{\log(1-x)}{x}\qquad(-1<x<1).$$

La suma de la serie $\sum(n^2+2n+5)x^n$ puede calcularse también derivando dos veces la serie geométrica. Seguiremos el procedimiento general para sumar series aritmético – geométricas, es decir, series del tipo $\sum Q(n)x^n$ donde $Q(n)$ es un polinomio en n.

En nuestro caso $Q(n) = n^2 + 2n + 5$. Observa que $Q(n+1) - Q(n) = 3 + 2n$, por tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} Q(k)x^k(1-x) &= \sum_{k=0}^{n}\big(Q(k)x^k - Q(k)x^{k+1}\big)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\big(Q(k+1) - Q(x)\big)x^{k+1} + Q(0) - Q(n)x^{n+1} =\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(3+2k)x^{k+1} + 5 - Q(n)x^{n+1}\end{aligned}$$

Tomando límites para $n \to \infty$ en esta igualdad, teniendo en cuenta que para $-1 < x < 1$ es $\lim\limits_{n\to\infty} Q(n)x^{n+1} = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n &= \frac{5}{1-x} + \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(3+2n)x^{n+1} =\\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} =\\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{4x^2 - 7x + 5}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3} \qquad (-1 < x < 1).$$

La suma de la tercera serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n = \sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n(n+1)}x^n$ puede obtenerse muy fácilmente integrando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que suele ser efectivo para sumar series de la forma $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n y que consiste en descomponer $R(n)$ en elementos simples. En nuestro caso tenemos

$$R(n) = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$, se obtiene fácilmente que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}x^n = -2\log(1-x) + 2\frac{\log(1-x)+x}{x}.$$

Para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}x^n$, usaremos que $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$. La idea consiste en escribir el polinomio como $n^3 = n(n-1)(n-2) + An(n-1) + Bn + C$. Identificando coeficientes resulta $A = 3, B = 1, C = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n}{n!}x^n =\\ &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(n-1)!}x^n = (x^3+3x^2+x)\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Este método puede usarse para sumar series del tipo $\sum \dfrac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es un polinomio. ☺

Ejercicio resuelto 269 Calcula la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n(2n+1)}$ y deduce el valor de las sumas de las series:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}.$$

Solución. Observa que el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(2n+1)}x^n$ es el intervalo $]-1,1[$ y que la serie converge también en los extremos del intervalo de convergencia. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ la función suma:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}x^n \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

Como consecuencia del teorema de Abel, la función f es continua en $[-1,1]$.

Nota Observa que puede aplicarse el criterio de Weierstrass en el intervalo $[-1,1]$; lo que justifica, sin necesidad de recurrir al teorema de Abel, que la serie converge uniformemente en $[-1,1]$ y, por tanto, la función f es continua en $[-1,1]$.

Por el teorema de derivación para funciones definidas por series de potencias, sabemos que la función f es indefinidamente derivable en el intervalo $]-1,1[$ y

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n+1} \qquad (-1<x<1).$$

Por tanto:

$$xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{2n+1} \qquad (-1<x<1).$$

La forma que tiene f' nos sugiere considerar la función

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1<x<1)$$

que se calcula fácilmente, pues

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Como $g(0)=0$, deducimos que

$$g(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\log(1-x).$$

Ahora relacionaremos f' con g. Para $0<x<1$ tenemos que:

$$g(\sqrt{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}=\sqrt{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=$$
$$=\sqrt{x}+x\sqrt{x}f'(x).$$

De donde:

$$f'(x)=\frac{g(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\log(1+\sqrt{x})-\log(1-\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\qquad(0<x<1).$$

Integrando por partes se obtiene que una primitiva de f en $]0,1[$ viene dada por:

$$h(x)=\frac{(1-\sqrt{x})\log(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\qquad(0<x<1).$$

Deducimos que:

$$f(x)=h(x)-\lim_{x\to 0}h(x)=2+h(x)\qquad(0\leqslant x<1).$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos que:

$$f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\lim_{x\to 1}f(x)=2-\lim_{x\to 1}h(x)=2-2\log 2.$$

Consideremos ahora que $-1<x<0$. Tenemos:

$$xf'(x)=-|x|f'(-|x|)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}|x|^n\qquad(-1<x<0).$$

Consideraremos ahora la función

$$\varphi(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad(-1<x<1).$$

Como

$$\varphi'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=-\frac{1}{1+x^2},$$

y $\varphi(0)=0$, deducimos que:

$$\varphi(x)=-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=-\operatorname{arc\,tg}x.$$

Al igual que antes deducimos que:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{-x}-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{-x})}{x\sqrt{-x}}\qquad(-1<x<0),$$

o lo que es igual:

$$-f'(-x)=\frac{\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}\qquad(0<x<1).$$

Como $-f'(-x)$ es la derivada de la función $x \mapsto f(-x)$, integrando por partes se obtiene que una primitiva de la función $x \mapsto f(-x)$ en $]0,1[$ es:

$$H(x) = 2\frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \log(1+x) \qquad (0 < x < 1).$$

Deducimos que

$$f(-x) = H(x) - \lim_{x\to 0} H(x) = H(x) - 2 \qquad (0 \leqslant x < 1).$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)} = \lim_{x\to 1} f(-x) = \lim_{x\to 1} H(x) - 2 = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2.$$

☺

Ejercicio resuelto **270** Prueba que las funciones definidas por:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},\ g(0) = 1, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x},\ f(0) = 1$$
$$h(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2},\ h(0) = -1/2, \quad \varphi(x) = \frac{\log(1+x)}{x},\ \varphi(0) = 1$$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

Solución.

10.43 Estrategia. Para probar que una función es de clase C^∞ en un intervalo I es *suficiente* probar que dicha función es la suma de una serie de potencias convergente en el intervalo I.

Las funciones del enunciado responden todas ellas al siguiente modelo. Supongamos que tenemos una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$, con radio de convergencia no nulo. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y sea $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ la función suma. En virtud del teorema de derivación para series de potencias, sabemos que la función F es de clase C^∞ en I. Sea ahora $q \in \mathbb{N}$ y consideremos la función $G : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \frac{F(x) - \sum_{k=0}^{q} c_k(x-a)^k}{(x-a)^{q+1}}, \quad G(a) = c_{q+1}.$$

Es evidente que

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{q+1+n}(x-a)^n \qquad x \in I.$$

Por tanto, la función G *es la suma de una serie de potencias* en el intervalo I y, por tanto, G es de clase C^∞ en I.

Teniendo en cuenta que

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\qquad (x\in\mathbb{R})$$
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}\qquad (x\in\mathbb{R})$$
$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-2}\qquad (x\in\mathbb{R})$$
$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n}\qquad (-1<x<1)$$

Se sigue que las funciones g,f,h son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y la función φ es de clase C^∞ en $]-1,1[$. Pero es evidente que φ es de clase C^∞ en $]1/2,+\infty[$, luego φ es de clase C^∞ en $]-1,+\infty[$. ☺

Ejercicio resuelto 271 Prueba que la función $f:]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\frac{x}{\operatorname{sen}x-x}\log\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right),\quad f(0)=1,$$

es de clase C^∞. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1-\frac{1}{12}x^2}{x^4}$.

Solución. Las funciones:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\qquad (x\in\mathbb{R}),$$
$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n}\qquad (|x-1|<1)$$

son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y en $]0,2[$ respectivamente. Además:

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x},\ g(0)=1;\qquad h(x)=\frac{\log x}{x-1},\ h(1)=1.$$

Como para todo $x\in]-\pi,\pi[$, $x\neq 0$ es $0<g(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x}<1$, tenemos que:

$$f(x)=\frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}-1}=h(g(x)),\quad f(0)=h(g(0))=1.$$

Concluimos que f es de clase C^∞ en $]-\pi,\pi[$ por ser composición de funciones de clase C^∞.

Pongamos:

$$g(x)-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4+\varphi(x).$$

Deducimos que:

$$f(x)=h(g(x))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(g(x)-1)^n=1-\frac{1}{2}(g(x)-1)+\frac{1}{3}(g(x)-1)^2+\psi(x),$$

donde:
$$\psi(x) = (g(x)-1)^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(g(x)-1)^{n-3}.$$

Observa que ψ es continua. Además, como para $x \to 0$ es $g(x) - 1 \sim \frac{-1}{3!}x^2$, se verifica que $(g(x)-1)^3 \sim \frac{-1}{(3!)^3}x^6$ y, por tanto, $\psi(x) = o(x^4)$ para $x \to 0$.

Haciendo las operaciones indicadas en la igualdad anterior, calculando solamente los términos hasta la potencia x^4, obtenemos:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{5!}x^4 + \frac{1}{3}\frac{1}{(3!)^2}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{11}{2160}x^4 + o(x^4).$$

Deducimos que:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 - \frac{1}{12}x^2}{x^4} = \frac{11}{2160}.$$

Puedes comprobar este resultado calculando el límite por L'Hôpital. ☺

Ejercicio resuelto **272** Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en $a = 4$ de la función:
$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 7}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}.$$

La función que nos dan parece bastante impresionante, pero no es tan fiera como parece. Es una función racional y lo que se hace para obtener su desarrollo en serie de potencias es descomponerla en fracciones simples, algo que ya sabes hacer. Si el denominador solamente tiene raíces reales es muy sencillo calcular la serie de potencias que nos piden, porque en tal caso las fracciones simples van a ser, salvo constantes, de los dos tipos siguientes:
$$a)\ \frac{1}{x-\alpha}, \qquad b)\ \frac{1}{(x-\alpha)^n}.$$

Las fracciones del tipo $a)$ pueden desarrollarse en serie de potencias centradas en el punto que queramos $a \neq \alpha$, basta escribir:
$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-1}{\alpha - a - (x-a)} = \frac{-1}{\alpha - a}\frac{1}{1 - \frac{x-a}{\alpha-a}}.$$

Pero la última fracción es la suma de una serie geométrica de razón $\frac{x-a}{\alpha-a}$, por tanto, supuesto que $\left|\frac{x-a}{\alpha-a}\right| < 1$, se verifica que:
$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-1}{\alpha-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-a}{\alpha-a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-a)^{n+1}}(x-a)^n \qquad |x-a| < |\alpha-a|.$$

Derivando respecto a x esta igualdad obtenemos:
$$\frac{1}{(x-\alpha)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\alpha-a)^{n+1}}(x-a)^{n-1} \qquad |x-a| < |\alpha-a|.$$

Las sucesivas derivadas nos dan el desarrollo en serie de potencias centrado en a de las fracciones del tipo $b)$.

En nuestro caso, se calcula fácilmente la descomposición en fracciones simples:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

Según acabamos de ver, las fracciones obtenidas puedes desarrollarlas en series de potencias centradas en cualquier punto que no sea una raíz del denominador. Te dejo que acabes tú el ejercicio.

Esto puede complicarse mucho cuando el denominador tiene raíces complejas, en cuyo caso solamente pueden obtenerse con facilidad algunos desarrollos centrados en puntos particulares (las partes reales de las raíces imaginarias). ☺

Ejercicio resuelto 273 Calcula explícitamente el valor de a_n, n = 0,1,2,... sabiendo que se verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n,\quad a_0=1,\ a_1=-3.$$

Solución. Usaremos el método de la función generatriz que se basa en la consideración de la función $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Se supone que dicha función está definida en algún intervalo centrado en el origen. Tenemos que:

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}x^{n+2}=\\&=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}\big(-2a_{n+1}-a_n\big)x^{n+2}=\\&=a_0+a_1x-2x\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}-x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\\&=a_0+a_1x-2x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-x^2f(x)=a_0+a_1x-2x(f(x)-a_0)-x^2f(x).\end{aligned}$$

De esta igualdad se obtiene que:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0+a_1x+2xa_0}{1+2x+x^2}=\frac{1-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}-x\frac{1}{(1+x)^2}=\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{1+x}\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)=\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnx^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^n.\end{aligned}$$

Obtenemos así que para todo $n\geqslant 1$ es $a_n=(-1)^n(2n+1)$. Puedes comprobar ahora que efectivamente se verifica la igualdad $a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n$. ☺

Ejercicio resuelto 274 Definamos $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Prueba que:

a) $f(0) = \pi/4$, y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Usando un desarrollo en serie para f, prueba que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y:

$$f'(x) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.$$

c) Justifica que para todo $x \geqslant 0$ se verifica que:

$$f(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

d) Deduce de lo anterior que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solución. a) Tenemos que.

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Además:

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Desigualdades válidas para todo $t\in\mathbb{R}$, en particular para $t \in [0,1]$, lo que implica que:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

b) Tenemos que $\displaystyle\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+t^2)^n}{n!}x^{2n}$. Por tanto:

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}x^{2n}\,\mathrm{d}t\,.$$

Se trata de permutar la suma de la serie con la integral. Como la variable de la integral es $t \in [0,1]$, en lo que sigue consideramos que $x\in\mathbb{R}$ es un número fijo. Consideremos la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ donde para $n = 0,1,2,\ldots$ $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la función dada para todo $t \in [0,1]$ por:

$$g_n(t) = (-1)^n\frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}x^{2n}.$$

En esta expresión debes considerar que x está fijo y la variable es $t \in [0,1]$. Probaremos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge uniformemente en $[0,1]$ lo que permitirá permutar la suma de la serie con la integral. Tenemos que para $n \geqslant 1$ es:

$$|g_n(t)| = \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}x^{2n} \leqslant \frac{2^{n-1}}{n!}x^{2n} \leqslant \frac{2^{2n}x^{2n}}{n!} = \frac{(4x^2)^n}{n!}$$

Como también $|g_0(t)| \leqslant 1$, y la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(4x^2)^n}{n!}$ es convergente, podemos aplicar a la serie $\sum g_n$ el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass y concluimos que dicha serie converge uniformemente en $[0,1]$. Por tanto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!} x^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}t \right) x^{2n}.$$

Como esta igualdad es válida para cualquier número real x hemos expresado la función f como suma de una serie de potencias convergente en todo $\mathbb{R}$. Por el teorema de derivación para series de potencias, tenemos que f es derivable y su derivada viene dada por:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n \frac{2n(1+t^2)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}t \right) x^{2n-1} =$$

$$= 2x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t^2)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t \right) x^{2n-2} = -2x \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t^2)^n}{n!} x^{2n}\mathrm{d}t =$$

$$= -2x \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{(x^2)^n (1+t^2)^n}{n!} \right) \mathrm{d}t = -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.$$

c) Pongamos para todo $x \geqslant 0$:

$$h(x) = f(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right)^2.$$

Tenemos que $h(0) = f(0) = \pi/4$ y h es una función derivable en el intervalo $[0,+\infty[$. Tenemos:

$$h'(x) = f'(x) + 2\,\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = [t = xu] = f'(x) + 2\,\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,x\,\mathrm{d}u =$$

$$= f'(x) + 2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u = 0.$$

Luego, h es constante y, por tanto, $h(x) = h(0) = \pi/4$ para todo $x \geqslant 0$.

d) Tomando límites para $x \to +\infty$ en la igualdad:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x)}$$

obtenemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ☺

10.6. Los primeros desarrollos en serie

Puede afirmarse que la primera aparición de lo que entendemos en la actualidad como una serie ocurre en el trabajo de Viéte (1540 - 1603) *Variorum de rebus mathematicis responsorum. Liber VIII* (1593), en el que Viète estudia la serie geométrica obteniendo la fórmula para la suma de la misma y también aparece la expresión para π que se conoce como “fórmula de Viète”.

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Gregory de St. Vincent (1584 - 1667), en su *Opus Geometricum* (1647) fue el primero en afirmar explícitamente que una serie infinita puede representar una magnitud. También le debemos el poco afortunado término de “exhausción”, la introducción de las coordenadas polares y el primer análisis de las paradojas de Zenón usando series. También descubrió que la cuadratura de la hipérbola $xy = k$ es la misma en $[a, b]$ que en $[c, d]$ cuando $a/b = c/d$, resultado fundamental para la comprensión de los logaritmos y que llevó al descubrimiento del logaritmo natural por Mercator.

En 1668, Nicholas Mercator (1620 - 1687) publicó un libro titulado *Logarithmotechnia* en el que proporcionaba un método para calcular logaritmos basado en el desarrollo en serie del logaritmo natural

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \tag{10.20}$$

el cual obtuvo usando los resultados de Gregory de St. Vincent.

A su vez, este resultado de Mercator fue mejorado por James Gregory (1638 - 1675) que obtuvo la expansión:

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\cdots$$

que converge más rápidamente que la anterior. A James Gregory se debe también la serie del arcotangente:

$$\operatorname{arctan} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \tag{10.21}$$

Sustituyendo $x = 1$ resulta

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

Mejores representaciones de π se deducen de esta serie haciendo como A. Sahrp (1651 - 1742) en 1705 $x = 1/\sqrt{3}$, con lo que

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\cdots\right)$$

Con cuya serie calculó π con 72 cifras decimales. Una mejor aproximación de π que evita el uso de radicales y converge rápidamente, fue obtenida en 1706 por John Machin (1680 - 1752). La idea es expresar $\pi/4 = \operatorname{arctan} 1$ en función de dos ángulos de tangentes racionales y cada una de ellas menor que la unidad. La serie de Machin es:

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctan}\frac{1}{5}-\operatorname{arctan}\frac{1}{239}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\cdots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\cdots\right)$$

Con ella calculó π con 100 cifras decimales.

10.6.1. Newton y las series infinitas

Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados *Anni Mirabiles* 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como *bachelor of arts* en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida.

A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas. A finales de ese mismo año, el método de fluxiones, es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el método inverso de fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal. Newton tenía 24 años, había nacido el día de Navidad de 1642.

Newton había leído la obra de Wallis *Arithmetica Infinitorum*, y siguiendo las ideas de interpolación allí expuestas, descubrió la serie del binomio que hoy lleva su nombre. Dicha serie es una generalización del desarrollo del binomio, que era bien conocido para exponentes naturales, y había sido muy usado por Pascal para resolver una gran variedad de problemas.

Newton, en su intento de calcular la cuadratura del círculo, es decir, de calcular la integral $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$, consideró dicha cuadratura como un problema de interpolación, relacionándola con las cuadraturas análogas $\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$ conocidas para exponentes naturales $n\in\mathbb{N}$. Newton tuvo la ocurrencia de sustituir el límite superior de integración por un valor genérico x. De esta forma obtuvo las siguientes cuadraturas (Newton no disponía de símbolo para la integral; usamos, claro está, la notación actual).

$$\begin{aligned}
\int_0^x (1-t^2)\,\mathrm{d}t &= x-\frac{1}{3}x^3\\
\int_0^x (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t &= x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\\
\int_0^x (1-t^2)^3\,\mathrm{d}t &= x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\\
\int_0^x (1-t^2)^4\,\mathrm{d}t &= x-\frac{4}{3}x^3+\frac{6}{5}x^5-\frac{4}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9
\end{aligned}$$

Newton observó que el primer término de cada expresión es x, que x aumenta en potencias impares, que los signos algebraicos se van alternando, y que los segundos términos $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, $\frac{4}{3}x^3$ estaban en progresión aritmética. Razonando por analogía, supuso que los dos primeros términos de $\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t$ deberían ser

$$x-\frac{\frac{1}{2}}{3}x^3$$

De la misma manera, procediendo por analogía, pudo encontrar algunos términos más:

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = x-\frac{\frac{1}{2}}{3}x^3-\frac{\frac{1}{8}}{5}x^5-\frac{\frac{1}{16}}{7}x^7-\frac{\frac{1}{128}}{9}x^9-\cdots$$

Representando para $n = 0, 1, 2, \dots$ por $Q_n(x)$ el polinomio $\int_0^x (1-t^2)^n \, dt$, se tiene que

$$Q_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n \, dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

Donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}, \qquad \binom{n}{0} = 1$$

Haciendo ahora en $Q_n(x)$, $n = 1/2$, se obtiene

$$Q_{1/2}(x) = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{1}{128}}{9}x^9 - \cdots$$

Lo que llevó a Newton a concluir que

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2} \, dt = Q_{1/2}(x)$$

Donde $Q_{1/2}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ es una suma con infinitos términos. A partir de aquí, Newton dedujo el desarrollo de $(1-x^2)^{1/2}$ por derivación.

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 - \cdots$$

Newton nunca publicó su teorema binomial, ni dio una demostración general del mismo. La primera vez que apareció en un texto impreso fue en 1685 en un libro de Wallis (que reconoce la autoría de Newton), titulado *Treatise of Algebra*. Newton mismo, en una carta a Henry Oldenburg, el secretario de la Royal Society, conocida como la *Epistola Prior* (junio de 1676), expone el teorema binomial, a requerimiento de Leibniz, con estas oscuras palabras:

> Las extracciones de raíces resultan muy abreviadas por el teorema
>
> $$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc}$$
>
> donde $P+PQ$ representa una cantidad cuya raíz o potencia, o cuya raíz de una potencia se necesita calcular, siendo P el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes divididos por el primero, y $\frac{m}{n}$ el índice numérico de las potencias de $P+PQ\dots$ Por último $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ$, $C = \frac{m-n}{2n}BQ$ y así sucesivamente.

Newton era consciente de que su forma de razonar por analogía no era rigurosa por lo que comprobó su resultado de varias formas. Aplicó su algoritmo a diversos resultados conocidos, comprobando que las soluciones obtenidas eran siempre correctas, redescubrió la serie de Mercator para el logaritmo y obtuvo las series del arcoseno y del seno.

Newton encontró que el método de desarrollos en serie proporcionaba un algoritmo casi universal para calcular cuadraturas y resolver multitud de problemas. En su obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrita en 1669 y publicada en 1711, aunque circulaba en forma manuscrita entre los colegas y conocidos de Newton, propuso un método para cuadrar una curva consistente en tres reglas:

1. El área bajo la curva de ecuación $y = ax^{m/n}$ es $\dfrac{na}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$.
2. Si la ecuación $y = y(x)$ de la curva está dada por un número finito de términos $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$, el área bajo la curva y es igual a la suma de las áreas de todos los términos y_1, y_2, y_3,...
3. Si la curva tiene una forma más complicada, entonces debe desarrollarse la ecuación de la curva en una serie del tipo $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, y aplicar las reglas 1 y 2.

Debe notarse que Newton supuso que cualquier cantidad analíticamente expresada podía desarrollarse en una serie de la forma $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, serie que puede ser cuadrada término a término usando la regla 1.

Veamos un ejemplo de esta forma de proceder. Se trata de calcular $\int_0^{1/4}\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$. Newton procede como sigue

$$(x-x^2)^{1/2} = x^{1/2}(1-x)^{1/2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \frac{1}{128}x^{9/2} - \cdots$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4}(x-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{5}x^{5/2} - \frac{1}{28}x^{7/2} - \frac{1}{72}x^{9/2} - \frac{5}{704}x^{11/2} - \cdots\right]_0^{1/4} \\ &= \frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \frac{5}{704\cdot 2^{11}} - \cdots \qquad (10.22)\end{aligned}$$

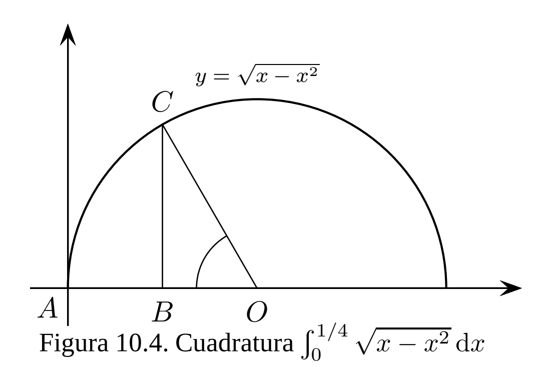


Figura 10.4. Cuadratura $\int_0^{1/4}\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$

En la figura 10.4 se ha representado el semicírculo de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$. El sector circular COA tiene amplitud $\pi/3$ por lo que su área es la tercera parte de la del semicírculo, es decir, $\pi/24$. Como $BC = \sqrt{3}/4$, el área del triángulo BOC es $\sqrt{3}/32$. Por otra parte, la integral calculada en (10.22) es el área de la región ACB. Por tanto:

$$\int_0^{1/4}(x-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{\pi}{24}$$

Deducimos que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \frac{5}{704\cdot 2^{11}} - \cdots\right)$$

Y de esta forma, Newton expresa la cuadratura del círculo por medio de una serie infinita que, además, converge rápidamente.

La confianza de Newton en los procesos infinitos queda reflejada en las siguientes palabras de la citada obra *De analysi*:

> Todo lo que el análisis común [es decir, el álgebra] realiza por medio de ecuaciones con un número finito de términos, este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por medio de ecuaciones infinitas, de tal forma que no he tenido ninguna duda en darle asimismo el nombre de análisis. Porque el razonamiento es éste no es menos cierto que en el otro; ni las ecuaciones menos exactas; aunque nosotros los mortales, cuyo poder de razonamiento está confinado dentro de estrechos límites, no podemos expresar ni tampoco concebir todos los términos de esas ecuaciones como para conocer exactamente a partir de ellas las cantidades que deseamos. . . Para terminar, podemos considerar todo esto como perteneciente al *Arte Analítica*, con cuya ayuda pueden ser determinadas de una manera exacta y geométricamente las áreas, longitudes, etc., de curvas.

Es decir, Newton no sólo descubrió el teorema binomial sino que las series infinitas proporcionaban un método de análisis con la misma consistencia interna que el álgebra de ecuaciones finitas.

Bibliografía

[1] Kirsti Andersen. Las Técnicas del Cálculo, 1630-1660. In *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Eitorial, S.A., 1984. 304, 495

[2] Bos, H.J.M. Newton, Leibniz y la Tradición Leibniziana. In *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Eitorial, S.A., 1984. 495, 511, 512, 513

[3] Burton. *The History of Mathematics: An Introduction*. McGraw-Hill, sixth edition, 2007. 150

[4] Israel E. Drabkin. Aristotle's Wheel: Notes on the History of a Paradox. *Osiris http://www.jstor.org/stable/301848?origin=JSTOR-pdf*, 9:162 – 198, 1950. 184

[5] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. 32

[6] Giovanni Ferraro. *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York, 2008. 150

[7] P.M. González-Urbaneja. Las Técnicas del Cálculo: Fermat, Wallis y Roberval. *Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Actas, año II*. 304, 495

[8] Judith V. Grabiner. The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56:195 – 206, 1983. 304

[9] I. Grattan-Guinness. Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of Early Nineteenth Century. *Archive for History of Exact Sciences*, 6(7):372 – 400, 1970. 175

[10] Israel Kleiner. History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48:137 – 174, 2001. 304, 495

[11] Loren C. Larson. *Problem-Solving Trough Problems*. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1983. 32

[12] Ralph E. Kenyon, Jr. Atomism and Infinite Divisibility. *http://www.xenodochy.org/rekphd/index.html*, 1994. 179

[13] S.B. Russ. A Translation of Bolzano's Paper on the Intermediate Value Theorem. *Historia Mathematica*, 7(2):156 – 185, 1980. 174

[14] Gert Schubring. *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York, 2005. 150, 169, 170

[15] Michael Spivak. *Suplemento del Cálculo Infinitesimal - CALCULUS*. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1974. 32

[16] Michael Spivak. *Cálculo Infinitesimal*. Reverté Ediciones S.A., México D.F., 2ªed. - 3ª Reimpresión edition, 1996. 32, 63, 101, 115, 163, 399

[17] Richard Courant y Herbert Robbins. *¿Qué es la Matemática?* Editorial Aguilar, Madrid, 1979. 112